

К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ МЕТОДА МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В работах [1–3] получено матричное уравнение возбуждения замедляющей системы (ЗС) в виде цепочки связанных резонаторов и описана методика расчета его коэффициентов на базе параметров нормальных видов колебаний и бегущих волн. Данное уравнение предназначено для нестационарного и спектрального моделирования СВЧ-приборов методом мгновенных значений [4] и в матричном виде записывается как:

$$\frac{d^2\Gamma}{dt^2} + 2\|\delta_0\| \frac{d\Gamma}{dt} + \|\omega_0\|^2 \Gamma = -\frac{1}{2} \|W_0\|^{-1} \int_V E_0 \frac{\partial j_{exc}}{\partial t} dV \quad (1)$$

(здесь и далее обозначения всех переменных соответствуют принятым в работах [1–3]). Для одномерной ЗС оно может быть представлено в виде системы:

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + 2 \sum_u \delta_{0|u|} \frac{dT_{n+u}}{dt} + \sum_u \omega_{0|u|}^2 T_{n+u} = -\frac{1}{2} \sum_u W^i_{0|u|} \int_V E_{0n+u} \frac{\partial j_{exc}}{\partial t} dV. \quad (2)$$

После того как определены коэффициенты данного уравнения, осуществляется его интегрирование в составе алгоритма моделирования электронного прибора или другой нелинейной электрофизической системы. Для этого необходимо решить несколько относительно самостоятельных задач, к которым относятся: а) расчет единичных структурных функций электрического поля парциальных видов колебаний всех резонаторов ЗС $E_{0n}(x,y,z)$; б) дифференцирование по времени возбуждающего тока $j_{exc}(t,x,y,z)$; в) выбор численного метода решения задачи Коши для приведенного уравнения; г) оценивание гармонических параметров временной функции $T_N(t)$ в выходной ячейке ЗС. Рассмотрим каждую из перечисленных задач в отдельности.

Расчет единичных структурных функций парциальных видов резонаторов. Вычисление структурной функции $E_{0n}(x,y,z)$ заключается в решении уравнения Гельмгольца для парциального вида n -го резонатора ЗС. Решение может быть выполнено двумя способами. Первый, более точный, состоит в численном интегрировании данного уравнения конечно-разностным методом с учетом фактической формы полости n -го резонатора и, по крайней мере, нескольких ближайших к нему ячеек ЗС. Учитывая громоздкость данной задачи, а также то, что слишком высокая точность расчета функции E_{0n} не нужна (поскольку метод мгновенных значений игнорирует ее изменение в полосе частот), на практике целесообразно использовать другой способ. Он заключается в аналитическом решении уравнения Гельмгольца для пространства взаимодействия прибора методом разделения переменных путем разложения составляющих структурной функции в ряды Фурье по продольной координате. В качестве периода разложения выбирается длина ЗС.

Такой подход требует доопределения граничных условий в щели резонатора. В простейшем приближении продольную составляющую напряженности электрического поля можно считать постоянной на всем сечении зазора, граничащем с пространством взаимодействия. Более точное приближение учитывает зависимость этой составляющей от продольной и (в трехмерных моделях приборов М-типа) профильной координаты. При необходимости для указанных моделей можно учесть также наличие профильной компоненты электрического поля в пространстве взаимодействия, создаваемой присутствием торцевых экранов.

Поперечные зависимости компонент рядов Фурье, полученных в качестве решения уравнения Гельмгольца, определяются конструкцией и геометрией конкретной ЗС. Как правило, это линейные комбинации гиперболических или цилиндрических функций. Аргументы

тех и других зависят от частоты колебания ω через постоянную распространения волны в свободном пространстве $k = \omega/c$, где c – скорость света. Поэтому в качестве ω следует брать среднюю частоту полосы пропускания ЗС, либо, как вариант, рабочую частоту прибора (сравни с [3]).

На практике обычно поперечные зависимости в виде цилиндрических функций необходимо вычислять только для нулевой пространственной гармоники, а для остальных их целесообразно заменить аппроксимациями, типичными для квазистатического приближения (см., например, [5]). Дело в том, что расчет цилиндрических функций занимает много процессорного времени, а для порядков, превышающих несколько десятков, он вообще невозможен [6].

Выберем оптимальное количество пространственных гармоник, учитываемых в рядах Фурье. «Одноволновое» приближение, практиковавшееся в ранних работах по моделированию СВЧ-приборов, является слишком грубым, особенно при исследовании процессов вблизи ЗС. Из-за влияния объемного заряда электронный поток является многоскоростным и возможно его взаимодействие с высшими пространственными гармониками волны в ЗС. Учет же излишнего количества членов ряда почти не влияет на точность модели, увеличивая затраты процессорного времени. Это не так важно, если структурные функции вычисляются один раз в начале счета и табулируются. Однако время синтеза структуры поля выступает на первый план и его следует уменьшать даже ценой некоторого снижения точности моделирования в адаптивном методе комплексных амплитуд [7].

Рис. 1 иллюстрирует влияние количества учитываемых членов ряда Фурье на форму азимутальных зависимостей составляющих единичной структурной функции парциального вида колебания резонатора ЗС цилиндрического прибора М-типа на уровне торцов ламелей. Цифрой 1 обозначена азимутальная зависимость радиальной составляющей структурной функции, цифрой 2 – аналогичная зависимость ее азимутальной составляющей. Угловая ширина зазора резонатора θ составляет $\pi/10$ рад. График (а) построен путем суммирования пространственных гармоник с номерами $-20 \dots +20$ (т.е. одной пары полуволн функции $\sin(x)/x$). Графики (б) и (в) построены при учете двух и четырех пар полуволн (гармоник с номерами $-40 \dots +40$ и $-80 \dots +80$) соответственно. Видно, что в последнем случае обеспечивается форма зависимости азимутальной составляющей поля, достаточно близкая к прямоугольной, следовательно, большее количество членов ряда суммировать нет необходимости. Поскольку

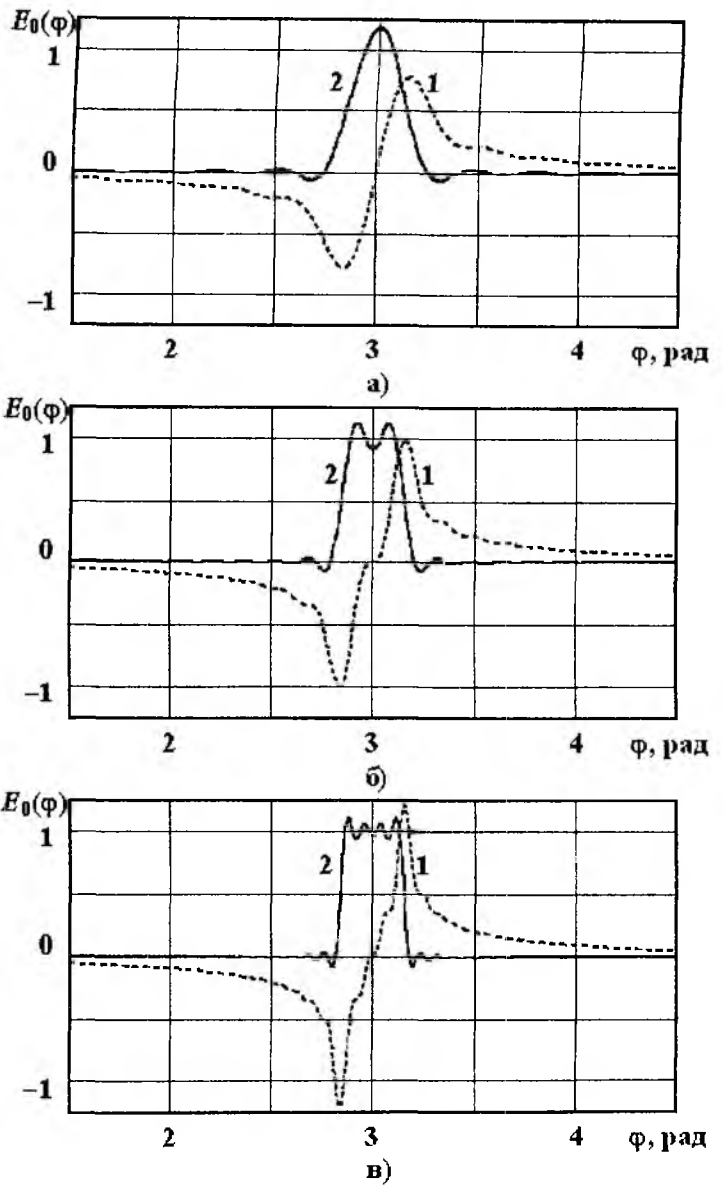


Рис. 1

высшие пространственные гармоники быстро затухают при удалении от ЗС, оптимальный наивысший номер учитываемой гармоники можно считать равным $(4 \dots 8)\pi/\theta$.

Дифференцирование возбуждающего тока. В моделях макрочастиц дифференцировать возбуждающий ток для каждой точки пространства взаимодействия прибора в лагранжевых переменных практически невозможно. Избежать перехода к эйлеровым координатам позволяет тот факт, что под интегралом в правой части уравнений (1) и (2) от времени зависит только функция j_{exc} . Поменяв местами интегрирование по объему и дифференцирование по времени, получим следующую форму уравнения возбуждения:

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + 2 \sum_u \delta_{0|u|} \frac{dT_{n+u}}{dt} + \sum_u \omega_{0|u|}^2 T_{n+u} = -\frac{1}{2} \sum_u W^i_{0|u|} \frac{dI_{n+u}}{dt}, \quad (3)$$

где $I_n(t)$ – мгновенное значение интеграла возбуждения для n -й ячейки:

$$I_n(t) = \int_V E_{0n}(x, y, z) j_{exc}(t, x, y, z) dV.$$

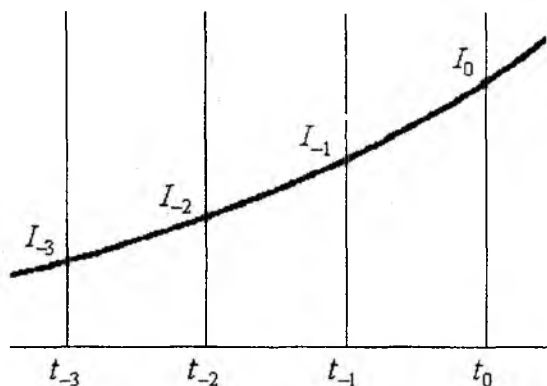


Рис. 2

В работе [8] для нахождения производной от I_n предложено использовать линейную регрессионную модель. Практика последующих расчетов показала, что даже незначительное запаздывание значения производной, создаваемое сглаживанием по времени, приводит к дополнительному нефизическому сдвигу фаз между возбуждающим током и высокочастотным полем в резонаторе. Поэтому вместо аппроксимации дискретных мгновенных значений интеграла возбуждения следует использовать их интерполяцию. Степень интерполирующего полинома может быть различной. Линейная интерполяция обеспечивает недостаточную точ-

ность, оптимальной является квадратичная или кубическая. Остановимся на последней.

Проведем кубическую параболу через четыре точки дискретной функции $I_l = I(t_l)$, где $t_l = l\Delta t$; $l = 0, -1, -2, -3$; Δt – временной шаг модели (рис. 2). Время t отсчитываем от текущего момента ($t_0 = 0$). Интерполирующий полином имеет вид:

$$I(t) = a_0 + a_1 \left(\frac{t}{\Delta t} \right) + a_2 \left(\frac{t}{\Delta t} \right)^2 + a_3 \left(\frac{t}{\Delta t} \right)^3. \quad (4)$$

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 и a_3 находятся из мгновенных значений интеграла возбуждения $I_0, I_{-1}, I_{-2}, I_{-3}$ путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = I_0, \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = I_{-1}, \\ a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = I_{-2}, \\ a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = I_{-3}. \end{cases}$$

Дифференцируя полином (4) и подставляя в него найденные значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 , окончательно получаем:

$$\frac{dI(t_0)}{dt} = \frac{1}{6\Delta t} (11I_0 - 18I_{-1} + 9I_{-2} - 2I_{-3}). \quad (5)$$

Выбор метода интегрирования уравнения возбуждения. Интегрирование уравнения возбуждения (3) является типичной начальной задачей (задачей Коши). Оно выполняется численным методом с шагом дискретизации Δt , равным временному шагу модели. Целесообразно использовать многошаговый метод «прогноз-коррекция». На каждом l -м временном интервале значение функции T_n корректируется на момент начала текущего шага t_l , затем прогнозируется на момент его окончания t_{l+1} . В течение шага интегрирования скорректированное и прогнозируемое значения используются в четырехмерном методе сглаживания полей [9] для расчета правой части уравнения движения макрочастиц.

Большинство известных многошаговых методов решения задачи Коши работают с уравнениями первого порядка. Поэтому уравнение (3) путем введения дополнительной переменной $T'_n(t) = dT_n(t)/dt$ преобразуем в систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dT_n}{dt} = T'_n, \\ \frac{dT'_n}{dt} = -2 \sum_u \delta_{0|u|} T'_{n+u} - \sum_u \omega_{0|u|}^2 T_{n+u} - \frac{1}{2} \sum_u W^i_{0|u|} \frac{dI_{n+u}}{dt}. \end{cases} \quad (6)$$

Поскольку моделирование СВЧ-прибора обычно начинают из его «холодного» состояния, вычисление разгонных точек для многошагового метода не составляет труда. Значения T_n и T'_n на первых шагах полагаются равными нулю. Основное внимание следует уделить выбору конкретного численного метода интегрирования системы (6).

В работе [8] описаны первые попытки использования уравнения возбуждения второго порядка при моделировании магнетронных автогенераторов. Эта работа имеет приоритетный характер, однако некоторые ее выводы не отвечают современным требованиям. В частности, выбранные там и признанные годными методы интегрирования уравнения возбуждения на самом деле не обеспечивают необходимую на сегодняшний день точность расчета высокочастотных полей.

Внедрение в практику моделирования новых алгоритмов интерполяции полей, таких как четырехмерный метод PWS [9], позволяет повысить корректность анализа электронных потоков. Относительный дисбаланс подводимой и рассеиваемой мощности в магнетронном диоде снижается до величин порядка десятых долей процента. В то же время использование для решения уравнения возбуждения второго порядка любого из предложенных в работе [8] методов не дает возможности уменьшить этот дисбаланс в генерирующем магнетроне ниже нескольких процентов. Таким образом, точность решения уравнения (3) следует повысить.

Из двух способов уменьшения погрешностей при численном интегрировании (переход к методу более высокого порядка и применения итераций в процессе коррекции) предпочтение, по-видимому, следует отдать второму. Методы пятого и более высоких порядков мало исследованы, в том числе на предмет устойчивости конкретных схем. Поэтому остановимся на классической формуле Адамса-Башфорта четвертого порядка [10] с шагом прогноза:

$$f_{l+1} = f_l + \frac{1}{24} \left(55 \frac{df_l}{dt} - 59 \frac{df_{l-1}}{dt} + 37 \frac{df_{l-2}}{dt} - 9 \frac{df_{l-3}}{dt} \right) \Delta t,$$

этапом вычисления правой части и несколькими итеративными шагами коррекции значения функции и правой части:

$$f_{l+1} = f_l + \frac{1}{24} \left(9 \frac{df_{l+1}}{dt} + 19 \frac{df_l}{dt} - 5 \frac{df_{l-1}}{dt} + \frac{df_{l-2}}{dt} \right) \Delta t.$$

В работе [11] указано, что в конце итераций имеет смысл еще раз скорректировать значение правой части уравнения для использования его на следующих временных шагах (так называемая схема P(EC)^mE).

В результате экспериментального подбора оптимального количества этапов коррекции установлено, что оно лежит в пределах трех – четырех. При одной – двух коррекциях точность решения еще недостаточна, а увеличение числа итераций свыше четырех незначительно увеличивает точность, наращивая в то же время ошибки округления. Это соответствует данным, приведенным в книге [12], согласно которым погрешность убывает только до тех пор, пока количество итераций коррекции не превышает порядка метода.

Остановимся на схеме Р(ЕС)³Е. При временном шаге Δt , равном $1/32$ периода колебания, дисбаланс мощностей в генерирующем магнетроне для этой схемы не превышает одного процента. Уменьшение шага вплоть до $1/256$ периода сигнала не обнаруживает неустойчивостей, связанных с накоплением ошибок округления. В то же время при временном шаге, равном $1/16$ периода колебания, погрешность интегрирования системы (6) недопустимо возрастает. Учитывая, что в этом случае даже при четырех итерациях коррекции погрешность не снижается до допустимых значений, можно сделать вывод: схема Р(ЕС)³Е является оптимальной, а размер временного шага при решении уравнения возбуждения для метода мгновенных значений не должен превышать $1/32$ периода колебания.

Оценивание гармонических параметров временной функции. Как показано в работе [4], гармонический анализ получаемой при решении уравнений возбуждения (1) и (2) дискретной временной функции $T_l = T(t_l)$ для последнего (N -го) резонатора ЗС в общем случае следует производить с помощью какой-либо параметрической модели, например исходного или модифицированного метода Прони [13]. Однако эти алгоритмы требуют много процессорного времени и недостаточно статистически устойчивы (робастны). Если функция T_N заведомо близка к гармонической (например, для магнетрона), можно уменьшить порядок модели до единицы. Тогда исходный метод Прони с разложением по незатухающим комплексным экспонентам вырождается в задачу гармонической интерполяции дискретной функции на трех точках, которая имеет простое аналитическое решение. Нетрудно видеть, что с учетом неизбежности ошибок округления, наибольшую точность определения всех гармонических параметров (частоты, амплитуды и фазы) можно получить на экстремуме интерполируемой квазигармонической зависимости.

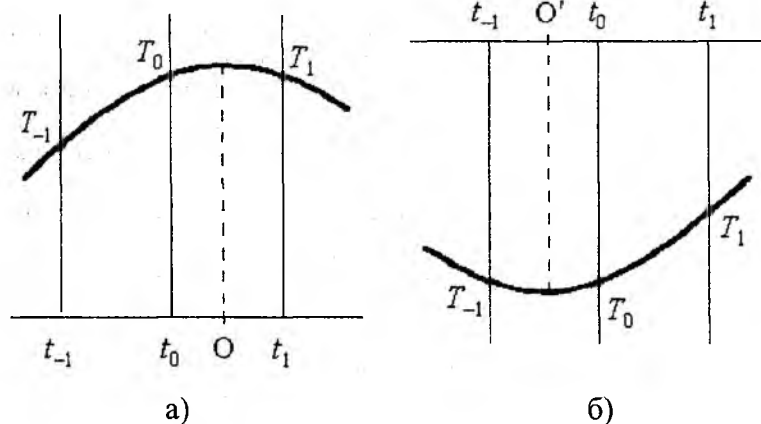


Рис. 3

Проведем через три точки дискретной функции T_l в области ее экстремума отрезок косинусоиды (рис. 3а,б). Присвоим локальному максимуму дискретной функции индекс $l=0$, а окружающим его соседним моментам дискретизации – индексы -1 и 1 . Время t отсчитываем от максимума интерполирующей косинусоиды (точки O), считая начальную фазу ее равной нулю. Система уравнений, связывающих неизвестные частоту интер-

полирующей функции ω , ее амплитуду T_m и временную координату нулевого узла t_0 с известными значениями дискретной функции T_{-1} , T_0 , T_1 в узлах, запишется в виде:

$$\begin{cases} T_m \cos(\omega t_0 - \omega \Delta t) = T_{-1}, \\ T_m \cos(\omega t_0) = T_0, \\ T_m \cos(\omega t_0 + \omega \Delta t) = T_1. \end{cases}$$

В результате решения этой системы получаем:

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \arccos \frac{T_{-1} + T_1}{2T_0}, \quad (7)$$

$$T_m = 2|T_0| \sqrt{\frac{T_0^2 - T_{-1}T_1}{4T_0^2 - (T_{-1} + T_1)^2}}, \quad (8)$$

$$\omega t_0 = -\operatorname{arctg} \frac{|T_1| - |T_{-1}|}{\sqrt{4T_0^2 - (T_{-1} + T_1)^2}}. \quad (9)$$

Как видно из рис. 3б, если функция интерполируется в области ее локального минимума (точки O'), к фазе ωt_0 в формуле (9) необходимо прибавить π .

Выражения (7) – (9) позволяют определить гармонические параметры (частоту, амплитуду, фазу) дискретной функции в предположении, что она действительно имеет квазигармонический характер. Эти формулы являются точными в том смысле, что в отсутствие ошибок округления, при приближении исходной временной функции $T(t)$ к гармонической, погрешности расчета частоты, амплитуды и фазы неограниченно уменьшаются. Если же форма зависимости $T(t)$ далека от гармонической, выражения (7) – (9) дают некорректные результаты. Поэтому для широкополосных систем вышеописанную методику можно применять лишь при условии периодического контроля спектра выходного сигнала параметрическим методом с достаточно высоким порядком модели.

Таким образом, рассмотрены главные особенности методики интегрирования полученного в работах [1–3] матричного уравнения возбуждения замедляющей системы в виде цепочки связанных резонаторов. Это уравнение является одним из основных при спектральном моделировании СВЧ-приборов методом мгновенных значений. Предложенные алгоритмы не являются единственно возможными, т.е. вместо них, в принципе, могут быть использованы другие с аналогичными или более высокими качественными показателями. Однако описанные здесь методы проверены на практике и обеспечивают достаточную точность моделирования приборов со скрещенными полями.

Список литературы: 1. Грицунов А.В. К выводу уравнения возбуждения цепочки связанных резонаторов для метода мгновенных значений // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 121. С. 156 – 162. 2. Грицунов А.В. К расчету коэффициентов матричного уравнения возбуждения резонаторной замедляющей системы // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 124. С. 16 – 23. 3. Грицунов А.В. К решению матричного уравнения возбуждения резонаторной замедляющей системы // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 125. С. 101 – 105. 4. Gritsunov A.V. On Spectral Modeling of Microwave Devices // Telecomm. and Radio Engineering. 2001. V. 55, No. 8. P. 98 – 102. 5. Магнетроны сантиметрового диапазона. Т. 1 / Под ред. С.А. Зусмановского. М.: Сов. радио, 1950. 420 с. 6. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. К.: Наук. думка, 1984. 599 с. 7. Грицунов А.В. Адаптивный метод комплексных амплитуд в спектральных моделях СВЧ-приборов // Материалы междунар. конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии». Севастополь: «Вебер». 2001. С. 224 – 227. 8. Грицунов А.В., Галаган А.В. Об использовании уравнения возбуждения второго порядка при моделировании автогенераторов со скрещенными полями // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 8. С. 1719 – 1722. 9. Gritsunov A.V. About Simulation of Fields in Large Particles Model // Proc. SBMO/IEEE MTT-S Int. Microwave and Optoelectronics Conf. Natal (Brazil). 1997. P. 517 – 519. 10. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. М.: Мир, 1982. 238 с. 11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моултер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с. 12. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: МП "РАСКО", 1991. 272 с. 13. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.03.2002