УДК 519.81

ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ ЧАСТНЫХ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

ПЕТРОВ Э. Г., БЕСКОРОВАЙНЫЙ В.В., ПИСКЛАКОВА В.П.

Предложен вид универсальной функции полезности частных критериев для процедур выбора решений, что позволяет реализовать линейные и нелинейные (включая комбинированные) зависимости от значений частного критерия. Ее использование сводит необходимость формирования множества оригинальных функций полезности частных критериев к решению обычной задачи параметрической идентификации предложенной функции.

Введение и постановка задачи. В процессе принятия решений, при решении задач выбора и оптимизации возникает необходимость всесторонней оценки качества альтернативных вариантов. Качество вариантов $x \in X$ оценивается множеством частных критериев $k_1(x)$, $k_2(x)$, ..., $k_n(x)$. Один из основных подходов к решению задачи многокритериального оценивания предполагает формирование обобщенной оценки полезности (ценности) $\xi(x)$ для каждого из допустимых решений $x \in X$ [1]. Как правило, такая оценка формируется на основе аддитивной или мультипликативной схемы с использованием функций полезности (ФП) частных критериев $\xi_i(k_i(x)), i=\overline{1,n}$. При этом ФП частных критериев должны удовлетворять ряду требований [2,3]: быть монотонными и безразмерными; иметь одинаковый диапазон изменения [0,1]; быть инвариантными к виду экстремума; позволять реализовать как линейную, так и характерные нелинейные зависимости от значения критерия. Также желательно, чтобы ФП всех частных критериев имели бы один и тот же вид и различались только значениями параметров. Последнее позволило бы свести сложные задачи формирования ФП для всех частных критериев к решению задач их параметрической идентификации.

Задача заключается в обосновании вида универсальной ФП частных критериев, пригодной для оценивания альтернатив в различных ситуациях выбора, и разработке процедур выбора значений (идентификации) ее параметров. Выбор вида универсальной ФП. Простейшей функцией полезности является линейная, представляющая собой разновидность преобразования функции цели [4]:

$$\omega(k_i) = \frac{k_i - k_{iнх}}{k_{iнл} - k_{iнх}}, \qquad (1)$$

где $k_i(x)$ – текущее значение i-го частного критерия; $k_{iнл}, k_{iнх}$ – наилучшее и наихудшее значения i-го критерия на допустимой области изменения i-го показателя $x \in X$.

Среди функций, удовлетворяющих основным требованиям и допускающих реализацию как линейных, так и нелинейных зависимостей, можно выделить ФП вида [3]:

$$\xi_i(k_i) = \left(\frac{k_i - k_{iнх}}{k_{iнл} - k_{iнх}}\right)^{\alpha i}, \qquad (2)$$

где – α_i коэффициент, определяющий вид зависимости. При $\alpha_i = 1$ получаем линейную зависимость, при $0 < \alpha_i < 1$ – выпуклую вверх, при $\alpha_i > 1$ – выпуклую вниз зависимости (рис.1). Эти формы отражают безразличие, уклонение и стремление к риску лица, принимающего решения [5].

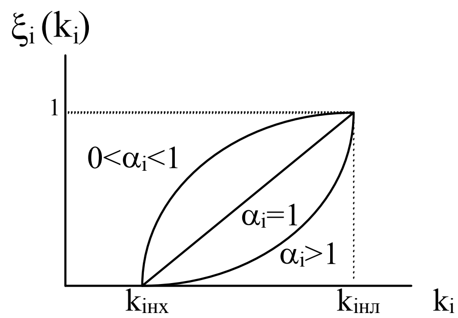

Рис. 1. Зависимость ФП (2) от значений α_i

Недостатком, ограничивающим использование ФП вида (2), является невозможность непосредственного отображения комбинированных зависимостей, включающих участки вогнутости, линейности (квазилинейности) и выпуклости (выпуклости, линейности и вогнутости). Примером подобных зависимостей могут служить S – образные эволюционные кривые, отражающие развитие эффективности различного рода систем.

Для отображения S – образных зависимостей может быть использована ФП, построенная на основе функции Гаусса:

$$\xi_i(k_i) = b \cdot e^{-\frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_{iнх})^2}{c}}, \qquad (3)$$

где – $\bar{k}_i = \omega(k_i)$, $\bar{k}_{iнх} = \omega(k_{iнх})$; b и c – коэффициенты, определяющие форму зависимости.

При этом $b = e^{\frac{1}{c}}$, $c > 0$, а $k_{iнх} \le k_i \le k_{iнл}$ или $k_{iнл} \le k_i \le k_{iнх}$. С увеличением значения c зависимость (3) становится более пологой, точка изгиба смещается в сторону $k_{iнх}$, а функция становится практически выпуклой. Основной недостаток ФП такого вида – различная степень приближения ее значений к нулю при $k_i \to k_{iнх}$, зависящая от диапазона изменения частного критерия.

Свободной от указанных выше недостатков является ФП, построенная на основе функции вида (2) [6]. Для $k_i \to \max$ она имеет вид

$$\xi_i(k_i) = \begin{cases} a \cdot \left(\frac{k_i - k_{iнх}}{k_{ia} - k_{iнх}}\right)^{\alpha_{1i}}, & \text{если } k_{iнх} \le k_i \le k_{ia}, \\ a + (1-a) \cdot \left(\frac{k_i - k_{ia}}{k_{iнл} - k_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}}, & \text{если } k_{ia} < k_i \le k_{iнл}, \end{cases} \qquad (4)$$

где k_{ia} , a – координаты точки перегиба ФП, $k_{iнх} \le k_{ia} \le k_{iнл}$, $0 \le a \le 1$, α_{1i}, α_{2i} – коэффициенты, определяющие вид зависимости соответственно на начальном и конечном отрезках.

Такая функция монотонна и непрерывна на всей области определения $k_{iнх} \le k_i \le k_{iнл}$. Изменяя значения параметров $a \in [0,1]$, $k_{ia} \in [k_{iнх}, k_{iнл}]$, $\alpha_{1i} > 0$, $\alpha_{2i} > 0$, можно получить требуемый вид комбинированной зависимости (рис. 2).

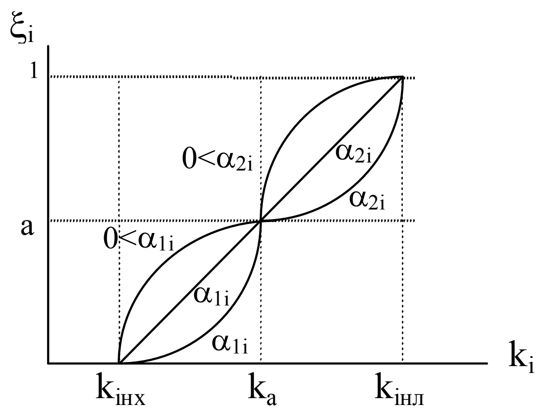

Рис. 2. Зависимость ФП (4) от параметров

Для $k_i \to \min$ соответствующее выражение может быть представлено в виде

$$\xi_i(k_i) = \begin{cases} a + (1-a)\cdot\left(\dfrac{k_i - k_{iнл}}{k_{ia} - k_{iнл}}\right)^{\alpha_{1i}}, \text{если } k_{iнл} \le k_i \le k_{ia}, \\ a\cdot\left(\dfrac{k_i - k_{ia}}{k_{iнх} - k_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}}, \text{если } k_{ia} < k_i \le k_{iнх}. \end{cases} \qquad (5)$$

В частных случаях при a = 1, $k_{ia} = k_{iнл}$ или a = 0, $k_{ia} = k_{iнх}$ зависимость (4) трансформируется к (2), а при a = 0, $k_{ia} = k_{iнх}$ или a = 1, $k_{ia} = k_{iнл}$ зависимость (5) эквивалентна (2).

Воспользовавшись преобразованием (1), определим значения $\bar{k}_i = \omega(k_i), \bar{k}_{ia} = \omega(k_{ia})$, $\bar{k}_{iнх} = \omega(k_{iнх}) = 0,\ \ \bar{k}_{iнл} = \omega(k_{iнл}) = 1.$

С учетом этого ФП, определяемая выражениями (4) и (5), может быть представлена в виде

$$\xi_i(k_i) = \begin{cases} a\cdot\left(\dfrac{\bar{k}_i}{\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{1i}}, \text{если } 0 \le \bar{k}_i \le \bar{k}_{ia}, \\ a + (1-a)\cdot\left(\dfrac{\bar{k}_i}{1-\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}}, \text{если } \bar{k}_{ia} < \bar{k}_i \le 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Основной проблемой при практическом использовании универсальной ФП вида (6) является выбор значений ее параметров.

Выбор значений параметров α_{1i}, α_{2i}. Основным источником информации для выбора значений параметров α_{1i} и α_{2i} являются эксперты. При этом данные для идентификации параметров ФП могут быть получены путем анализа предпочтений и безразличия лица, принимающего решения, на множестве допустимых альтернатив X. Предположим, что экспертным или каким-либо другим путем удалось определить для ряда значений частного критерия $k_{i1} = k_i(x_1)$, $k_{i2} = k_i(x_2)$, ..., $k_{im} = k_i(x_m)$ значения его ФП $\tilde{\xi}_{i1} = \xi_i(k_{i1})$, $\tilde{\xi}_{i2} = \xi_i(k_{i2})$, ..., $\tilde{\xi}_{im} = \xi_i(k_{im})$, включая координаты точки перегиба (k_{ia}, a). Выполним преобразование (1): $\bar{k}_{ij} = \omega(k_{ij}),\ j = \overline{1,m},\ \ \bar{k}_{ia} = \omega(k_{ia}).$

Выбор наилучших значений параметров α_{1i} и α_{2i} может быть осуществлен по методу наименьших квадратов. При этом желательной является минимизация сумм квадратов отклонений на каждом из участков ФП:

$$R_1 = \sum_{j=1}^{m_1}\left[a\cdot\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{1i}} - \tilde{\xi}_{ij}\right]^2 \to \min_{\alpha_{1i}}, \qquad (7)$$

$$R_2 = \sum_{j=m_1}^{m}\left[a + (1-a)\cdot\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{1-\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}} - \tilde{\xi}_{ij}\right]^2 \to \min_{\alpha_{2i}},$$

где m_1 – объем исходных данных для первого участка ФП; m – общий объем данных.

Задача (7) может быть разбита на две задачи $R_1 \to \min\limits_{\alpha_{1i}}$ и $R_2 \to \min\limits_{\alpha_{2i}}$, связанные параметрами $\bar{k}_{ia}$ и a. Наилучшие значения параметров α_{1i} и α_{2i} в смысле (7) определяются из условий $\dfrac{\partial R_1}{\partial \alpha_{1i}} = 0$ и $\dfrac{\partial R_2}{\partial \alpha_{2i}} = 0$:

$$\sum_{j=1}^{m_1}\left[a\cdot\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{1i}} - \tilde{\xi}_{ij}\right]\cdot a\cdot\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{1i}}\cdot\ln\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{\bar{k}_{ia}}\right) = 0,$$

$$\sum_{j=m_1}^{m}\left[a + (1-a)\cdot\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{1-\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}} - \tilde{\xi}_{ij}\right]\times \qquad (8)$$

$$\times(1-a)\cdot\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{1-\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}}\cdot\ln\left(\frac{\bar{k}_{ij}}{1-\bar{k}_{ia}}\right) = 0.$$

Каждая из задач системы (7) может решаться независимо и ее решение сводится, таким образом, к решению одного из нелинейных уравнений (8).

Выбор значений параметров k_{ia}, a. Предположим, что для множества преобразованных значений критерия $\bar{k}_{i1} = \bar{k}_i(x_1)$, $\bar{k}_{i2} = \bar{k}_i(x_2)$,..., $\bar{k}_{im} = \bar{k}_i(x_m)$ известны значения ФП $\tilde{\xi}_{i1} = \xi_i(\bar{k}_{i1})$, $\tilde{\xi}_{i2} = \xi_i(\bar{k}_{i2})$, ..., $\tilde{\xi}_{im} = \xi_i(\bar{k}_{im})$.

Выбор значений параметров связи k_{ia} и a может быть выполнен только совместно с решением задач (7). Такая общая задача с использованием аппроксимации по методу наименьших квадратов имеет вид

$$R = \sum_{j=1}^{m}\left[\xi_i(\bar{k}_{ij}) - \tilde{\xi}_{ij}\right]^2 \to \min_{\alpha_{1i},\alpha_{2i},k_{ia},a}. \qquad (9)$$

Для решения задачи (9) может быть использован метод, базирующийся на методе решения задачи (7). Суть его состоит в следующем. Необходимо выполнить упорядочение данных по возрастанию значений частного критерия k_i и выделить на них подмножества, соответствующие начальному $D_{кн} = \{\bar{k}_{ij}\}$, $D_{\xi н} = \{\tilde{\xi}_{ij}\}$ и конечному $D_{кк} = \{\bar{k}_{ij}\}$, $D_{\xi к} = \{\tilde{\xi}_{ij}\}$ участкам ФП с характерными нелинейностями. Выберем в качестве начальных координат точки перегиба ФП значения:

$$\tilde{k}_{ia} = (\sup D_{кн} + \inf D_{кк})/2,$$
$$\tilde{a} = (\sup D_{\xi_н} + \inf D_{\xi к})/2. \quad (10)$$

Окончательные значения параметров k_{ia} и a определяются путем решения задачи (9) в окрестности точки $(\tilde{k}_{ia}, \tilde{a})$. В частности, это может быть сведено к решению множества задач (7) на сетке в области, задаваемой сегментами

$$[\sup D_{кн}, \quad \inf D_{кк}], [\sup D_{\xi н}, \quad \inf D_{\xi к}].$$

В случае, когда точки, соответствующие исходным данным, расположены вдоль прямой функции преобразования (1), полученные решения будут соответствовать (6) при $\bar{k}_{ia} = \bar{k}_{iнх}$, a=0 или $\bar{k}_{ia} = k_{iнл}$, $a = 1$.

Если для оптимизации ФП будут использованы градиентные методы, то необходимо, чтобы ФП была дифференцируемой в каждой точке интервала определения. В общем случае ФП вида (6) не является дифференцируемой в точке склейки $(\bar{k}_{ia}, a)$. Устранить этот недостаток можно, выполнив склейку с помощью кубического сплайна [7,8]:

$$S(\bar{k}_i) = \frac{(\bar{k}_{i,l+1} - \bar{k}_i)^2 \left[2(\bar{k}_i - \bar{k}_{il}) + h\right]\xi_{il}}{h^3} + \frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_{il})^2 \left[2(\bar{k}_{i,l+1} - \bar{k}_i) + h\right]\xi_{i,l+1}}{h^3} + \frac{(\bar{k}_{i,l+1} - \bar{k}_i)^2 (\bar{k}_i - \bar{k}_{il}) m_l}{h^2} + \frac{(\bar{k}_i - \bar{k}_{il})^2 (\bar{k}_i - k_{i,l+1}) m_{l+1}}{h^2}, \quad (11)$$

где $\bar{k}_{il}$, $\bar{k}_{i,l+1}$ – узлы интерполяции, $\bar{k}_{il} = \sup D_{кн}$; $k_{i\,l+1} = \inf D_{кк}$; $\xi_{il}, \xi_{i,l+1}$ – значения ФП (6) в узлах интерполяции $\bar{k}_{il}, \bar{k}_{i,l+1}$; h – длина отрезка интерполяции, $h = \bar{k}_{i,l+1} - \bar{k}_{il}$; m_l, m_{l+1} – наклоны сплайна в узлах $\bar{k}_{il}$, $k_{i,l+1}$, значения которых могут быть определены решением системы уравнений:

$$m_l = -\frac{m_{l+1}}{2} + \frac{3}{2}\frac{\xi_{i,l+1} - \xi_{il}}{h} - \frac{h}{4}\xi_i''(\bar{k}_{il}),$$
$$m_{l+1} = -\frac{m_l}{2} + \frac{3}{2}\frac{\xi_{i,l+1} - \xi_{il}}{h} - \frac{h}{4}\xi_i''(\bar{k}_{i,l+1}).$$

Использование сплайн-склейки (11) не ухудшает качества решения задачи приближения (7) и делает универсальную ФП частных критериев

$$\xi_i(k_i) = \begin{cases} a \cdot \left(\dfrac{\bar{k}_i}{\bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{1i}}, & \text{если } \bar{k}_{iнх} \le \bar{k}_i \le \bar{k}_{il}, \\ S(\bar{k}_i), & \text{если } \bar{k}_{il} < \bar{k}_i \le \bar{k}_{i,l+1}, \\ a + (1-a) \cdot \left(\dfrac{\bar{k}_i}{1 - \bar{k}_{ia}}\right)^{\alpha_{2i}}, & \text{если } \bar{k}_{i,l+1} < \bar{k}_i \le \bar{k}_{iнл} \end{cases} \quad (12)$$

дифференцируемой на всей области изменения частного критерия $[\bar{k}_{iнх}, \quad \bar{k}_{iнл}]$.

ФП (6) и (12) являются монотонными и непрерывными на области изменения частного критерия, они безразмерны и инвариантны к виду экстремума, изменяются в диапазоне от 0 до 1, позволяют реализовать как линейные, так и нелинейные зависимости всех практически интересных видов.

Заключение. Рассмотрены виды ФП частных критериев, используемых в задачах многокритериального оценивания. Каждая из функций позволяет реализовать один или несколько видов характерных зависимостей: линейную; линейную, выпуклую и вогнутую; выпуклую и S – образную.

Предложен вид универсальной ФП, удовлетворяющей всем требованиям и позволяющей реализовать линейные, выпуклые, комбинированные с участками вогнутости и выпуклости (выпуклости и вогнутости) зависимости от значений частного критерия. Ее использование в ситуациях оценивания сводит задачу формирования ФП к задаче оптимизации ее параметров. Разработан метод идентификации параметров универсальной ФП.

Благодаря возможности реализации комбинированных зависимостей, предложенная ФП позволит более адекватно формализовать процессы многокритериального оценивания и выбора решений долгосрочного планирования, управления, автоматизированного проектирования. Частные случаи ФП: (6), (12) в виде (2) применяются в процедурах принятия решений и оптимизации [9,10].

Литература: 1. *Теория выбора и принятия решений* / И.М.Макаров, Т.М.Виноградская, А.А.Рубинский, В.Б.Соколов. – М.: Наука.– 1982. – 328 с. 2. *Вилкас Э.Й.* Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука.– 1990. – 256 с. 3. *Петров Э.Г.* Организационное управление городом и его подсистемами (методы и алгоритмы).– Харьков: Вища школа.– 1986. – 144 с. 4. *Михалевич В.С., Волкович В.Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. – М.: Наука.– 1982. – 288 с. 5. *Кини Р.* Теория принятия решений. В кн.: Исследование операций /Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. Т.1. Методологические основы и математические методы. – М.: Мир.– 1981.– С. 481-512. 6. *Бескоровайный В.В.* Об универсальной функции полезности для процедур выбора решений. 3-я Международная конференция «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». Тез. докл. /ХТУРЭ, Харьков-Туапсе.– 1997.– С. 280. 7. *Гребенников А.И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та.– 1983. – 208 с. 8. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука.– 1987. – 248 с. 9. *Петров Э.Г., Писклакова В.П., Бескоровайный В.В.* Территориально распределенные системы обслуживания. – Киев: Техника.– 1992. – 208 с. 10. *Petrov, E, Beskorovainyi, V.* Entscheidungsfindung unter Bedingungen der Unbestimmtheit der Ziele. 39. Inter . Wis. Kol.: TU Ilmenau, 1994, B.3.– S. 208-211.

Поступила в редколлегию 05.12.97

Петров Эдуард Георгиевич, профессор, д-р техн. наук, зав. кафедрой системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, теория принятия решений. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

Бескоровайный Владимир Валентинович, канд. техн. наук, доцент кафедры системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: структурный синтез, планирование и управление территориально распределенных систем обслуживания. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

Писклакова Валентина Петровна, ст. науч. сотр., канд. техн. наук, директор ЦИОУ ХТУРЭ. Научные интересы: информатизация процессов управления. Адрес: 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 30-24-29.