

Д. С. ГАВВА

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ПРОВОЛОЧНЫХ ИЗЛУЧАЮЩИХ СТРУКТУР

Освоение миллиметрового диапазона волн вызвало резкий рост требований, касающихся мобильности, функциональных возможностей и массогабаритных показателей радиотехнических систем. В связи с этим в последние годы весьма широко начали применяться функциональные устройства, в частности активные интегрированные антенны (АИА).

Объединение сосредоточенных нелинейных схем с излучающими устройствами, применение в антеннах и трактах СВЧ материалов с распределенной нелинейностью (например, высокотемпературных сверхпроводников) дает ряд преимуществ в сравнении со стандартными антеннами, особенно в СВЧ диапазоне [1], что позволяет уменьшить потери в антенных комплексах, повысить их чувствительность за счет снижения уровня внутренних шумов, повысить КПД приемопередатчиков, расширить полосу рабочих частот. Применение таких антенн дает возможность решить ряд важных задач: усиление, генерация и выпрямление сигнала, сложение мощности в пространстве и т.д. Однако, помимо положительных качеств, данные антенны обладают и вредными нелинейными эффектами, например побочным излучением, влияющим на электромагнитную обстановку.

Принцип физической интеграции, который лежит в основе таких устройств, предполагает при их исследовании и проектировании комплексный подход, основанный на элементной целостности проектируемого устройства, т.е. на исследовании его свойств как единой системы, выполняющей законченную в функциональном отношении операцию.

В связи с этим актуальной считается задача создания математического аппарата всестороннего анализа характеристик АИА с сосредоточенными и распределенными нелинейными элементами. Одним из типов АИА, широко применяемых на практике, являются проволочные антенны как с сосредоточенными нелинейными элементами (НЭ), так и с нелинейным поверхностным импедансом (НПИ), в частности антенны из высокотемпературных сверхпроводников. Для тонкопроволочных антенн с НПИ и, как частный случай, для проволочных антенн с сосредоточенными НЭ, на основе нелинейных граничных условий была разработана модель, представляющая собой соединение линейного и нелинейного многополюсников, создан алгоритм анализа таких антенн, получены математические выражения, описывающие проволочные антенны произвольной конфигурации с НПИ, а также предложен выбор систем базисных и весовых функций для созданного алгоритма анализа [2 – 4].

Несмотря на значительный объем проделанной работы в направлении исследования проволочных антенн произвольной конфигурации с НПИ, нерассмотренным остался вопрос учета в нелинейной части модели таких антенн, формы поперечного сечения проводников.

Цель статьи – конкретизировать вид нелинейной части уравнений, описывающих антенну, то есть получить выражения для нелинейной части интегрального оператора (по сути параметров некоторого усредненного НЭ в модели антенны) относительно распределения полного тока вдоль проводников, с учетом различной формы поперечного сечения проводников.

### Постановка задачи и ее решение

В работе [3] показано, что если поверхность проводников, образующих антенну, обладает НПИ, то есть в каждой точке  $\mathbf{r}$  поверхности выполняются нелинейные граничные условия вида:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_0 \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t))], \quad (1)$$

или

$$\mathbf{J}^M(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{Z}}[\mathbf{J}^\ominus(\mathbf{r}, t)], \quad (2)$$

то распределение плотности поверхностного тока должно удовлетворять следующему нелинейному интегральному уравнению (НИУ):

$$\int_L I(\xi', \omega_q) \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi'} + (\boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\xi}'_0) k_q^2 \right\} G_q(\xi, \xi') d\xi' + \frac{j\omega_q \varepsilon_0}{T} \int_0^T \hat{\mathbf{Z}} \left[ \sum_{p=-N}^N \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega_p) \boldsymbol{\xi}_0 e^{j\omega_p t} \right] e^{-j\omega_q t} dt =$$

$$= \begin{cases} -j\omega_0 \varepsilon_0 E_{tg}^{cm}(\xi, \omega_0), & \text{при } q=1 \\ 0, & \text{при } q \neq 1 \end{cases} \quad \forall q = \overline{0, N}. \quad (3)$$

В (1) – (3)  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей в точке  $\mathbf{r}$  на поверхности проводника;  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности проводника в той же точке;  $\hat{\mathbf{Z}}[\cdot]$  – нелинейный оператор, описывающий свойства поверхностного импеданса проводника;  $\mathbf{h}_0$  – единичный вектор, определяющий направление  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{J}^M(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n}(\mathbf{r})$ ;  $\mathbf{J}^\ominus(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  – мгновенные значения эквивалентных поверхностных токов;  $\boldsymbol{\xi}_0$  – единичный вектор, направленный вдоль оси проводника;  $k_q$  – волновое число окружающего пространства на рассматриваемых частотах  $\omega_q = q\omega_0$  для  $\forall q = \overline{0, N}$  ( $N$  – число высших гармоник, учитываемых в процессе расчета);  $\omega_0$  – частота источника возбуждения;  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ;  $G_q(\xi, \xi')$  – функция Грина;  $\xi, \xi'$  – координаты точек наблюдения и интегрирования;  $E_{tg}^{cm}(\xi, \omega_0)$  – эдс стороннего источника возбуждения.

С использованием метода Галеркина данное НИУ приводится к системе алгебраических уравнений:

$$\mathbf{Z}(\omega_q)(\omega_q) + \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{N}[\mathbf{J}(t)] e^{-j\omega_q t} dt = \begin{cases} \mathbf{U}(\omega_0), & \text{при } n=1 \\ 0, & \text{при } n \neq 1 \end{cases}, \quad \forall q = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{Z}(\omega_q)$  – квадратная матрица размерности  $M \times M$  с элементами

$$Z_{mn}(\omega_q) = \iint_{LL} \Phi_n^{(L)}(\xi, \omega_q) \Phi_m^{(L)}(\xi', \omega_q) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi'} + (\boldsymbol{\xi}_0 \boldsymbol{\xi}'_0) k_q^2 \right] G_q(\xi, \xi') d\xi' d\xi; \quad (5)$$

$\mathbf{I}(\omega_q) = (I_1(\omega_q), I_2(\omega_q), \dots, I_M(\omega_q))^T$  – матрица-столбец (вектор), элементами которой являются коэффициенты аппроксимации искомого распределения тока;  $\mathfrak{N}[I(t)] = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_M)^T$  и  $\mathbf{U}(\omega_0) = (U_1(\omega_0), U_2(\omega_0), \dots, U_M(\omega_0))^T$  – матрицы-столбцы с элементами

$$\mathfrak{N}_n[\mathbf{J}(t)] = j\omega_q \epsilon_0 \iint_{LS} \Phi_n^{(N)}(\xi, \omega_q) \Phi_n^{(N)}(\eta, \omega_q) \Phi_n^{(N)}(\nu, \omega_q) \hat{\mathbf{Z}} \left[ \sum_{p=-N}^N \mathbf{J}(\eta, \nu, \xi, \omega_p) e^{j\omega_p t} \right] d\eta d\nu d\xi, \quad (6)$$

и

$$U_n(\omega_0) = -j\omega_0 \epsilon_0 \int_L \Phi_n^{(L)}(\xi, \omega_0) E_{tg}^{cm}(\xi, \omega_0) d\xi, \quad (7)$$

где  $\Phi_n^{(L)}$  и  $\Phi_n^{(N)}$  – весовые функции линейной и нелинейной частей ИУ;  $\Phi_m^{(L)}$  и  $\Phi_m^{(N)}$  – базисные функции линейной и нелинейной частей; индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования;  $\eta, \nu, \xi$  – обобщенная система координат.

На рис. 1 приведена схема, соответствующая алгебраическим уравнениям (4). Таким образом, для идентификации параметров НЭ необходимо найти соответствие между нелинейным оператором граничных условий  $\hat{\mathbf{Z}}[\cdot]$ , описывающим свойства поверхностного импеданса проводника, и оператором  $\tilde{\mathfrak{N}}_n[I(t)]$ , который характеризует свойства нелинейной части модели проволочных антенн с НПИ (на рис.1 линейный многополюсник характеризуется матрицей собственных и взаимных сопротивлений  $\mathbf{Z}(\omega_q)$  и системой действующих на его входах источников эдс  $\mathbf{U}(\omega_0)$ ).

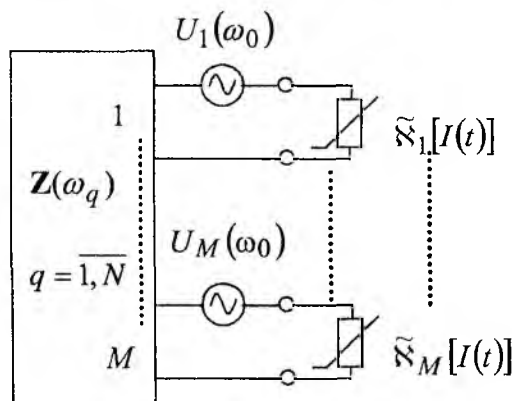


Рис. 1

В линейной части алгебраических уравнений, которая, по сути, характеризует проволочные антенны из идеального проводника (первое слагаемое левой части системы уравнений (4)), для проводов произвольного поперечного сечения было использовано понятие эквивалентного радиуса проводника « $a$ », в результате чего, вне зависимости от формы сечения, в рамках тонкопроволочного приближения сделан переход от интегрирования по поверхности проводников излучателя  $S$  к интегрированию по их длине  $L$ . Таким образом, от вектора поверхностной

плотности тока перешли к расположенной на оси проволочного излучателя бесконечно тонкой нити продольного электрического тока  $I(\xi', \omega_q) = 2\pi a J(\xi', \omega_q)$ .

Вид нелинейной части системы уравнений (второе слагаемое правой части уравнения (4)), как видно из (6), зависит от характеристики поверхностного импеданса антенны и характера распределения тока по поверхности проводника (вектора плотности тока  $\mathbf{J}(\eta, \nu, \xi, \omega_p)$ ), то есть формы сечения проводников антенны.

При анализе СВЧ устройств с нелинейными характеристиками часто применяют полиномиальную зависимость поверхностного импеданса устройства от распределения тока на нем [5, 6]

$$\mathbf{J}^M(t) = J^M(t) \bar{e}^M = \bar{e}^M \sum_{m=1}^M a_m (J^{\mathcal{E}}(t))^m, \quad (8)$$

где  $M$  – число удерживаемых членов ряда при аппроксимации;  $a$  – коэффициенты разложения тока;  $\vec{e}^M$  – единичный вектор в направлении плотности магнитного тока в точке  $\mathbf{r}$ . Для данной характеристики поверхностного импеданса и цилиндрического сечения проводников, когда распределение тока по поверхности поперечного сечения ветвей антенны равномерное, и постоянных весовых функций  $\Phi_n^{(N)}(\xi, \omega_q)$ ,  $\Phi_n^{(N)}(\varphi, \omega_q)$ , определим нелинейный оператор уравнений, описывающих антенну:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_n[J(t)] &= j\omega_q \varepsilon_0 \int_{\xi\varphi} \Phi_n^{(N)}(\xi, \omega_q) \Phi_n^{(N)}(\varphi, \omega_q) \sum_{p=-N}^N \left( \sum_{m=1}^M a_{nm} J_n^m(t) a d\xi d\varphi \right) e^{j\omega_p t} = \\ &= j\omega_q \varepsilon_0 \sum_{p=-N}^N \left( \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_{n-2}} \sum_{m=1}^M a_m \sum_{u=1}^U \frac{I_u^m(\omega_p)}{2\pi a} \Phi_u^{(N)}(\xi, \omega_p) d\xi \right) e^{j\omega_p t}, \end{aligned} \quad (9)$$

где интегрирование ведется по поверхности проводника – по оси проводника ( $\xi_{n-1}, \xi_{n-2}$  – координаты концов базисных функций  $\Phi_u^{(N)}(\xi, \omega_p)$ ), по которым, согласно методу Галеркина, раскладывается ток  $I(\xi', \omega_p) = \sum_{u=1}^U I_u(\omega_p) \Phi_u^{(N)}(\xi', \omega_p)$ , и периметру круглого сечения проводника (координата  $\varphi$ ). С учетом сделанных в [3, 4] рекомендаций по применению в нелинейной части ИУ систем кусочно-постоянных функций, получим следующее выражение для нелинейной части интегрального оператора, являющееся зависимостью от того же полного тока, что и в линейной части НИУ:

$$\tilde{\mathfrak{N}}_n[I(t)] = \frac{j\omega_q \varepsilon_0 \Delta_n}{2\pi a} \sum_{p=-N}^N \left( \sum_{m=1}^M a_m I_u^m(\omega_p) \right) e^{j\omega_p t}, \quad (10)$$

где  $\Delta_n = \xi_{n-2} - \xi_{n-1}$ .

В проволочных антеннах, помимо проводников круглого сечения, можно применить и провода другого сечения, например квадратного. При этом нелинейная часть интегрального уравнения (3) значительно усложняется из-за того, что распределение плотности тока по поперечному сечению такого проводника, в отличие от проводника круглого сечения, является более сложной функцией координат. В проводах с квадратным сечением распределение плотности тока, по периметру поперечного сечения, неравномерно: на краях проводника плотность тока больше, нежели в центре боковой поверхности провода. Это видно, например, из рис. 2 [7], где изображено распределение плотности тока вдоль поперечного сечения прямоугольного проводника в зависимости от глубины скин-слоя  $\lambda$  (по сути, характеристики материала). Поэтому для решения системы уравнений необходимо знать характеристику распределения плотности тока вдоль поперечного сечения проводника шириной  $w$  для конкретного проводящего материала.

В ряде работ, [5; 8], были экспериментально получены характеристики распределения плотности тока вдоль поперечного сечения прямоугольных и ленточных проводников с нелинейными характеристиками (рис. 3, жирная линия с точками). При численном анализе электродинамических

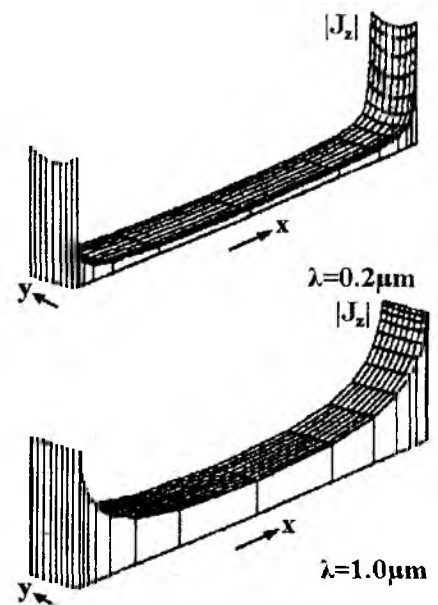


Рис. 2

устройств в [5] данные характеристики с достаточной степенью точности аппроксимировались следующей зависимостью:

$$J(x) = \frac{J(0)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^2}}, \quad (11)$$

(рис. 3, линия без точек). Для повышения точности аппроксимации распределения плотности тока в [8] аппроксимацию проводили на двух участках поперечного сечения проводника, применяя на одном зависимость (10), а на другом экспоненциальную характеристику

$$J(x) = \begin{cases} J(0) \left[ 1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & x \ll w \\ J(0) \left( \frac{1.165}{\lambda_0} \right) (wb)^{1/2} \exp\left( -\frac{(w/2 - |x|b)}{\lambda_0^2} \right), & x \approx w \end{cases}, \quad (12)$$

где  $\lambda_0$  и  $b$  – коэффициенты, определяющие глубину скин-слоя.

В данной статье для аппроксимации плотности тока вместо зависимостей (11), (12) предлагается применить следующее выражение:

$$J(x) = \frac{J(0)}{\sqrt[m]{1 - \left(\frac{2x}{w}\right)^{2n}}}, \quad (13)$$

в котором выбором коэффициентов  $m$  и  $n$  можно получить практически полное совпадение аппроксимирующей кривой с действительным распределением плотности тока для проводников, обладающих различными свойствами. Некоторые примеры кривых аппроксимации для различного сочетания коэффициентов  $m$  и  $n$  представлены на рис. 3, 4. Как видим, предлагаемая формула (13) является более удобной, компактной по сравнению с (12) и обладает хорошей степенью точности при аппроксимации.

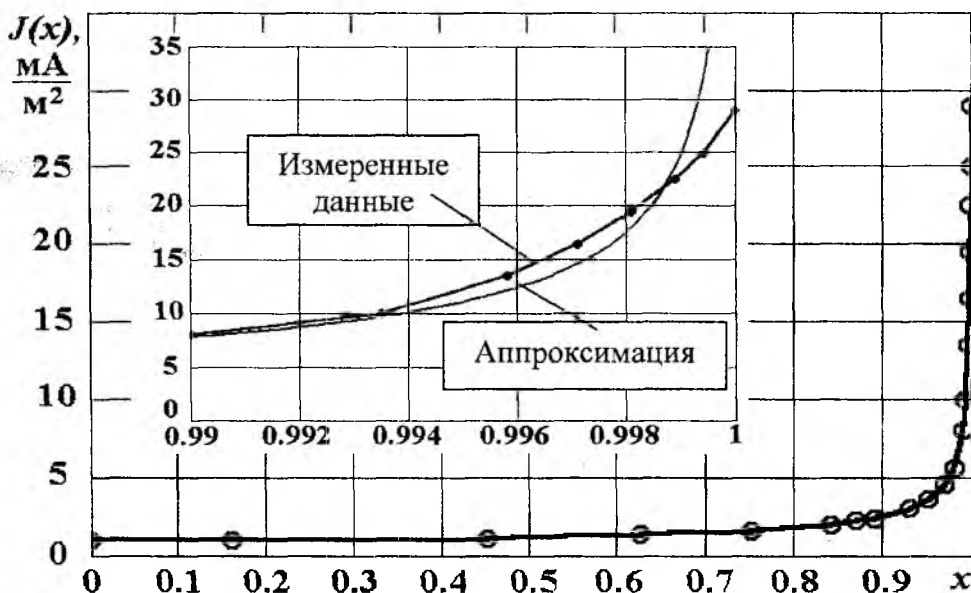


Рис. 3

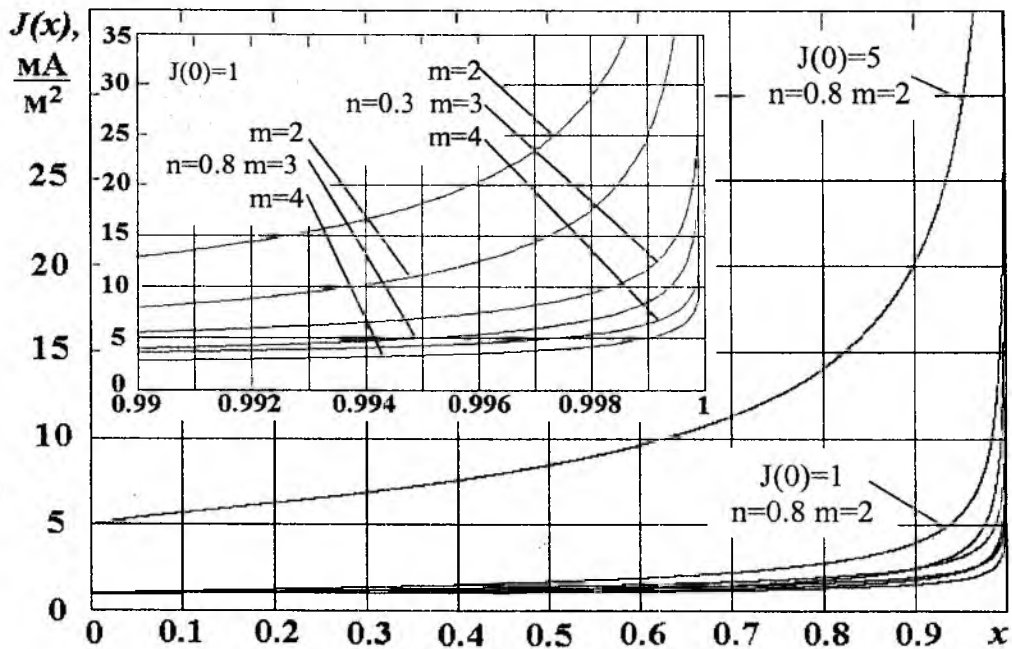


Рис. 4

С использованием предложенной зависимости распределения плотности тока (13) по поперечному сечению проводника запишем подынтегральное выражение в нелинейной части системы уравнений (4), учитывая полиномиальную зависимость поверхностного импеданса и кусочно-постоянные весовые функции:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{N}_n[J(t)] &= j\omega_q \epsilon_0 \iiint_{L\Pi} \Phi_n^{(N)}(x, \omega_p) \Phi_n^{(N)}(y, \omega_p) \Phi_n^{(N)}(z, \omega_p) \dot{z} \left[ \sum_{p=-N}^N \bar{J}(x, y, z, \omega_p) e^{j\omega_p t} \right] dx dy dz = \\
 &= j\omega_q \epsilon_0 \int_{z_{n-2}}^{z_{n-1}} \int_{\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \sum_{p=-N}^N \sum_{m=1}^M a_m \bar{J}^m(x, y, z, \omega_p) e^{j\omega_p t} dx dy dz = \\
 &= j\omega_q \epsilon_0 \int_{z_{n-2}}^{z_{n-1}} \sum_{p=-N}^N \left[ 4 \int_0^M a_m \left( \frac{J_{x, \omega_p}(0)}{\sqrt{\chi \left( 1 - \left( \frac{2x}{w} \right)^\delta \right)}} \right)^m dx + 4 \int_0^M a_m \left( \frac{J_{y, \omega_p}(0)}{\sqrt{\alpha \left( 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^\beta \right)}} \right)^m dy \right] e^{j\omega_p t} dz, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где  $L$  – интегрирование по длине проводника;  $\Pi$  – интегрирование по периметру поперечного сечения;  $xyz$  – местная декартова система координат.

Пронормировав линейные размеры поперечного сечения проводника, и изменив пределы интегрирования, интегралы в (14) можно вычислить по соотношению [9]:

$$\int_0^1 (1-x^n)^{\frac{1}{m}} dx = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{m}\right), \quad [\operatorname{Re} n > 0, |m| > 1], \quad (15)$$

где  $B(x, y)$  –  $\beta$ -функция, которая довольно легко вычисляется при помощи ЭВМ.

Учитывая (14), (15), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\aleph}_n[I(t)] &= j\omega_q \varepsilon_0 32 \int_{z_{n-2}}^{z_{n-1}} \sum_{p=-N}^N \left( \sum_{m=1}^M a_m \frac{I^m(z, \omega_p)}{J_{x, \omega_p}^m(0) \frac{1}{\delta} B\left(\frac{1}{\delta}, 1 - \frac{m}{\alpha}\right)} \right) e^{j\omega_p t} dz = \\ &= j\omega_q \varepsilon_0 32 \int_{z_{n-2}}^{z_{n-1}} \sum_{p=-N}^N \left( \sum_{m=1}^M \hat{a}_m I(z, \omega_p) \right) e^{j\omega_p t} dz = \\ &= j\omega_q \varepsilon_0 32 \int_{z_{n-2}}^{z_{n-1}} \sum_{p=-N}^N \left( \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^S \hat{a}_m I_s(\omega_p) \Phi_s^{(N)}(z, \omega_p) \right) e^{j\omega_p t} dz. \end{aligned} \quad (16)$$

Если в качестве базисных функций  $\Phi_s^{(N)}(z, \omega_p)$  использовать кусочно-постоянные функции, то после интегрирования в (16) по  $z$  получим.

$$\tilde{\aleph}_n[I(t)] = j\omega_q \varepsilon_0 32 \Delta_n \sum_{p=-N}^N \left( \sum_{m=1}^M \hat{a}_m I_s^m(\omega_p) \right) e^{j\omega_p t}, \quad (17)$$

где  $\hat{a}_m = \frac{a_m}{J_{x, \omega_p}^m(0) \frac{1}{\delta} B\left(\frac{1}{\delta}, 1 - \frac{m}{\alpha}\right)}$ .

### Выводы

Таким образом, получены соотношения для нелинейной части алгебраических уравнений тонкопроволочных излучателей произвольной конфигурации с НПИ относительно распределения полного тока вдоль проводников антенны различных форм поперечного сечения, то есть получена связь нелинейного оператора уравнений гармонического баланса с нелинейным оператором граничных условий, а значит, решена задача идентификации параметров распределенных нелинейных элементов по характеристикам НПИ.

**Список литературы:** 1. *Sergey L. Loyka*. The Influence of Electromagnetic Environment on Operation of Active Array Antennas: Analysis and Simulation Techniques // IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1999. Vol. 41. No. 6. P. 23 – 39. 2. *Шифрин Я.С., Лучанинов А.И., Омаров М.А.* Анализ антенн с распределенной нелинейностью // Антенны: Сб. статей. Вып. 1(44). М.: ИПРЖР, 2000. С. 70 – 83. 3. *Дистанционные методы и средства исследования процессов в атмосфере Земли / Под общ. ред. Б.Л. Кашеева, Е.Г. Прошкина, М.Ф. Лагутина.* Харьков: ХНУРЭ; Бизнес Информ, 2002. 426 с. 4. *Выбор базисных и весовых функций в задаче анализа антенн с нелинейным поверхностным импедансом методом моментов / А.И. Лучанинов, М.А. Омаров, Д.С. Гавва // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 124. С. 213 – 218.* 5. *Thomas Dahm and Douglas J. Scalapino*, «Analysis and Optimization of Intermodulation in High-Tc Superconducting Microwave Filter Design» IEEE Transaction on Applied Superconductivity, Vol. 8, No. 4, 1998. December. P. 149 – 157. 6. *Orest G. Vendik, Irina B. Vendik and Tatyana B. Samoilova*, «Nonlinearity of Superconducting Transmission Line and Microstrip Resonators» IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol. 45, N. 2, 1997. February. P. 173 – 178. 7. *David M. Sheen, Sami M. Ali, Daniel E. Oates, Richard S. Withers, J.A. Kong*, «Current Distribution, Resistance, and Inductance for Superconducting Strip Transmission Lines» IEEE Transaction on Applied Superconductivity, Vol. 1, N. 2, 1991. June P. 108 – 115. 8. *D. E. Oates*. «Nonlinear Surface Impedance, Intermodulation Distortion, and Harmonic Generation, «Six Symposium on «High Temperature Superconductors in High Frequency Fields» The Island of Capri, Naples, Italy, 2000. May 24-27, 9. *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.