Проблемы бионики
1998. Вып. 48. С. 48—51

ХТУРЭ

УДК 681. 5. 01: 658. 5

И. Ю. ПАНФЕРОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ К ОПТИМИЗАЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ С ЯВНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Важной проблемой теории формального описания интеллектуальных систем является разработка процедур принятия оптимальных решений. Рассмотрим класс оптимизационных задач, в которых ограничения заданы системами равенств или/и неравенств в явном виде

$$J(u^*) \le J(u), u^* \in U; \quad \forall u \in U; \tag{1}$$

при условии

$$g(u) = 0 \text{ или } g(u) \in K, \tag{2}$$

где $J(u)$ — выпуклый, дифференцируемый и ограниченный снизу функционал, определенный на Гильбертовом пространстве H;
U — выпуклое и замкнутое подпространство в H;
$g(\cdot)$ — отображение из U в H выпуклое в смысле

$$\forall u, v \in U, \forall \alpha \in [0,1] \quad ag(u) + (1-\alpha)g(v) - g(\alpha u + (1-\alpha)v) \in K; \tag{3}$$

K — выпуклый замкнутый конус в H с непустым содержимым $\overset{\circ}{K}$ (в случае, когда $K = \{0\}$, задача (1) имеет ограничения только в виде равенств, а $g(u)$ является афинным.

Для решения задачи (1) при условии (2) сформируем Лагранжиан

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, g(u) \rangle,, \tag{4}$$

где $\lambda \in K^*$ (K^* — сопряженный конус).

Решением (4) является седловая точка (u^*, λ^*) на $U \times K^*$, удовлетворяющая неравенствам

$$u^* \in U, \forall u \in U, \left\langle L'_u(u^*, \lambda^*), u - u^* \right\rangle \geq 0; \tag{5}$$

$$\lambda^* \in K^*, \forall K^*, \left\langle L'_\lambda(u^*, \lambda^*), \lambda - \lambda^* \right\rangle \leq 0. \tag{6}$$

Учитывая (4), запишем (5) в виде:

$$\left\langle J'_u(u^*), u - u^* \right\rangle + \left\langle \lambda^*, g(u) - g(u^*) \right\rangle \geq 0. \tag{7}$$

В соответствии с принципом вспомогательных задач сформируем вспомогательный функционал в форме Лагранжиана

$$L:(u,\lambda) \to \hat{J}(u) + \langle \lambda, Q(u) \rangle, \tag{8}$$

где $\hat{J}(u)$ и $Q(u)$ имеют те же свойства, что и $J(u)$, $g(u)$ соответственно.

Сформируем вспомогательный функционал

$$\hat{J}(u) + \langle \rho_1 J'(u^k) - \hat{J}'(u^k), u \rangle + \langle \lambda^k, (\rho_1 g'(u^k) - Q'(u^k)) \cdot u +$$
$$+ \langle \lambda, Q(u) + \rho_2 g(u^k) - Q(u^k) \rangle \tag{9}$$

и определим оптимизационную задачу с явными ограничениями:

$$\min_{u \in U} [\hat{J}(u) + \langle \rho_1 J'(u^k) - \hat{J}'(u^k), u \rangle + \langle \lambda^k, (\rho_1 g'(u^k) - Q'(u^k)) \cdot u \rangle] \tag{10}$$

$$Q(u) + \rho_2 g(u^k) - Q(u^k) \in K. \tag{11}$$

Определенную таким образом вспомогательную задачу можно решить, используя алгоритм А1 в одноуровневом варианте.

Алгоритм А1.

Шаг 1. Сформировать функционал

$$I^v : u \to \hat{J}(u) + \langle \rho J'(v) - \hat{J}'(v), u \rangle + \rho \tilde{J}(u).$$

Шаг 2. Задать начальные значения $u_0 \in U$ и $m=0$, выбрать направление поиска минимума функционала w_m, $\|w_m\| = 1$, такое что

$$\left.\begin{array}{c} (I^{\nu})'(u_m, w_m) > 0, \\ \lim (I^{\nu})'(u_m, w_m) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m \to +\infty} (I^{\nu})'(u_m, v_m) = 0, \\ \forall v_m \in U, \|v_m\| = 1 \end{array}\right\}$$

Если это условие удовлетворяется, то выбор w_m является сходящимся.

Шаг 3. Выбрать число ρ_m (шаг) (выбор точки u_{m+1} на прямой $u_m - \rho \cdot w_m$) такое, что

$$\left.\begin{array}{c} \rho_m > 0, I^{\nu}(u_m) - I^{\nu}(u_{m+1}) > 0, \\ \lim\limits_{m \to +\infty} [I^{\nu}(u_m) - I^{\nu}(u_{m+1})] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{m \to +\infty} (I^{\nu})'(u_m, w_m) = 0 \end{array}\right\}$$

Если это условие удовлетворяется, то выбор ρ_m является сходящимся.

Шаг 4. Исследуется, является ли I^{ν} достаточно регулярным для перехода от $\lim\limits_{m \to +\infty} (I^{\nu})'(u_m, v_m) = 0, \forall v_m$; $\|v_m\| \le c < +\infty$ к $(I^{\nu})'(u^*, \varphi) = 0, \forall \varphi \in H$.

Шаг 5. Исследуется возможность перехода к исходному функционалу.

Для решения задачи (10, 11) в двухуровневом варианте необходимо в качестве вспомогательного взять функционал вида

$$\bar{J} : (u, \lambda) \to \hat{J}(u) - \frac{1}{2}\|\lambda\|^2 \tag{12}$$

и воспользоваться алгоритмом А2 на двух уровнях.

Алгоритм А2.

Шаг1. Задать начальное значение $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \cdots, u_N^0)$ такое, чтобы $u^0 \in U$; $k = 0$ — индекс итерации; $i = 1, (i = 1, 2, \cdots, N)$.

Шаг 2. Решить задачу

$$\min_{u_i \in U_i} J(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \cdots, u_{i-1}^{k+1}, u_i, u_{i+1}^k, \cdots, u_N^k);$$

пусть u_i^{k+1} — является решением задачи .

Шаг 3. Проверить, если $i = N$, то выполнить шаг 4; иначе индексу номера переменной присвоить значение $i = i + 1$ и выполнить шаг 2.

Шаг 4. Проверить условие останова алгоритма (получена ли заданная точность результата решения задачи): если нет — $i = 1$, $k = k+1$ и выполнить шаг 2; иначе — останов.

Алгоритм А3.

Шаг 1. Выбрать начальные значения (u^0, λ^0). Индексу итераций присвоить значение $k = 0$.

Шаг 2. Решить вспомогательную задачу на нижнем уровне

$$\min_{u \in U}[\hat{J}(u) + \langle \rho \cdot J'(u^k) - \hat{J}(u^k), u \rangle + \rho \langle \lambda^k, g(u) \rangle]. \tag{13}$$

Пусть u^{k+1} — решение.

Шаг 3. На верхнем уровне решить задачу подстройки множителей Лагранжа

$$\lambda^{k+1} = P(\lambda^k + \varepsilon \cdot g(u^{k+1})), \tag{14}$$

где P — оператор проектирования на K^* ($P = I$, если $K = \{0\}$).

Шаг 4. Если условия останова достигнуты — останов; иначе — $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Для получения параллельного разложения задачи (10, 11) необходимо позаботиться о соответствующих структурных свойствах вспомогательного функционала, т.е. определить его в аддитивной форме, например

$$\bar{J}(u, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} [\hat{J}_i^k(u_i) + \langle \lambda_i, Q_i^k(u_i) \rangle], \tag{15}$$

положив при этом

$$Q_i^k : u_i \to g_i(u_1^k, u_2^k, \ldots, u_i, u_{i+1}^k, \ldots, u_N^k). \tag{16}$$

Принципы вспомогательных задач и релаксации применены для упрощения алгоритмических процедур решения оптимизационных задач. Показано, каким образом, комбинируя указанные принципы и разработанные на их основе обобщенные рекуррентные алгоритмы, можно построить многоуровневые процедуры решения оптимизационных задач, не прибегая к построению дополнительных процедур координации.

Список литературы: 1. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации: Пер. с англ. М.: Наука, 1977. 344 с. 2. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.

Поступила в редколлегию 20.10.97