УДК 519.6

О.М. Литвин, О.О. Литвин, Є.Л. Хурдей
Українська Інженерно-Педагогічна Академія,
м. Харків, Україна, academ_mail@ukr.net;
Українська Інженерно-Педагогічна Академія,
м. Харків, Україна, olegolitvin55@gmail.com;
Українська Інженерно-Педагогічна Академія,
м. Харків, Україна, evgenia_hurdei@ukr.net

ПРО ВИБІР НЕВІДОМИХ ЗНАЧЕНЬ НАБЛИЖУВАНОЇ ФУНКЦІЇ В ОПЕРАТОРІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ІЗ ЗАДАНИМИ ПРОЕКЦІЯМИ

В роботі досліджується метод побудови операторів інтерполяції із заданими проекціями вздовж вказаних ліній. В даній роботі вперше пропонується загальний підхід до вибору невідомих інтерполяційних значень наближуваної функції 2-х змінних в трикутнику за допомогою відомих проекцій. В методі побудови інтерполяційних операторів, невідомі інтерполяційні дані знаходяться з умови, щоб оператор наближення точно відновлював всі поліноми другого степеня.

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, ПОЛІНОМИ, ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ДАНІ, ПОХИБКА НАБЛИЖЕННЯ

Литвин О. М., Литвин О. О., Хурдей Е. Л. О выборе неизвестных значений приближающей функции в операторе интерполяции с заданными проекциями. В работе исследуется метод построения операторов интерполяции с заданными проекциями вдоль указанных линий. В данной работе впервые предлагается общий подход к выбору неизвестных интерполяционных значений приближаемой функции 2-х переменных в треугольнике с помощью известных проекций. В методе построении интерполяционных операторов, неизвестные интерполяционные данные находить из условия, чтобы оператор приближения точно восстанавливал все полиномы второй степени.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ПОЛИНОМЫ, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ДАНЫЕ, ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Hurdei E. L. About the selection of unknown data of approximate function in the operator of interpolation with the set projections. The investigated subject in present work is the method of creation of operators of interpolation with the set projections along the specified lines. In the present work for the first time the general approach to the selection of unknown interpolation values of required function is offered of 2 variables in a triangle through known projections. It is offered to find unknown interpolation data in the method of creation of interpolation operators according to a condition that the operator of approximation restored all polynomials to the second power accurately.

INTERPOLATION, POLYNOMIALS, INTERPOLATION DATA, ACCURACY OF APPROXIMATION

Вступ

На сьогоднішній день методи комп'ютерної томографії використовуються при неруйнівному контролі об'єкта на митниці, при дослідженні стану внутрішніх органів людини на медичних томографах, в оптичній томографії тощо. Автори даної публікації вважають, що в біоніці інтелекта настав час використовувати при математичному моделюванні не тільки значення тої або іншої характеристики у внутрінніх точках об'єкта, які, доречі, можуть бути не відомими, але також і інтеграли від відповідної характеристики вздовж заданої системи ліній. Тому назва даної роботи може викликати, на думку авторів, природну зацікавленість при побудові математичних моделей на основі лише заданої системи проекцій – інтегралів, вздовж відповідної системи прямих.

В роботі розглянуто лише випадок, коли кількість прямих дорівнює трьом. Але метод, викладений в даній роботі, на даний час, узагальнений авторами на випадок, коли кількість проекцій задавольняє нерівності $M \geq 3$ і ці M прямих перетинаються одна з одною, при чому в одній точці не перетинається більше ніж три прямі.

У відомих авторам публікаціях присвячених комп'ютерній томографії [1–3] досліджуються методи основані на використанні прямого та оберненого перетворення Радона в комп'ютерній томографії.

В працях [4] та [5] запропоновано конструктивний підхід до побудови операторів наближення функції двох змінних за допомогою відомих їх проекцій вздовж заданої системи прямих.

В роботах [4] та [5] зформульовано загальний підхід до побудови операторів інтерполяції функції двох змінних в системі точок перетину M прямих, які мають задані значення проекцій і задані значення наближуваної функції в точках перетину цих прямих.

В роботі [5] цей метод був досліджений для випадку, коли система прямих є взаємноперпендикулярна. В роботах [6] та [7] досліджено випадок трьох непаралельних перетинних прямих та випадок системи M перетинних прямих ніякі три з яких не перетинаються в одній точці.

1. Постановка задачі

В даній роботі досліджується метод побудови операторів інтерполяції із заданими проекціями вздовж вказаних ліній і вперше пропонується загальний підхід до вибору невідомих інтерполяційних значень наближуваної функції в точках інтерполяції. Критерій полягає в наступному: оператор наближення, побудований за допомогою даних у вершинах трикутника та проекцій вздовж сторін трикутника, повинен точно відновлювати довільні поліноми 2го степеня від двох змінних.

Розглянемо трикутник з вершинами

$$A_1(R,0), A_2\left(-\frac{R}{2},\frac{\sqrt{3}R}{2}\right), A_3\left(-\frac{R}{2},-\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$$

і рівняннями сторін:

$$\omega_{12}(x,y)=(x-X_1)(Y_2-Y_1)-(y-Y_1)(X_2-X_1)$$

$$\omega_{23}(x,y)=(x-X_2)(Y_3-Y_2)-(y-Y_2)(X_3-X_2)$$

$$\omega_{13}(x,y)=(x-X_1)(Y_3-Y_1)-(y-Y_1)(X_3-X_1)$$

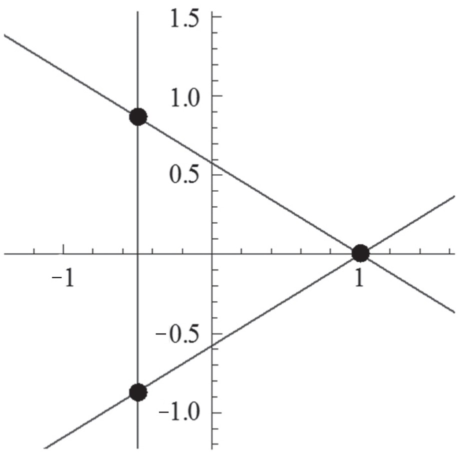

Рис. 1 Задана система прямих на трикутнику

2. Оператор інтерполяції функції $f(x,y)$ у вершинах трикутника

Будуємо оператор $L1f(x,y)$, який інтерполює $f(x,y)$ у вершинах трикутника $(X_k,Y_k), k=\overline{1,3}$ у вигляді:

$$L1f(x,y)=f(X_1,Y_1)\cdot\frac{\omega_{23}(x,y)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)}+ \\ +f(X_2,Y_2)\cdot\frac{\omega_{13}(x,y)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)}+f(X_3,Y_3)\cdot\frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)} \qquad (1)$$

$$L2f(x,y)=\frac{\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12}f(x,y)ds_{12}+ \\ +\frac{\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23}f(x,y)ds_{23}+ \qquad (2) \\ +\frac{\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31}f(x,y)ds_{31}$$

Введемо позначення:

$$Lf(x,y)=L1f(x,y)+L2(f(x,y)-L1f(x,y)) \qquad (3)$$

Лема 1. Оператор $L1f(X,Y)$ інтерполює кожну неперервну функцію $f(x,y)$ у вершинах $(X_i,Y_i), i=\overline{1,3}$ довільного невиродженого трикутника:

$$L1f(X_i,Y_i)=f(X_i,Y_i), i=\overline{1,3}.$$

Д о в е д е н н я.

Підставимо у формулу (1) $x=X_1, y=Y_1$. В результаті отримаємо

$$L1f(X_1,Y_1)=f(X_1,Y_1)\cdot\frac{\omega_{23}(X_1,Y_1)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)}+f(X_2,Y_2)\cdot \\ \cdot\frac{\omega_{13}(X_1,Y_1)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)}++f(X_3,Y_3)\cdot\frac{\omega_{12}(X_1,Y_1)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}= \\ =\begin{bmatrix}\omega_{13}(X_1,Y_1)=0\\ \omega_{12}(X_1,Y_1)=0\end{bmatrix}=f(X_1,Y_1)\cdot\frac{\omega_{23}(X_1,Y_1)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)}=f(X_1,Y_1)$$

Підставимо у формулу (1) $x=X_2, y=Y_2$. В результаті отримаємо

$$L1f(X_2,Y_2)=f(X_1,Y_1)\cdot\frac{\omega_{23}(X_2,Y_2)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)}+f(X_2,Y_2)\cdot \\ \cdot\frac{\omega_{13}(X_2,Y_2)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)}+f(X_3,Y_3)\cdot\frac{\omega_{12}(X_2,Y_2)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}= \\ =\begin{bmatrix}\omega_{23}(X_2,Y_2)=0\\ \omega_{12}(X_2,Y_2)=0\end{bmatrix}=f(X_2,Y_2)\cdot\frac{\omega_{13}(X_2,Y_2)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)}=f(X_2,Y_2)$$

Підставимо у формулу (1) $x=X_3, y=Y_3$. В результаті отримаємо

$$L1f(X_3,Y_3)=f(X_1,Y_1)\cdot\frac{\omega_{23}(X_3,Y_3)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)}+f(X_2,Y_2)\cdot \\ \cdot\frac{\omega_{13}(X_3,Y_3)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)}+f(X_3,Y_3)\cdot\frac{\omega_{12}(X_3,Y_3)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}= \\ =\begin{bmatrix}\omega_{23}(X_3,Y_3)=0\\ \omega_{13}(X_3,Y_{32})=0\end{bmatrix}=f(X_3,Y_3)\cdot\frac{\omega_{12}(X_3,Y_3)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}=f(X_3,Y_3)$$

Отже, $L1f(X_i,Y_i)=f(X_i,Y_i), i=\overline{1,3}$. Лема 1 доведена.

Лема 2. Оператор $L2f(x,y)$ має такі властивості

$$L2f(X_i,Y_i)=0, i=\overline{1,3}.$$

Д о в е д е н н я.

Підставимо у формулу (2) $x=X_1, y=Y_1$. В результаті отримаємо

$$L2f(X_1,Y_1)=\frac{\omega_{23}(X_1,Y_1)\omega_{31}(X_1,Y_1)}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12}f(x,y)ds_{12}+ \\ +\frac{\omega_{12}(X_1,Y_1)\omega_{31}(X_1,Y_1)}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23}f(x,y)ds_{23}+ \\ +\frac{\omega_{12}(X_1,Y_1)\omega_{23}(X_1,Y_1)}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31}f(x,y)ds_{31}=$$

$$=\begin{bmatrix}\omega_{12}(X_1,Y_1)=0\\ \omega_{31}(X_1,Y_1)=0\end{bmatrix}=\frac{\omega_{23}(X_1,Y_1)\cdot 0}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+\frac{0\cdot 0}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{0\cdot\omega_{23}(X_1,Y_1)}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=0$$

Підставимо у формулу (2) $x=X_2, y=Y_2$. В результаті отримаємо

$$L2f(X_2,Y_2)=\frac{\omega_{23}(X_2,Y_2)\omega_{31}(X_2,Y_2)}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+$$

$$+\frac{\omega_{12}(X_2,Y_2)\omega_{31}(X_2,Y_2)}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{\omega_{12}(X_2,Y_2)\omega_{23}(X_2,Y_2)}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=$$

$$=\begin{bmatrix}\omega_{12}(X_2,Y_2)=0\\ \omega_{23}(X_2,Y_2)=0\end{bmatrix}=\frac{0\cdot\omega_{31}(X_2,Y_2)}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+\frac{0\cdot\omega_{31}(X_2,Y_{21})}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{0\cdot 0}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=0$$

Підставимо у формулу (2) $x=X_3, y=Y_3$. В результаті отримаємо

$$L2f(X_3,Y_3)=\frac{\omega_{23}(X_3,Y_3)\omega_{31}(X_3,Y_3)}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+$$

$$+\frac{\omega_{12}(X_3,Y_3)\omega_{31}(X_3,Y_3)}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{\omega_{12}(X_3,Y_3)\omega_{23}(X_3,Y_3)}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=$$

$$=\begin{bmatrix}\omega_{31}(X_3,Y_3)=0\\ \omega_{23}(X_3,Y_3)=0\end{bmatrix}=\frac{0\cdot 0}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+\frac{\omega_{12}(X_3,Y_3)\cdot 0}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{\omega_{12}(X_3,Y_3)\cdot 0}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=0$$

Отже, $L2f(X_i,Y_i)=0, i=\overline{1,3}$. Лема 2 доведена.

Лема 3. Функція $L2f(x,y)$ і інтегрована $f(x,y)$ мають однакові проекції, тобто криволінійні інтеграли першого роду, вздовж сторін трикутника,

$$\int\limits_{ij} L2f(x,y)ds_{ij}=\int\limits_{ij} f(x,y)ds_{ij}.$$

Д о в е д е н н я. Покладемо $(i,j)=(1,2)$. В результаті отримаємо:

$$\int\limits_{12} L2f(x,y)ds_{12}=\frac{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+$$

$$+\frac{\int\limits_{12}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{\int\limits_{12}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{12}}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=$$

$$=\begin{bmatrix}\int\limits_{12}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}=0\\ \int\limits_{12}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{12}=0\end{bmatrix}=\frac{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}=\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}$$

Покладемо $(i,j)=(2,3)$. В результаті отримаємо:

$$\int\limits_{23} L2f(x,y)ds_{12}=\frac{\int\limits_{23}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+$$

$$+\frac{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{23}}{\int\limits_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{31} f(x,y)ds_{31}=$$

$$=\begin{bmatrix}\int\limits_{23}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}=0\\ \int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{23}=0\end{bmatrix}=\frac{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}{\int\limits_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}=\int\limits_{23} f(x,y)ds_{23}$$

Покладемо $(i,j)=(3,1)$. В результаті отримаємо:

$$\int\limits_{31} L2f(x,y)ds_{12}=\frac{\int\limits_{31}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{31}}{\int\limits_{12}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{12} f(x,y)ds_{12}+$$

$$+\frac{\int_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{31}}{\int_{23}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int_{23} f(x,y)ds_{23}+$$

$$+\frac{\int_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}{\int_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int_{31} f(x,y)ds_{31}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\int_{31}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{31}=0\\ \int_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{31}=0\end{array}\right]=\frac{\int_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}{\int_{31}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot$$

$$\cdot\int_{31} f(x,y)ds_{31}=\int_{31} f(x,y)ds_{31}$$

Отже,

$$\int_{ij} L2f(x,y)ds_{ij}=\int_{ij} f(x,y)ds_{ij},$$

$$(i,j)=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}.$$

Лема 3 доведена.

Теорема 1. Оператор $Lf(x,y)$ має такі властивості:

1. $Lf(X_i,Y_i)=f(X_i,Y_i), i=\overline{1,3},$

2. $\int_{ij} Lf(x,y)ds_{ij}=\int_{ij} f(x,y)ds_{ij}.$

Доведення.

1. Підставимо у формулу $Lf(x,y)$ точку $(X_i,Y_i), i=\overline{1,3}$. Отримаємо

$$\begin{aligned}Lf(X_i,Y_i)&=L1f(X_i,Y_i)+L2(f(X_i,Y_i)-L1f(X_i,Y_i))=\\&=L1f(X_i,Y_i)+L2f(X_i,Y_i)-L2L1f(X_i,Y_i)=\\&=f(X_i,Y_i)+L2f(X_i,Y_i)-L2f(X_i,Y_i)=f(X_i,Y_i),\\&i=\overline{1,3}.\end{aligned}$$

Таким чином, перше твердження теореми 2 доведене.

2. Розглянемо інтеграл

$$\int_{ij} Lf(x,y)ds_{ij}=\int_{ij}\left(L1f(x,y)+L2(f(x,y)-L1f(x,y))\right)ds_{ij}=$$

$$=\int_{ij} L1f(x,y)ds_{ij}+\int_{ij} L2(f(x,y)-L1f(x,y))ds_{ij}=$$

$$=\int_{ij} L1f(x,y)ds_{ij}+\int_{ij} L2f(x,y)ds_{ij}-\int_{ij} L2L1f(x,y)ds_{ij}=$$

$$=\int_{ij} L1f(x,y)ds_{ij}+\int_{ij} L2f(x,y)ds_{ij}-\int_{ij} L1f(x,y)ds_{ij}=$$

$$=\int_{ij} L2f(x,y)ds_{ij}=\int_{ij} f(x,y)ds_{ij},(i,j)=$$

$$=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}.$$

Теорема 1 доведена.

3. Операторі інтерполяції полінова від двох змінних 2-го степеня

Лема 4. Всякий поліном від двох змінних 2-го степеня з властивостями

$$P_2(X_k,Y_k)=0 \qquad (4),$$

може бути однозначно представлений в такому вигляді з використанням даних

$$\gamma_{ij}=\int_{ij} L^*2P_2(x,y)ds_{ij}, i,j\in\{(1,2),(2,3),(3,1)\}:$$

$$\begin{aligned}L^*2P_2(x,y)&=a_1\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)+\\+a_2\omega_{23}(x,y)\omega_{12}(x,y)&+a_3\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)\end{aligned} \qquad (5)$$

Доведення. Очевидно, що властивості (4) функція (5) задовольняє, оскільки кожний доданок дорівнює 0 в усіх трьох точках (вершинах трикутника), де $\omega_{ij}(x,y)$ – рівняння сторони трикутника, яка з'єднує вершини A_i,A_j.

Якщо $P_2(x,y)=\sum_{0\le i+j\le 0} a_{ij}x_iy_j, a_{ij}\in\mathbb{R}$, тоді функція

$$P_2(x,y)-L1P_2(x,y)=L^*2P_2(x,y)$$

є поліномом 2-го степеня вигляду:

$$\begin{aligned}L^*2P_2(x,y)&=a_1\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)+\\+a_2\omega_{23}(x,y)\omega_{12}(x,y)&+a_3\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)\end{aligned}.$$

Для доведення того, що коефіцієнти a_1,a_2,a_3 у формулі $L^*2P_2(x,y)$ можуть бути однозначно знайдені за допомогою відомих γ_{ij}, знайдемо їх з рівності

$$\int_{ij} L^*2P_2(x,y)ds_{ij}=\gamma_{ij},(i,j)=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$$

$$\int_{ij} L^*2P_2(x,y)ds_{ij}=\int_{ij}(a_1\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)+a_2\omega_{23}(x,y)\cdot$$

$$\cdot\omega_{12}(x,y)+a_3\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y))ds_{ij}=\gamma_{ij}$$

Враховуючи, що $\omega_{ij}(x,y)=0$, на лінії, яка з'єднує дві вершини A_i,A_j і функція $\omega_{ij}(x,y)$ входить множником у два різні доданки в $L^*2P_2(x,y)$ отримаємо

$$\int_{23} L^*2P_2(x,y)ds_{ij}=a_1\int_{23}\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)ds_{23}=\gamma_{23}$$

Звідси для невідомого коефіцієнта a_1 отримаємо

$$a_1=\frac{\gamma_{23}}{\int_{23}\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)ds_{23}}$$

Аналогічно знаходимо a_2,a_3

$$\int_{31} L^*2P_2(x,y)ds_{13}=a_2\int_{31}\omega_{23}(x,y)\omega_{12}(x,y)ds_{31}=\gamma_{31}$$

$$a_2=\frac{\gamma_{31}}{\int_{31}\omega_{23}(x,y)\omega_{12}(x,y)ds_{31}}$$

$$\int\limits_{12} L^* 2P_2(x,y)ds_{12} = a_3 \int\limits_{12} \omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12} = \gamma_{12}$$

$$a_3 = \frac{\gamma_{12}}{\int\limits_{12} \omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}$$

Таким чином, лема буде доведена, якщо впевнимося в тому, що інтеграли, які стоять у знаменниках a_1, a_2, a_3, не дорівнюють нулю. Для цього розглянемо пряму, що з'єднує A_1, A_2. Рівняння цієї прямої має вигляд $y = Y_2 + \frac{(x-X_2)(Y_1-Y_2)}{X_1-X_2}$. Тоді отримаємо

$$\int\limits_{12} \omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12} = \int\limits_{12} \omega_{23}(x, Y_2 + \frac{(x-X_2)(Y_1-Y_2)}{X_1-X_2})\cdot$$

$$\cdot\omega_{31}(x, Y_2 + \frac{(x-X_2)(Y_1-Y_2)}{X_1-X_2})\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}ds_{12} =$$

$$= \int\limits_{X_2}^{X_1} (x-X_2)((x-X_3)(Y_1-Y_3) - \left(Y_2 + \frac{(x-X_2)(Y_1-Y_2)}{X_1-X_2} - Y_3\right)$$

$$\cdot(X_1-X_3))\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}dx = \int\limits_{X_2}^{X_1} (x-X_2)\cdot((x-$$

$$-X_3)(Y_1-Y_3) - Y_2(X_1-X_3) - \frac{(x-X_2)(Y_1-Y_2)(X_1-X_3)}{X_1-X_2} +$$

$$+Y_3(X_1-X_3))\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}dx = \int\limits_{X_2}^{X_1} (x-X_2)\cdot$$

$$\cdot(x-X_1)\frac{X_1Y_2 - X_2Y_1 - X_1Y_3 + X_3Y_1 + X_2Y_3 - X_3Y_2}{X_1-X_2}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(X_1-X_2)^2+(Y_1-Y_2)^2}dx \neq 0$$

Аналогічно доводимо, що

$$\int\limits_{23} \omega_{12}(x,y)\omega_{13}(x,y)ds_{23} \neq 0,$$

$$\int\limits_{13} \omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{13} \neq 0$$

Отже, коефіцієнти a_1, a_2, a_3 знаходяться однозначно. Лема 4 доведена.

Теорема 2. Оператор $Lf(x,y) \equiv f(x,y)$ для всіх $f(x,y) \in P_2$.

Доведення. Побудуємо оператор $L1f(x,y)$ у вигляді:

$$L1P_2(x,y) = P_2(X_1,Y_1)\frac{\omega_{23}(x,y)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)} +$$

$$+P_2(X_2,Y_2)\frac{\omega_{31}(x,y)}{\omega_{31}(X_2,Y_2)} + P_2(X_3,Y_3)\frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}$$

Цей поліном має властивості:

$$L1P_2(X_k,Y_k) = P_2(X_k,Y_k), k = \overline{1,3}$$

Поліном $P_2^*(x,y) = P_2(x,y) - L1P_2(x,y)$ є поліномом другого степеня з властивостями $P_2^*(X_k,Y_k) = 0, k = \overline{1,3}$. Згідно з лемою 4, кожний такий поліном 2го степеня може бути однозначно виражений формулою

$$P_2(x,y) = \frac{\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)}{\int\limits_{23} \omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)ds_{23}}\cdot\gamma_{23} +$$

$$+\frac{\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)}{\int\limits_{13} \omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{13}}\cdot\gamma_{13} +$$

$$+\frac{\omega_{23}(x,y)\omega_{13}(x,y)}{\int\limits_{12} \omega_{23}(x,y)\omega_{13}(x,y)ds_{12}}\cdot\gamma_{12}$$

Таким чином, оператор інтерполяції функції $f(x,y)$ в вершинах трикутника $(X_k,Y_k), k = \overline{1,3}$ із заданими проекціями вздовж кожної сторони трикутника може бути представлений у вигляді:

$$L1f(x,y) = f(X_1,Y_1)\frac{\omega_{23}(x,y)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)} + f(X_2,Y_2)\frac{\omega_{13}(x,y)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)} +$$

$$+f(X_3,Y_3)\frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}$$

$$Lf(x,y) = L1f(x,y) + L2(f(x,y) - L1(x,y)).$$

Теорема 2 доведена.

4. Інтегральне представлення залишку наближення

Теорема 3. Якщо $f(x,y)$ належить до класу $\mathbb{C}^3(T)$, де

$$T = \{(x,y) : \omega_{12}(x,y) \geq 0, \omega_{23}(x,y) \geq 0, \omega_{13}(x,y) \geq 0\},$$

то похибка наближення $Rf(x,y) = f(x,y) - Lf(x,y)$ може бути представлена в інтегральній формі

$$Rf(x,y) = (I-L)\int\limits_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x} + t(x-\bar{x}), \bar{y} + t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt,$$

$$\bar{x} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \bar{y} = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$$

I – тотожний оператор.

Доведення. Кожну функцію можна представити у вигляді формули Тейлора

$$f(x,y) = T_2 f(x,y) + \int\limits_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x} + t(x-\bar{x}), \bar{y} + t(y-\bar{y}))$$

$$\cdot\frac{(1-t)^2}{2!}dt, \bar{x} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}, \bar{y} = \frac{Y_1+Y_2+Y_3}{3}$$

$$T_2 f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + f^{1,0}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f^{0,1}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) +$$

$$\frac{f^{2,0}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})^2}{2!} + f^{1,1}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})(y-\bar{y}) +$$

$$+\frac{f^{0,2}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})^2}{2!} + \ldots$$

Враховуючи, що $LT_2 f(x,y) = T_2 f(x,y)$, отримаємо

$$Rf(x,y) = f(x,y) - Lf(x,y) = T_2 f(x,y) + \int\limits_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x} +$$

$$+t(x-\bar{x}), \bar{y} + t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt - L[T_2 f(x,y) +$$

$$+\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt] =$$

$$= T_2 f(x,y) + \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt -$$

$$-LT_2 f(x,y) - L\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt =$$

$$T_2 f(x,y) + \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt -$$

$$-T_2 f(x,y) - L\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt =$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt -$$

$$-L\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt =$$

$$= (I-L)\int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\bar{x}+t(x-\bar{x}),\bar{y}+t(y-\bar{y}))\frac{(1-t)^2}{2!}dt$$

Теорема 3 доведена.

Зауваження. Замість $(\bar{x},\bar{y})$ можна використовувати $(X_k, Y_k), k = \{1,2,3\}$.

Висновки

В запропонованому методі наближення функції двох змінних автори вперше рекомендують використовувати в теорії і практиці штучного інтелекта для випадку, коли для наближення функції використовуються інтеграли вздовж заданої системи прямих, що перетинають область дослідження [8, 9].

В даній статі для випадку наближення функції 2-х змінних в трикутнику за допомогою відомих проекцій – інтегралів вздовж сторін трикутника та інтерполяційних даних у вершинах трикутника запропоновано в методі побудови інтерполяційних операторів невідомі інтерполяційні дані знаходити з умови, щоб оператор наближення точно відновлював всі поліноми другого степеня. Всі результати сформульовані і доведені у вигляді лем та теорем. Знайдено інтегральне представлення залишку наближення тричі неперервно диференційованої функції 2-х змінних побудованими операторами. Результати дозволяють провести узагальнення на випадок операторів, які інтерполюють функція 2-х змінних в точках перетину *M (M>3)* непаралельних прямих ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані проекції вздовж вказаних *M* прямих.

Автори вважають, що за такими методами майбутне штучного інтелекта в теорії і практиці.

Список літератури. 1. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ./ Ф. Наттерер. – Москва.: Мир, 1990. – 279 с. **2.** *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. – Москва: Мир, 1983, 352 с. **3.** Терновой К. С., Синьков М. В., Закидальский А. И. и др. Введение в современную томографию. – Київ: Наукова думка, 1983. - 231 с. **4.** *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с. **5.** *Литвин О. О.* Математичне моделювання в малоракурсній комп'ютерній томографії на основі інтерлінації та мішаної апроксимації функцій: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: 2009. – 20с. **6.** *Литвин О. О., Хурдей Є. Л.* Методи побудови операторів із заданими проекціями вздовж перетинних прямих, які інтерполюють $f(x,y)$ в точках перетину цих прямих. Проблемы машиностроения, № 3. – Харків :2013 г., с. 60 – 67 **7.** *Литвин О. О., Хурдей Є. Л.* Поліноміальна інтерполяція з відомими проекціями на довідній системі *N* груп прямих, які складаються з *M* паралельних прямих. Проблемы машиностроения, № 3, – Харків: 2014 г., с. 60 – 66. 8. *Путятін Є. П., Гороховатський В. О., Матат О. О.* Методи та алгоритми комп'ютерного зору. Навч. посібник. – Харків: СМІТ, 2006. – 236с. 9. *Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Учебник. – Харьков: СМИТ, 2006. – 574с.

Resume

Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Hurdei E. L.

ABOUT THE SELECTION OF UNKNOWN DATA OF APPROXIMATE FUNCTION IN THE OPERATOR OF INTERPOLATION WITH THE SET PROJECTIONS

Background: Nowadays the methods of the computer tomography are used during the indestructible control of an object at the custom houses; during the research of human's internals, using medical tomographs; in an optical tomography, etc. Authors of this publication consider that it is time to use in bionics of intelligence during the mathematical modeling not only the value of this or that characteristics in the internal points of an object (which, by the way, can be unknown), but also the integrals from the corresponding characteristic along the specified system of lines.

Materials and methods: In the present work the method of creation of operators of interpolation with the set projections along the specified lines is investigated and for the first time the general approach to the selection of the unknown interpolation values of required function in the interpolation points is offered.

Results: In the present article it is offered for a case of the search of a function of 2 variables in a triangle by means of the known projections of integrals along the sides of a triangle and the interpolation data in the peaks of a triangle to find the unknown interpolation data in a method of creation of interpolation operators, using the condition that the operator of the search should sharply restore all polynomials of the second degree. All results are formulated and proved in the form of Lemmas and theorems. Integral representation of the residue of approximation of thrice continuously differentiable function of 2 variables by the created operators is found.

Conclusion: In the proposed method of the search of function of two variable the Authors for the first time recommend to use in the theory and practice of an artificial intelligence for a case when for the search of the function the integrals along the specified system of lines which cross the area of a research are used. In the present work it is considered only the case, when the number of lines is three. But the method, proposed in the present work, for this time is generalized by the Authors for the case, when the quantity of projections satisfies the inequality $M \geq 3$ and this M lines intersect each other, but at the same time in the one point not more, than three lines intersect one another.

Надійшла до редакції 29.09.2017