

У ДК 02.500.2

В. А. ЛОВИЦКИЙ, канд. техн. наук,
М. С. БАРЕНБОЙМ

О СТРАТЕГИИ ПОИСКА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ
В ИСКУССТВЕННЫХ СИСТЕМАХ. СООБЩЕНИЕ 2

Рассмотрим алгоритм, реализующий предлагаемую стратегию поиска доказательства теорем.

В последующем изложении литералы будут нумероваться. Через L_i обозначим литерал с номером i , а через (i, j) — резольвенту, для которой при образовании соответствующего контрапункта использовались литералы L_i, L_j .

В приводимом ниже алгоритме поиска решения задач вида (1) на основании свойств 1, 2 [1], а также формул для вероятности независимых событий, приближенно определяются вероятности резольвирования соответствующих пар литералов. Резольвента образуется с помощью тех пар, которые (за исключением некоторых случаев) в данный момент имеют наибольшую вероятность.

При описании алгоритма будут использоваться функции $p_1(i, j)$, $p_4(i)$ для приближенных значений вероятностей использования пары литералов $\langle L_i, L_j \rangle$ в качестве контрапункта при образовании резольвент; $p_2(i, j)$, $p_3(i, j)$ как служебные функции; двумерный массив M1 для хранения аргументов функции p_1 ; одномерные массивы M3, M7 для хранения аргументов функций p_3 , p_4 ; M2 — для запоминания пар $\langle L_i, L_j \rangle$, которые запрещается использовать для образования резольвент, M4 — для установления связи между соответствующими предложениями. Одномерные массивы M5, M6, M8 используются как служебные.

Алгоритм поиска: 1. Получаем множество предложений $S = S_1 \cup S_2$, где S_1 соответствует формуле A , S_2 — формуле B .

2. Нумеруем все предложения и все литералы из S .

3. Исключаем из S тавтологии.

4. Заменяем предложения вида $C = C_1 \vee C_2$, где C_1 поглощает C_2 , на C_2 .

5. Исключаем из S предложения, у которых один из литералов чист в S либо которое поглощается другим предложением.

6. Если A непротиворечиво и S_2 пусто, перейти к п. 60.

7. Помещаем в M6 номера литералов из S .

8. Выполнить блок А [1]. Если из каждого предложения из S можно выбрать по литералу таким образом, что никакие два из них не могут образовать контрапункт, перейти к п. 60.

9. В каждом предложении C из S_2 выбираем литерал L_i , для которого относительно других литералов из C имеется наименьшее количество литералов из $S \setminus \{C\}$, способных с L_i образовать

контрапункт, и полагаем $p_4(i) = \frac{1}{l_i} \cdot \frac{1}{S_2}$ (l_i — число литералов

из $S \setminus \{C\}$, которые могут с L_i образовать контрапункт, S_2 — число предложений в S_2). Помещаем i в массив M7.

10. Среди всех чисел $p_4(i)$ выбираем максимальное \tilde{p} .

11. Положить $N = 1$. Присвоить N_6 номер последнего предложения из S .

12. Если $1/N < \tilde{p}$, перейти к п. 15.

13. Выполнить блок В [1]. Если из каждого предложения из S нельзя выбрать по литералу таким образом, чтобы из них можно было образовать только N контрапунктов, положить $N = N + 1$ и перейти к п. 12.

14. С помощью блока В определяем все группы, состоящие из N пар $\langle L_i, L_j \rangle$, удовлетворяющие п. 13, и помещаем пары чисел $\langle i, j \rangle$ в массив M1. Для каждой такой пары полагаем $p_1(i, j) = \frac{1}{N}$.

15. Если в S имеются предложения единичной длины, литералы L_i, L_j , которых могут образовать контрапункт, то положить

$i^* = i_1, \tilde{i} = j_1$ и перейти к п. 25. Иначе, среди чисел $p_1(i, j)$ и $p_4(i)$ выбираем максимальное \tilde{p} .

16. Если в S имеются предложения вида $C_1 \vee L_{i_1}$ и $C_2 \vee \sim L_{i_2}$, где $C_1 \vee \sim L_{i_1}$ поглощает $C_2 \vee \sim L_{i_2}$, то если C_2 пусто или ни для какого j , отличного от i_2 , не имеет место унифицируемость литералов L_{i_1}, L_j , то положить $i^* = \max(i_1, i_2), \tilde{i} = \min(i_1, i_2)$, поместить $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ в M_2 и перейти к п. 25.

17. Если нет таких литералов L_{i_1}, L_{j_1} , для которых $p_1(i, j) = \tilde{p}$, перейти к п. 23.

18. Среди всех пар $\langle L_{i_1}, L_{j_1} \rangle$, для которых $p_1(i, j) = \tilde{p}$ и ни $\langle i, j \rangle$, ни $\langle j, i \rangle$ не содержится в M_2 , выбираем такие, чтобы в полученном множестве содержалось как можно меньше пар вида $\langle L_{i_1}, L_{j_1}, \dots, \langle L_{i_k}, L_{j_k} \rangle$, где L_{i_1}, \dots, L_{j_k} принадлежат предложениям, имеющим более одного литерала. Из полученного множества пар выбираем пару $\langle L_{i_1}, L_{j_1} \rangle$, образующую резольвенту наименьшей длины. Если таких пар несколько, выбираем любую из них. Положить $i^* = \max(i_1, j_1), \tilde{i} = \min(i_1, j_1)$.

19. Если с помощью литералов L_{i^*} и $L_{\tilde{i}}$ можно образовать контрапункт, то поместить $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ в M_2 , установить соответствие между $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ и номером, который будет присвоен предложению $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$, положить $p_2(i^*, \tilde{i}) = p_1(i^*, \tilde{i})$ и перейти к п. 25.

20. Если пара $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ имеет в массиве M_3 соответствующую ей пару $\langle i_1^*, \tilde{i}_1 \rangle$, то исключить из M_3 $\langle i_1^*, \tilde{i}_1 \rangle$, вместо $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ поместить в M_1 пару $\langle i_1^*, \tilde{i}_1 \rangle$, положить $p_1(i_1^*, \tilde{i}_1) = p_3(i_1^*, \tilde{i}_1)$ в массиве M_6 вместо i^* и \tilde{i} поместить i_1^* и \tilde{i}_1 , после чего перейти к п. 15.

21. Если $p_1(i^*, \tilde{i}) = 1$, то перейти к п. 60. Иначе исключить из M_1 все пары $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$, для каждой из оставшихся пар $\langle i, j \rangle$, находящихся в той же группе, где ранее находилась пара $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$, положить $p_1(i, j) = \frac{p_1(j, i)}{1 - p_1(i^*, \tilde{i})}$.

22. Выполнить п. 15. Перейти к п. 17.

23. Если в S имеется предложение вида $C_1 \vee L_{i_1}$ и $C_2 \vee \sim L_{i_2}$, где $C_1 \vee \sim L_{i_1}$ поглощает $C_2 \vee \sim L_{i_2}$, то положить $i^* = \max(i_1, i_2)$, $\tilde{i} = \min(i_1, i_2)$ поместить $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ в M_2 и перейти к п. 25.

24. Среди всех пар литералов $\langle L_i, L_j \rangle$, которые могут образовать контрапункт, где L_i, L_j не содержится в одном предложении, пары $\langle i, j \rangle, \langle j, i \rangle$ не содержатся в M_2 и для которых $p_4(i) = \bar{p}$ выбираем пару $\langle L_{i^*}, L_{\tilde{i}} \rangle$, где резольвента $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ не превосходит по числу литералов никакую другую резольвенту $\langle i, j \rangle$. Если таких пар несколько, выбираем любую из них. Поместить $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ в M_2 .

25. образуем резольвенту $(i^*, \tilde{i}) = L_{i'_1} \vee \dots \vee L_{i'_n}$ (здесь по определению $L_{i'_v}$ получим путем означивания литерала L_{i_v} , который содержится в одном из предложений, с помощью которого образовалась резольвента).

26. Если $(i^*, \tilde{i}) = \text{nil}$, перейти к п. 61.

27. Исключить из $M_1 \langle i^*, \tilde{i} \rangle$. Исключить из M_6 , если таковые в нем имеются, номера, равные i^* или \tilde{i} . Присвоить новый номер предложению $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$ и новые номера i'_1, \dots, i'_n литералам $L_{i'_1}, \dots, L_{i'_n}$. Положить $S = S \cup \{(i^*, \tilde{i})\}$. Поместить в M_4 пару $\langle N_1, N_2 \rangle$, где N_1 — номер предложения $\langle i^*, \tilde{i} \rangle$, N_2 — номер предложения, содержащего литерал L_{i^*} , с помощью которого образовалась резольвента (i^*, \tilde{i}) .

28. Если $i^* \in M_7$ и не существует такого $L_j \in S$, что L_{i^*} и L_j находятся в разных предложениях, L_{i^*} и L_j могут образовать контрапункт и $\langle i^*, j \rangle$ в M_2 , исключить i^* из M_7 .

29. Если (i^*, \tilde{i}) — тавтология, либо поглощается другим предложением из S , либо (i^*, \tilde{i}) содержит литерал, чистый в S , то если $i^* \in M_7$ и $p_1(i^*) = 1$ перейти к п. 60, иначе к п. 47.

30. Если (i^*, \tilde{i}) не является предложением вида $C_1 \vee C_2$, где C_1 поглощает C_2 , перейти к п. 32.

31. Заменяем (i^*, \tilde{i}) на C_2 . Если при этом дизъюнкция литералов $L_{i'_v} \vee \dots \vee L_{i'_k}$ ($k = 2, 3, \dots$) была заменена на литерал $L_{i'_v}$, то присвоить $L_{i'_v}$ номер i'_v , если для некоторых $\mu = \bar{1}, k$,

$\langle i_{v_\mu}, j \rangle \in M1$, то положить $p_1(i'_{v_\mu}, j) = 1 - (1 - p_{v_1}) * \dots * (1 - p_{v_k})$, где для всех $\mu = \overline{1, k}$

$$p_{v_\mu} = \begin{cases} \tilde{p} * p_1(i_{v_\mu}, j), & \text{если } \langle i_{v_\mu}, j \rangle \in M1, \\ 0 & \text{если } \langle i_{v_\mu}, j \rangle \notin M1, \end{cases}$$

$$p_3(i_{v_\mu}, j) = p_1(i_{v_\mu}, j),$$

$$p_1(i'_{v_\mu}, j) = \begin{cases} p_1(i_{v_\mu}, j) - p_1(i_{v_\mu}, j) & \text{при } p_1(i_{v_\mu}, j) \geq p_1(i'_{v_\mu}, j), \\ 0 & \text{при } p_1(i_{v_\mu}, j) < p_1(i'_{v_\mu}, j). \end{cases}$$

Поместить все пары $\langle i_{v_\mu}, j \rangle \in M1$ в массив M3, пару $\langle i'_{v_1}, j \rangle$ в те группы пар из M1, которые содержат одну из пар $\langle i_{v_\mu}, j \rangle$. Установить соответствие между $\langle i'_{v_1}, j \rangle$ и парами $\langle i_{v_\mu}, j \rangle$. Все пары $\langle i_{v_\mu}, j \rangle$ ($\mu = \overline{1, k}$), для которых $p_1(i_{v_\mu}, j) = 0$ исключить из M1. В массиве M6 заменить номера i_{v_μ} на i'_{v_μ} . Со всеми остальными литералами из C_2 поступаем точно так же как и с литералами в п. 32. Присвоить предложению C_2 номер предложения (i^*, \tilde{i}) . Положить $N_3 = 0$. Перейти к п. 33.

32. Для всех $L_{i'} \in (i^*, \tilde{i})$ и L_j , для которых $\langle i, j \rangle \in M1$

или $\langle j, i, v \rangle \in M1$ полагаем $p_1(i', j) = \tilde{p} * p_1(i, j)$, $p_3(i, j) = p_1(i, j)$, $p_1(i, j) = p_1(i, j) - p_1(i', j)$.

Поместить пару $\langle i, j \rangle$ в массив M3, пару $\langle i', j \rangle$ в те группы пар из M1, которые содержат пару $\langle i, j \rangle$. Установить соответствие между $\langle i, j \rangle$ и парами $\langle i', j \rangle$. Все пары $\langle i, j \rangle$, для которых $p_1(i, j) = 0$, исключить из M1. В массиве M6 заменить номера i на i' . Положить $N_3 = 0$.

33. Если в S нет предложений, поглощаемых последним из образовавшихся предложений, то перейти к п. 35, иначе исключить из S поглощаемое предложение и если $N_3 = 0$, то выполнить с п. 37 по п. 42.

34. Перейти к п. 33.

35. Если в S нет предложений, содержащих чистые в S литералы, то перейти к п. 43, иначе исключить из S предложение с чистым литералом и если $N_3 = 0$, выполнить с п. 37 по п. 42.

36. Перейти к п. 35.

37. Присвоить N_1 номер исключенного предложения.

38. Если предложение с номером N_1 , не содержит литералы, номера которых имеются в массиве M6, перейти к п. 42.

39. Если $N_1 \leq N_6$, положить $N_3 = 1$ и перейти к п. 42.

40. Определяем N_2 такое, что $\langle N_1, N_2 \rangle \in M_6$. Если предложение с номером N_2 принадлежит S , перейти к п. 42.

41. Если $N_2 \leq N_6$, то положить $N_3 = 1$ и перейти к п. 42, иначе положить $N_1 = N_2$ и перейти к п. 40.

42. Пустой оператор.

43. Удалить из M_7 номера литералов, принадлежащие исключенным предложениям.

44. Среди литералов последнего из образовавшихся предложений S выбираем литерал $L_{i'}$, для которого относительно других литералов из $S - \{C\}$, способных с $L_{i'}$ образовать контрапункт (если таких несколько, то среди них выбираем тот, с помощью которого можно образовать резольвенту наименьшей длины) и полагаем

$p_4(i') = \tilde{p} \cdot \frac{1}{l}$. Помещаем i' в M_7 .

45. Если $N_3 = 0$, перейти к п. 15.

46. Выполнить п. 6. Выполнить п. 8. Выполнить п. 15. Перейти к п. 11.

47. Присвоить N_1 номер предложения (i^*, \tilde{i}) .

48. Если в массиве M_4 нет пары $\langle N_1, N_2 \rangle$, где N_2 — некоторый номер, перейти к п. 51.

49. Если предложение с номером N_1 не содержится в S , перейти к п. 50. Если существует такой номер N_3 , не принадлежащий массиву M_5 , что $\langle N_3, N_1 \rangle \in M_4$, перейти к п. 56. Если в предложении с номером N_1 имеется литерал $L(i)$, такой,

что $i \in M_7$, то положить $p_4(i) = \frac{p_4(i)}{1 - p_4(i^*)}$ и перейти к п. 15.

50. Поместить N_1 в M_5 . Исключить из M_5 все номера N_3 , для которых $\langle N_3, N_1 \rangle \in M_4$. Исключить из M_4 все пары $\langle N_3, N_1 \rangle$. Исключить из S предложение с номером N_1 . Поместить N_1 в N_5 и N_2 в N_1 . Перейти к п. 48.

51. Определяем в массиве M_2 пару $\langle i, j \rangle$, соответствующую номеру N_5 .

52. Если $\langle i, j \rangle$ не содержалась в массиве M_1 , то если массив M_7 пуст, перейти к п. 60, иначе к п. 15.

53. Если $\langle i, j \rangle$ имеет в M_3 соответствующую ей пару $\langle i_1, j_1 \rangle$, то исключить из M_3 $\langle i_1, j_1 \rangle$, в те группы пар, где ранее содержалась пара $\langle i, j \rangle$ поместить $\langle i_1, j_1 \rangle$, положить $p_1(i_1, j_1) = p_3(i_1, j_1)$ в массиве M_6 вместо i и j поместить i_1 и j_1 , после чего перейти к п. 15.

54. Если $p_2(i, j) = 1$, перейти к п. 60.

55. Для всех пар $\langle i_1, j_1 \rangle$ из массива M_3 , находящихся ранее в той же группе пар из M_1 , где находилась пара $\langle i, j \rangle$, положить

$$p_3 = (i_1, j_1) =$$

$$42 = \begin{cases} \frac{p_3(i_1, j_1)}{1 - p_2(i, j)} & \text{если в } M_3 \text{ нет пары, соответствующей } \langle i_1, j_1 \rangle, \\ \frac{p_3(i_1, j_1)}{(1 - p_2(i, j))^2} & \text{в } M_3 \text{ есть пара, соответствующая } \langle i_1, j_1 \rangle. \end{cases}$$

Для всех пар $\langle i_1, j_1 \rangle$ из M_1 , находящихся в той же группе пар, где ранее находилась $\langle i, j \rangle$ и таких, что $\langle i_1, j_1 \rangle \in M_3$ положить

$$p_1(i_1, j_1) =$$

$$= \begin{cases} \frac{p_1(i_1, j_1)}{1 - p_2(i, j)} & \text{если в } M_3 \text{ нет пары } \langle i_2, j_2 \rangle, \text{ соответствующей } \langle i_1, j_1 \rangle, \\ \frac{p_1(i_1, j_1)}{(1 - p_2(i, j))^2} & \text{в } M_3 \text{ есть пара } \langle i_2, j_2 \rangle, \text{ соответствующая } \langle i_1, j_1 \rangle. \end{cases}$$

Если в этой группе находится $\langle i_2, j_2 \rangle$, то положить $p_1(i_2, j_2) = p_3(i_2, j_2) - p_1(i_1, j_1)$. Исключить из M_1 все $\langle i, j \rangle \in p_1(i, j) = 0$. Перейти к п. 15.

56. Поместить N_1 в массив M_8 .

57. Определить все пары $N_3 \in M_5$, для которых существует номер $N_1 \in M_8$, такой что $\langle N_3, N_1 \rangle \in M_4$.

58. Из полученных номеров N_3 выбираем те, для которых не существует такого N_4 , что $\langle N_4, N_3 \rangle \in M_4$. Для всех литералов L_i , содержащихся в предложениях с выбранными номерами и для которых $i \in M_7$, положить $p_4(i) = \frac{p_4(i)}{1 - p_4(i^*)}$.

59. Если из полученных в п. 57 номеров выбраны все, перейти к п. 15. Иначе поместить оставшиеся номера вместо старых в массив M_8 и перейти к п. 57.

60. Выдать сообщение «Для решения задачи недостаточно данных» и перейти к п. 62.

61. Выдать решение задачи.

62. Конец.

Ниже приводятся произвольным образом выбранные из работ [2, 3] примеры десяти логических, геометрических и других задач, которые были решены с помощью различных стратегий. Конкретно были решены следующие задачи:

1) [2, с. 242]; 2) [2, с. 239]; 3) [3, с. 90]; 4) задача об обезьяне и бананах [2, с. 225]; 5) [3, с. 211]; 6) [3, с. 245]; 7) [3, с. 109]; 8) [3, с. 113]; 9) [3, с. 114]; 10) [3, с. 220].

Предлагаемой в данной работе стратегий, дополнительных предложений (включая nil) было порождено: в примерах № 1—3, № 2—3, № 3—6, № 4—5, № 5—8, № 6—5, № 7—9, № 8—1, № 9—9, № 10—15.

Стратегией «Предпочтение единичным элементам», использующей понятие «опорного множества», было порождено дополнительных предложений в примере № 1—4, № 2—4 (в обоих случаях получено не самое короткое доказательство), № 3—5, № 4—6, № 5—16, № 6—13, № 7—9, № 8—1, № 9—9.

АФ — стратегией в примере № 1 порождено 11 дополнительных вершин. Модельной стратегией в примере № 2—7 дополнительных вершин.

Стратегий P_1 — опровержение в примере № 1 было порождено 5 дополнительных вершин, № 2—4. Таким образом, предложенная стратегия позволяет при поиске доказательства теоремы строить меньше «лишних» предложений по сравнению с известными стратегиями.

Список литературы: 1. *Ловицкий В. А., Баренбойм М. С.* О стратегиях поиска доказательства теорем в искусственных системах. Сообщение 1. (См. статью в настоящем сборнике). 2. *Нильсон Н.* Искусственный интеллект.— М.: Мир, 1973.—270 с. 3. *Слейгл Дж.* Искусственный интеллект.— М.: Мир, 1973.—319 с.

Поступила 29 февраля 1980 г.