Список литературы: 1. *Кузьменко В.М., Ковтунович С.А., Шульга Ю.В.* Использование идеографического подхода при адаптации программных средств пользователем/ Сб. науч. трудов ХГПУ "Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье", вып.7, ч. 1. Х.: ХГПУ, 1999. С.118-121. 2. *Петров Э.Г.* Организационное управление городом и его подсистемами (методы и алгоритмы). Харьков: Вища школа, 1986. 144 с.

Поступила в редколлегию 06.11.2000

Кузьменко Виктор Михайлович, канд. техн. наук, доцент, профессор кафедры системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: математическое и имитационное моделирование технологических процессов. Адрес: Украина, 61166, Харьков,, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06, ST@khture.kharkov.ua.

Ненько Леонид Федорович, аспирант кафедры системотехники, начальник ЦОП ДОПП УГППС "УКРПОЧТА". Научные интересы: автоматизированные системы управления, прогрессивные информационные технологии в почтовой связи. Адрес: Украина, Киев, ул. Сагайдачного, 132, кв. 34, тел. 220-06-74, 246-64-54.

УДК 519.7

О.Н. ВОСКОБОЙНИК, В.В. ИВАЩЕНКО

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ МОДЕЛЕЙ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассматриваются различные модели компараторной идентификации. Показывается, что идентифицируемый оператор может обладать свойством внутренней нелинейности взаимно-однозначного характера.

При компараторной модификации используются две модели компаратора [1]. В первой сравниваются сигналы, преобразованные по одному и тому же закону, т.е. осуществляется предикат эквивалентности:

$$E(x,y) = D_B(F_x, F_y), \tag{1}$$

где $x, y \in A$ – множество входных сигналов; $F_x, F_y \in B$ – множество выходных сигналов; F – отображение из A в B; D_B – стандартный предикат равенства на $B \times B$, т.е.

$$D_B(a,b) = \begin{cases} 1, \textit{если}\ a = b; \\ 0, \textit{если}\ a \neq b. \end{cases}$$

Во второй модели входные сигналы преобразуются по разным законам, т.е. осуществляется предикат дифункциональности [2]:

$$E(x,y) = D_B(F_1 x, F_2 y), \tag{2}$$

где $x, y \in A$ – множество входных сигналов; $F_1x, F_2y \in B$ – множество выходных сигналов; F_1, F_2 – отображения из A в B; D_B – стандартный предикат равенства на $B \times B$.

С точки зрения идентификации и построения математических моделей реальных систем имеет смысл изучать только те предикаты, которые определяют отображение, входящее в правую часть равенств (1), (2), с точностью до изоморфизма. Покажем, что для предикатов эквивалентности и дифункциональности, и только для них выполняется это свойство.

Утверждение 1. Пусть F – отображение L в A, а G – отображение L в B и отображения F и G обладают следующими свойствами: для любых $x, y \in L$: $Fx = Fy \Leftrightarrow Gx = Gy$, тогда найдется взаимно-однозначное соответствие $\varphi : J_m F = J_m F$, для которого $\varphi F = G$.

Доказательство. На множестве L отображение F осуществляет разбиение его на классы следующим образом: $x, y \in L$ лежат в одном классе, если $Fx = Fy$. Будем обозначать это разбиение Ω_A, а его элементы – ω_a, причем если $x \in \omega_a$, то $Fx = a \in A$. Аналогично введем разбиение Ω_B с элементами ω_b, индуцируемое на L с отображением G. Докажем, что эти разбиения совпадают, т.е. $\Omega_A = \Omega_B$. Для этого возьмем произвольный элемент $\omega_a \in \Omega_A$ и произвольные $x, y \in \omega_a$. Тогда $Fx = Fy$, отсюда $Gx = Gy = b$, т.е. $x, y \in \omega_b$. Следовательно, любая пара из ω_a принадлежит ω_b. Значит, $\omega_a \subset \omega_b$. Но это включение выполняется и в обратную сторону. Действительно, если $x', y' \in \omega_b$, то $Gx' = Gy' = b$ и это означает, что $Fx' = Fy' = a$, т.е. $x', y' \in \omega_a$ или $\omega_b \subset \omega_a$. Последнее равенство означает, что любой элемент разбиения Ω_A является элементом разбиения Ω_B, и наоборот, следовательно, $\Omega_a = \Omega_b$.

Теперь построим взаимно-однозначное отображение $\varphi : \mathrm{Im}\, F \to \mathrm{Im}\, G$. Зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathrm{Im}\, F \subset A$. Для этого элемента найдется x, для которого $Fx = a$, значит, $x \in \omega_a$. Поскольку $\Omega_a = \Omega_b$, то найдется $\omega_a = \omega_b$. Тогда $x \in \omega_b$, следовательно, $Gx = b$ – единственный элемент, $b \in \mathrm{Im}\, G \subset B$. Положим $\varphi(a) = b$. Покажем построенное отображение взаимно-однозначно.

Пусть $a_1 \cdot a_2 \in \mathrm{Im}\, F$ и $a_1 \neq a_2$. Тогда, так как каждому элементу из образа соответствует единственный элемент разбиения, то $\omega_{a_1} \neq \omega_{a_2}$. Отсюда $\omega_{b_1} = \omega_{a_1}$, $\omega_{b_2} = \omega_{a_2}$ и $\omega_{b_1} \neq \omega_{a_2}$, следовательно, $b_1 \neq b_2$, т.е. $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

Покажем, что для любого $b \in Im\, G$ найдется $a \in Im\, F$, для которого $\varphi(a) = b$. Действительно, произвольному $b \in Im\, G$ соответствует $\omega_b \in \Omega_b = \Omega_a$. Отсюда вытекает, что в $Im\, F$ найдется элемент a такой, что $\omega_b = \omega_a$, а это означает: $\varphi(a) = b$.

Окончательно имеем, что построенное нами отображение $\varphi : \mathrm{Im}\, F \to \mathrm{Im}\, F$ – взаимно-однозначно.

Остается показать, что для этого отображения φ выполняется $\varphi F = G$. Для этого возьмем произвольный элемент $x \in L$, тогда $Fx = a \in \mathrm{Im}\, F$ и $Gx = b \in \mathrm{Im}\, G$. Отсюда $x \in \omega_a, \omega_b$, но так как ω_a и ω_b – элементы одного и того же разбиения, то $\omega_a = \omega_b$ (пересечение их – непустое множество). Но это значит, что $\varphi(a) = b$, следовательно, $\varphi Fx = \varphi(a) = b = Gx$.

Замечание 1. В доказательстве утверждения 1, выбрав произвольный класс $\omega_a \in \Omega_A$, мы предполагали, что найдутся два элемента $x, y \in \omega_a$. Это предположение несущественно. Действительно, пусть ω_a состоит из одного элемента x, т.е. $x = \omega_a$. Но тогда этот элемент входит в качестве класса и в разбиение Ω_B. Он просто равен классу ω_b, для которого $Gx = b$. Так как если предположить, что ω_b содержит еще какой-либо элемент y, то $Gy = b$, значит, $Gx = Gy$, и $Fx = Fy = a$, т.е. существует $y \in \omega_a$. Но это противоречит предположению, что ω_a состоит из одного элемента.

Замечание 2. В утверждении 1 взаимно-однозначное соответствие осуществляется только между образами отображений F и G. При этом между множествами A и B такого соответствия может и не существовать, поскольку условия утверждения останутся справедливыми, если $A = G_1 \cup \mathrm{Im}\, F$, $B = G_2 \cup \mathrm{Im}\, G$, где G_1 и G_2 – произвольные множества. Однако если $A = \mathrm{Im}\, F$, а $B = \mathrm{Im}\, G$, то $\varphi : A \to B$.

Утверждение 2. Пусть $F_1 : L \to A$, $F_2 : L \to A$, $G_1 : L \to B$, $G_2 : L \to B$ – произвольные отображения, для которых выполняется свойство:

$$\forall x, y \in L : F_1 x = F_2 y \Leftrightarrow G_1 x = G_2 y, \qquad (3)$$

тогда найдется взаимно-однозначное отображение $\varphi : C \to D$, для которого $\varphi F_1 = G_1$ на Ω_1 и $\varphi F_2 = G_2$, где $G = \mathrm{Im}\, F_1 \cap \mathrm{Im}\, F_2$, $D = \mathrm{Im} G_1 \cap \mathrm{Im} G_2$; Ω_1 – множество $x \in L$, для которых $F_1 x \in \mathrm{Im}\, F_2$, Ω_2 – множество $x \in L$, для которых $F_2 x \in \mathrm{Im}\, F_1$.

Доказательство. Возьмем два произвольных элемента $x, y \in L$, таких, что $F_{1x} = F_1 y$ и $F_1 y = F_1 z$. Тогда найдется $z \in L$, для которого $F_1 x = F_2 z$, $F_1 y = F_2 z$. Отсюда по условию утверждения 1 имеем, что $G_1 x = G_2 z$ и $G_1 y = G_2 z$, т.е. $G_1 x = G_1 y$. Таким образом, если $x, y \in \Omega_1$, то из равенства $F_1 x = F_1 y$ вытекает $G_1 x = G_1 y$. Заметим, что если $x, y \in \Omega_1$, то из равенства $G_1 x = G_1 y = G_2 z$ вытекает, что $G_1 x = \operatorname{Im} G_2$. Поэтому аналогичные рассуждения можно провести и в обратную сторону и показать, что для любых $x, y \in \Omega_1$ из равенства $G_1 x = G_1 y$ следует, что $F_1 x = F_1 y$. Таким образом, $F_1 x = F_1 y \Leftrightarrow G_1 x = G_1 y$ на Ω_1. Поэтому из утверждения 1 существует взаимно-однозначное отображение $\varphi : \operatorname{Im} F_1 \to \operatorname{Im} G_1$, для которого $\varphi F_1 = G_1$, $x \in \Omega_1$.

Покажем, что для любого $x \in \Omega_2$ выполняется $\varphi F_2 = G_2$, где $\varphi : G \to D$. Действительно, пусть $x \in \Omega_2$, тогда $F_2 x \in J_m F_1$ и найдется $y : F_2 x = F_1 y$. Заметим, что это означает $y \in \Omega_1$. Следовательно, из условия леммы 2 $G_2 x = G_1 y$, с одной стороны, и $\varphi F_2 x = \varphi F_1 y = G_1 y$ – с другой, т.е. $\varphi F_2 x = G_2 x$.

Доказанные утверждения позволяют сформулировать и доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Произвольный предикат* $E(x, y)$, *заданный на* $L \times L$, *удовлетворяет равенствам*

$$E(x, y) = D_A(Fx, Fy) = D_B(Gx, Gy), \tag{4}$$

где $F : L \to A, G : L \to B$; D_A, D_B *– стандартные предикаты равенства на множествах* A *и* B *соответственно, тогда и только тогда, когда найдется взаимно-однозначное отображение* $\varphi : \operatorname{Im} F \to \operatorname{Im} G$, *для которого* $\varphi F = G$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеет место (4) и $E(x, y) = D_A(Fx, Fy) = I$. Тогда $\varphi Fx = \varphi Fy$ или $Gx = Gy$. Эту цепочку равенств можно пройти и в обратном порядке, т.е., если $Gx = Gy$, то $\varphi^{-1} G_2 x = \varphi^{-1} G_1 y$, $Fx = Fy$ и $E(x, y) = I$. Таким образом, $E(x, y) = D_B(Gx, Gy)$, значит, равенства (3) выполняются.

Достаточность. Она вытекает из утверждения 1, так как при выполнении равенств (3) для любых $x, y \in L$ следует, что $Fx = Fy \Leftrightarrow Gx = Gy$.

Теорема 2. *Произвольный предикат* $E(x, y)$, *заданный на* $L \times L$, *удовлетворяют равенствам*

$$E(x, y) = D_A(F_1 x, F_2 y) = D_B(G_1 x, G_2 y),$$

где $F_1, F_2 : L \to A, G_1, G_2 : L \to B$; D_A, D_B *– стандартные предикаты равенства на множествах* A *и* B *соответственно, тогда и только тогда, когда найдется взаимно-однозначное отображение* $\varphi : C \to D$, *для которого*

$$\varphi F_1 x = G_1 x, x \in \Omega_1,$$
$$\varphi F_2 x = G_2 x, x \in \Omega_2,$$

где множества C, D, Ω_1, Ω_2 *определены так же, как и в утверждении 2.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеют место соотношения (5), и $E(x, y) = D_A(F_1 x, F_2 y) = I$. Это означает, что

$$F_1 x = F_2 y, x \in \Omega_1, y \in \Omega_2, F_1 x \in C, F_2 y \in C.$$

Тогда из (5) получаем: $\varphi F_1 x = \varphi F_2 y$ или $G_1 x = G_2 Y$. Данные рассуждения проводятся и в обратном порядке. Следовательно, $E(x, y) = D_B(G_1 x, G_2 y)$.

Достаточность. Достаточность, как и в предыдущем случае, вытекает из утверждения 2. Поскольку, если имеют место равенства (4), то $\forall x, y \in L : F_1 x = F_2 y \Leftrightarrow G_1 x = G_2 y$.

Замечание. Отметим, что если имеют место равенства (4), то между $\operatorname{Im} F_1$ и $\operatorname{Im} G_1$ (соответственно между $\operatorname{Im} F_2$ и $\operatorname{Im} G_2$) взаимно-однозначного соответствия может и не существовать и, таким образом, нельзя утверждать, что равенства $\varphi F_1 = G_1$ и $\varphi F_2 = G_2$ выполняются всюду, где определены указанные отображения. В этом можно убедиться, рассмотрев следующий пример.

Таблица 1

F_1 :	1	2	3	4	5
	0	1	2	2	3
F_2 :	1	2	3	4	5
	2	2	4	5	3
G_1	1	2	3	4	5
	0	0	2	2	3
G_2	1	2	3	4	5
	2	2	6	6	3

Определим отображения F_1, F_2, G_1, G_2 на множестве $\{1,2,3,4,5\}$ табл. 1.

Таблица 2

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1

Тогда таблица предиката $E_1(x, y) = D(F_1 x, F_2 y)$ будет иметь вид, представленный в табл. 2.

Нетрудно убедиться, что такую же таблицу можно построить и для предиката

$$E_2(x,y)=D(G_1x,G_2y),$$

т.е. $E_1=E_2$ или имеют место равенства (4):

$$E(x,y)=D(F_1x,F_2y)=D(G_1x,G_2y).$$

Однако $\operatorname{Im}F_1=\{0,1,2,3\}$, а $\operatorname{Im}G_1=\{0,2,3\}$, т.е. они разной мощности и взаимно-однозначного соответствия между ними не существует. Такая же ситуация и для $\operatorname{Im}F_2, \operatorname{In}G_2$. С другой стороны, в данном случае $C=\{2,3\}$ и $D=\{2,3\}$, т.е. в качестве отображения выступает преобразование, сохраняющее все на местах. При этом равенства $\varphi F_1=G_1$ и $\varphi F_2=G_2$ выполняются на множествах $\{3,4,5\}$ и $\{1,2,5\}$, так как $\Omega_1=\{3,4,5\}$, а $\Omega_2=\{1,2,5\}$. Последнее обстоятельство не удивительно. Из таблицы предиката видно, что на первом плече сравнения $(F_1\cdot G_1)$ восстановление отображения с точностью до взаимно-однозначного соответствия возможно в тех столбцах, где есть “1”, т.е. на тех элементах, для которых результат действия отображения можно с чем-либо сравнить. Аналогичная ситуация и со вторым плечом сравнения (F_2,G_2), только там восстановление возможно на тех элементах, которые соответствуют строкам с “1”.

Однако существует логическая возможность ввести еще несколько типов предикатов по аналогии с указанными выше моделями. Их можно получить, меняя аргументы функций F, F_1, F_2:

$$E(x,y)=D(F(x,x),F(x,y)),$$

$$E(x,y)=D(F(x,y),F(y,y)),$$

$$E(x,y)=D(F(x,y),F(x,y)),$$

$$E(x,y)=D(F_1(x,x),F_2(y)),$$

$$E(x,y)=D(F_1(x),F_2(x,y)),$$

$$E(x,y)=D(F_1(x,y),F_2(x,y)).$$

Для того чтобы данные модели могли иметь практическую ценность, необходимо выполнение изоморфизма, описанного выше. Оказывается, что для таких моделей указанное свойство не выполняется, что можно показать, приведя соответствующие контрпримеры.

Рассмотрим на множестве $R\times R$ следующие предикаты:

$$E_1(x,y)=D(x-x,x-y),$$

$$E_2(x,y)=D\left((x-x)^2,(x-y)^2\right),$$

$$E_3(x,y)=D(x-y,y-y),$$

$$E_4(x,y)=D\left((x-y)^2,(y-y)^2\right),$$

$$E_5(x,y)=D(x-y,x-y),$$

$$E_6(x,y)=D\left((x-y)^2,(y-y)^2\right),$$

$$E_7(x,y)=D(x+y,y),$$

$$E_8(x,y)=D(x,0),$$

$$E_9=D(x,x+y),$$

$$E_{10}(x,y)=D(0,y),$$

$$E_{11}(x,y)=D(x-y,x+y),$$

$$E_{12}(x,y)=D\left(\left(x^2-2xy+y^2,x^2-2xy\right)\right).$$

Непосредственная проверка позволяет установить равенства

$$E_1=E_2, E_3=E_4, E_5=E_6; E_7=E_8, E_9=E_{10},\ E_{11}=E_{12},$$

но для каждой из этих пар задающие их отображения не изоморфны.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Т.3. Харьков: Основа, 1989. 180 с. 2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Поступила в редколлегию18.11.2000

Воскобойник Олег Николаевич, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, 61166, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.

Иващенко Валерий Владимирович, соискатель ХТУРЭ. Научные интересы: математические методы анализа сложных систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-72.