

ТЕНЗОРНЫЕ МОДЕЛИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

А.В. ЛЕМЕШКО

Предлагается новый подход к решению задачи поиска кратчайшего пути, заключающийся в интерпретации решений задачи многопутевой маршрутизации и базирующийся на использовании математического аппарата тензорного анализа сетей. Топологическое описание телекоммуникационной сети произведено в рамках одномерных узловых и ортогональных сетей (симплициальных комплексов).

A new approach to the solution of the problem of searching for the shortest path which consists in the interpretation of the solutions of the problem of multipath routing and is based on the use of a body of mathematics of network tensor analysis is suggested. A topological description of a telecommunication network is performed within the scope of one-dimensional nodal and orthogonal networks (simplicial complexes).

Введение

Важное место в комплексе общетеоретических и научно-прикладных задач системного исследования телекоммуникационных сетей (ТКС) по праву отводится задачам поиска кратчайшего пути (ПКП). Несмотря на то, что для решения подобных задач к настоящему времени предложено ряд подходов и разработано множество методов [1], процесс исследования на этом себя не исчерпал. Дальнейшее развитие способов решения задач ПКП основывается на использовании новых математических формализмов, применение которых позволяет в ряде случаев за счет нестандартного подхода получить эффективные с вычислительной точки зрения методы решения.

В данной работе предлагается подход к решению задачи поиска кратчайшего пути на основе использования тензорной модели ТКС [2–4], полученной с привлечением возможностей математического аппарата тензорного анализа сетей [5]. Решение задачи ПКП предлагается получить путем интерпретации решений задачи многопутевой маршрутизации (МПМ) [3]. Ввиду того, что для решения задачи МПМ с использованием тензорного подхода нашли свое применение два метода – узловой [3] и ортогональный [4], то ниже будет приведено решение задачи ПКП с использованием обоих методов с выяснением преимуществ и недостатков их применения.

1. Тензорные модели телекоммуникационной сети

В рамках тензорного анализа сетей описание структуры моделируемой ТКС производится с помощью р-сетей, соответствующих симплициальному представлению соответствующей размерности. Аналогом графового представления структуры является одномерная сеть или 1-сеть. В русле решаемой задачи подобная сеть в зависимости от способа возбуждения может трактоваться как узловая или ортогональная. В узловых сетях отправной точкой анализа является пара узлов, а в ортогональных сетях понятия контура и узловой пары используются совместно, дополняя друг друга. Отличительной чертой узловых сетей является обязательная однотипность возбуждающих воздействий на элемен-

ты сети. Для ортогональных сетей возбуждение может носить комбинированный характер, что позволяет рассматривать узловые сети как частные случаи проявления ортогональных сетей [5]. Использование при топологическом описании того или иного типа сети во многом зависит от характера решаемой задачи и, в свою очередь, всецело определяет как способ функционального описания ТКС, так и метод расчета искомых параметров. В работе предложены тензорные модели и методы расчета двухполюсной сети связи, основанные на представлении ее структуры как узловой, так и ортогональной 1-сети.

Пусть при моделировании ТКС в рамках одномерной сети множество узлов $\Psi = \{\psi_i\}$, $i = \overline{1, k}$, сети составляют маршрутизаторы, где k – их общее количество в ТКС, а множество ветвей $\Omega = \{\sigma_{i,j}\}$, $i, j = \overline{1, k}$; $i \neq j$, моделирует n трактов передачи данных в сети связи.

Важную роль в тензорном описании сети связи играет понятие пространства. Объектом рассмотрения тензорного анализа 1-сетей являются анизотропные пространства-структуры, образованные совокупностью контуров и узловых пар [2, 5]. Размерность такого пространства, являясь структурным инвариантом, определяется общим количеством ветвей в сети и равна n . Набор структур, отвечающих различным вариантам соединений n ветвей, можно трактовать как множество частных систем координат во введенном n -мерном пространстве. Общее число базисных (координатных) путей, каждый из которых в частной системе координат определяет координатную ось, может перераспределяться между независимыми контурами (r) и узловыми парами в сети (s) [5], т. е. имеет место тождество

$$n = r + s. \quad (1)$$

Во введенном n -мерном пространстве в качестве моделей ТКС могут выступать одновалентный тензор нагрузок H с компонентами h^i , одновалентный тензор временных задержек передачи данных T с компонентами t_j , а также смешанный тензор второй валентности M , координаты которого рассчитываются исходя из выражения

$$m_j^i = h^i t_j \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где h^i – величина информационной нагрузки в i -м координатном пути, измеряемая в единицах трафика

(ед. т); t_j – величина временной задержки передачи данных в j -м координатном пути, измеряемая в секундах. Каждой структуре сети отвечает свой набор координат (2), при этом количество координатных путей всегда остается равным количеству ветвей n . Учитывая выражение (2) и результаты, полученные в [2–4], следует отметить, что двухвалентный смешанный тензор M , выступающий в качестве модели сети связи, имеет две компоненты: одновалентный контравариантный тензор H и одновалентный ковариантный тензор T , что объясняет способ записи индексов у компонент разнотипных тензоров.

1.1. Ортогональная модель ТКС

В рамках ортогонального представления ТКС [4] определим для каждого элемента сети в качестве возмущающей величины нагрузку h^i , а в качестве величины отклика – задержку t_j , связав между собой эти величины следующей системой уравнений:

$$h^i = l^{ij} t_j, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где l^{ij} – пропускная способность элемента сети, измеряемая в единицах трафика за секунду (ед. т / с).

Форма уравнений (3), характеризующих поведение отдельных элементов сети, исходя из требований постулата первого обобщения Г. Крона [5], должна соответствовать уравнению поведения сети в целом, определив для расчета тензорное уравнение вида

$$H = LT. \quad (4)$$

Система введенных структурных и функциональных инвариантов позволяет использовать для решения поставленной задачи функциональные выражения вида (4), отнесенные к различным координатным системам рассмотрения тензора (2) как модели ТКС. В качестве основных координатных систем будем использовать систему координат ветвей сети и систему координат независимых контуров и пар узлов. Причем в первой из них уравнение (4) принимает векторно-матричную форму

$$H_\theta = L_\theta T_\theta, \quad (5)$$

где H_θ, T_θ – выраженные в виде векторов размерности n проекции одновалентных тензоров соответственно H и T в координатной системе отдельных ветвей сети, а L_θ – проекции тензора L в той же системе координат.

Вид функционального уравнения сети (4) остается неизменным и в системе координат независимых контуров и пар узлов

$$H_{\kappa, n, y} = L_{\kappa, n, y} T_{\kappa, n, y}, \quad (6)$$

где $H_{\kappa, n, y}, T_{\kappa, n, y}$ и $L_{\kappa, n, y}$ – проекции тензоров H, T и L в координатной системе независимых контуров и пар узлов.

Ввиду одинаковой размерности введенных координатных систем существуют однозначные правила преобразования координат тензора (2) из одной системы

координат в другую. В соответствии с принятой алгеброй путей [2–5] правила координатного преобразования носят линейный характер и формализуемы с помощью невырожденной квадратной матрицы размера $n \times n$. Искомая матрица прямого координатного преобразования C определяется из соотношения

$$H_\theta = C H_{\kappa, n, y}. \quad (7)$$

В свою очередь, векторы H_θ и $H_{\kappa, n, y}$ имеют составляющие

$$H_\theta = \begin{bmatrix} h_\theta^1 \\ \vdots \\ h_\theta^i \\ \vdots \\ h_\theta^n \end{bmatrix}; \quad H_{\kappa, n, y} = \begin{bmatrix} H_\kappa \\ H_{n, y} \end{bmatrix},$$

где

$$H_\kappa = \begin{bmatrix} h_\kappa^1 \\ \vdots \\ h_\kappa^j \\ \vdots \\ h_\kappa^r \end{bmatrix}; \quad H_{n, y} = \begin{bmatrix} h_{n, y}^1 \\ \vdots \\ h_{n, y}^p \\ \vdots \\ h_{n, y}^s \end{bmatrix},$$

где h_θ^i – нагрузка в i -й ветви сети; $H_\kappa, H_{n, y}$ – векторы нагрузки, возникающей в контурах сети и поступающей на ее узлы размерностей r и s соответственно; h_κ^j – информационная нагрузка в j -м контуре сети; $h_{n, y}^p$ – внешняя нагрузка, поступающая в сеть (убывающая из сети) через p -ю пару узлов.

Векторы T_θ и $T_{\kappa, n, y}$ имеют размерность n и следующую структуру:

$$T_\theta = \begin{bmatrix} t_\theta^1 \\ \vdots \\ t_\theta^i \\ \vdots \\ t_\theta^n \end{bmatrix}; \quad T_{\kappa, n, y} = \begin{bmatrix} T_\kappa \\ T_{n, y} \end{bmatrix}, \quad T_\kappa = \begin{bmatrix} t_\kappa^1 \\ \vdots \\ t_\kappa^j \\ \vdots \\ t_\kappa^r \end{bmatrix}; \quad T_{n, y} = \begin{bmatrix} t_{n, y}^1 \\ \vdots \\ t_{n, y}^p \\ \vdots \\ t_{n, y}^s \end{bmatrix}.$$

Здесь $t_\theta^i, t_\kappa^j, t_{n, y}^p$ – временные задержки передачи данных в i -й ветви, в j -м контуре и между p -й парой узлов сети. Векторы T_κ и $T_{n, y}$ имеют размерность r и s соответственно.

Ковариантный характер тензора задержек T обуславливает следующий закон координатного преобразования [2]:

$$T_\theta = A T_{\kappa, n, y}, \quad (8)$$

где A – матрица обратного координатного преобразования размера $n \times n$, связанная с матрицей C условием ортогональности

$$A' = (C)^{-1}, \quad (9)$$

где t — символ транспонирования.

Приняв во внимание выражения (4), (7) и (8), тензор L можно классифицировать как дважды контравариантный метрический тензор, проекции которого при смене координатной системы преобразуются следующим образом:

$$L_{\kappa, n, y} = A^t L_{\kappa} A. \quad (10)$$

1.2. Узловая модель ТКС

В узловой модели отправной точкой исследования ТКС есть узлы сети. В сравнении с ортогональным представлением при построении узловой модели имеется ряд существенных особенностей [3]. Во-первых, в случае отсутствия в рассматриваемом направлении отправитель-получатель реального тракта передачи данных в узловой сети вводится мнимая ветвь — ветвь с нулевой пропускной способностью, что приводит к увеличению на единицу размерности введенного пространства, т. е.

$$n_{узл} = n + 1.$$

Во-вторых, в качестве альтернативы пространству ветвей вводится пространство независимых контуров, что приводит к использованию сингулярного аналога матрицы координатного преобразования $A_{n, y}$, соответствующей узловым парам в структуре сети [3].

Исходя из перечисленных особенностей, в рамках узловой модели [3] имеют место выражения

$$H_{n, y} = A_{n, y}^t H_{\kappa};$$

$$L_{n, y} = A_{n, y}^t L_{n, y} A_{n, y};$$

$$T_{\kappa} = A_{n, y} T_{n, y}.$$

1.3. Понятие межузлового пути в одномерной сети

С целью дальнейшей интерпретации полученных решений задачи МПМ введем понятие межузлового пути и базисного межузлового пути в сети по аналогии с основными понятиями теории графов [6].

Определение 1. Межузловым путем в сети называется такая конечная или бесконечная последовательность ветвей

$$P = (\dots, \sigma_{i, j}, \sigma_{j, l}, \dots, \sigma_{k, g}, \dots),$$

в которой каждые две соседние ветви $\sigma_{i, j}$ и $\sigma_{j, l}$ имеют общий концевой узел $\psi_j \in \Psi$.

Далее под межузловым путем между парой узлов ψ_k и ψ_y сети будет пониматься путь конечной длины

$$P^{k, y} = (\sigma_{k, p}, \dots, \sigma_{i, j}, \sigma_{j, l}, \dots, \sigma_{k, g}, \dots, \sigma_{d, y}).$$

В рамках принятой в тензорном анализе сетей алгебры путей любой межузловой путь сети $P^{i, j}$ может быть выражен в виде линейной комбинации, образующих его ветвей в соответствии с их ориентацией. Для древовид-

ной сети (рис. 1) межузловой путь $P_{(1)}^{1,7}$ можно представить следующим образом:

$$P_{(1)}^{1,7} = \sigma_{1,2} + \sigma_{2,4} + \sigma_{4,5} + \sigma_{5,7}.$$

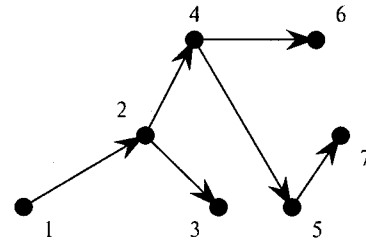


Рис. 1. 1-сеть древовидной структуры

Для многосвязных структур сети путей между заданной парой узлов уже может быть множество, образуя пространство межузловых путей сети по аналогии с пространством ветвей и пространством независимых контуров и пар узлов. Некоторое количество подобных путей образует базис этого пространства.

Определение 2. Базисным межузловым путем в сети называется такой путь между двумя заданными парами узлов, который нельзя задать в виде линейной комбинации иных произвольных межузловых путей.

Индуктивно можно доказать, что количество таких путей (b) в сети определяется из выражения

$$b = r + 1. \quad (11)$$

Действительно, оставляя количество узлов сети постоянным, введение каждой последующей ветви, способствующей образованию контура в сети, приводит к возникновению дополнительного пути из 1 в 7 $P_{(2)}^{1,7}$ (рис. 2)

$$P_{(2)}^{1,7} = \sigma_{1,3} - \sigma_{2,3} + \sigma_{2,4} + \sigma_{4,5} + \sigma_{5,7}.$$

Для одноконтурной сети (рис. 2) количество базисных межузловых путей составляет два — $P_{(1)}^{1,7}$ и $P_{(2)}^{1,7}$. Введение же ветвей между узлами 3 и 5, а также 6 и 7 увеличит количество независимых контуров r до трех, а базисных путей до четырех, придав некоторую свободу их выбору.

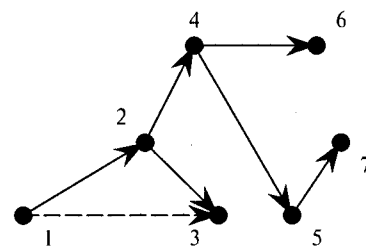


Рис. 2. Одноконтурная 1-сеть

Для трехконтурной сети (рис. 3) в качестве базисных, например, могут выступать следующие четыре пути:

$$\{P_{(1)}^{1,7}, P_{(2)}^{1,7}, P_{(3)}^{1,7}, P_{(4)}^{1,7}\}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} P_{(1)}^{1,7} &= (\sigma_{1,2}, \sigma_{2,4}, \sigma_{4,5}, \sigma_{5,7}); \\ P_{(2)}^{1,7} &= (\sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{4,5}, \sigma_{5,7}); \\ P_{(3)}^{1,7} &= (\sigma_{1,3}, \sigma_{3,5}, \sigma_{5,7}); \\ P_{(4)}^{1,7} &= (\sigma_{1,2}, \sigma_{2,4}, \sigma_{4,6}, \sigma_{6,7}). \end{aligned}$$

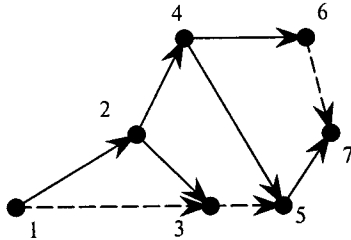


Рис. 3. Трехконтурная 1-сеть

При этом любой другой межузловой путь в сети можно представить в виде линейной комбинации перечисленных базисных. Например, путь

$$P_{(5)}^{1,7} = (\sigma_{1,2}, \sigma_{2,3}, \sigma_{3,5}, \sigma_{5,7})$$

в базисе (12) имеет координаты $[0, -1, 1, 1]$, т. е. может быть представлен через базисные пути следующим образом:

$$P_{(5)}^{1,7} = -P_{(2)}^{1,7} + P_{(3)}^{1,7} + P_{(4)}^{1,7}.$$

В случае, если базис образует другая четверка путей, например, $\{P_{(1)}^{1,7}, P_{(2)}^{1,7}, P_{(3)}^{1,7}, P_{(5)}^{1,7}\}$, будет справедливо выражение

$$P_{(4)}^{1,7} = P_{(2)}^{1,7} - P_{(3)}^{1,7} + P_{(5)}^{1,7}.$$

Решение задачи многопутевой маршрутизации определяет некоторое число путей между заданной парой узлов, время доведения вдоль которых является минимально одинаковым [3, 4]. Общее количество независимых путей, определяющих базис решения задачи МПМ, как отмечалось выше, на единицу превышает число независимых контуров в сети (11).

2. Решение задачи многопутевой маршрутизации

Метод решения задачи многопутевой маршрутизации всецело определяется типом используемой модели ТКС, представленной одномерной ортогональной или узловой сетью.

2.1. Ортогональный метод решения задачи МПМ

На основе предложенной ортогональной модели произведем решение задачи многопутевой маршрутизации с минимально одинаковым для всех путей временем доведения заданного объема данных [4] с последующей интерпретацией полученных решений к задаче ПКП.

По известным величинам пропускной способности ветвей сети L_{θ} , исходя из выражения (10), рассчитывается матрица $L_{\kappa, n.y.}$, которую, в свою очередь, в уравнении (6) удобно представить в виде

$$\begin{bmatrix} H_{\kappa} \\ \vdots \\ H_{n.y.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\kappa, n.y.}^1 & L_{\kappa, n.y.}^2 \\ \vdots & \vdots \\ L_{\kappa, n.y.}^3 & L_{\kappa, n.y.}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{\kappa} \\ \vdots \\ T_{n.y.} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\begin{bmatrix} L_{\kappa, n.y.}^1 & L_{\kappa, n.y.}^2 \\ \vdots & \vdots \\ L_{\kappa, n.y.}^3 & L_{\kappa, n.y.}^4 \end{bmatrix} = L_{\kappa, n.y.}.$$

Компоненты $H_{n.y.}$ вектора $H_{\kappa, n.y.}$ считаются известными, характеризуя величины информационных потоков, поступающих в сеть или убывающих из нее через соответствующие узлы сети. Компоненты T_{κ} вектора $T_{\kappa, n.y.}$ принимаются равными нулю, гарантируя отсутствие контуров (циклов) в путях доведения трафика между заданной парой узлов сети. Ввиду известных величин $L_{\kappa, n.y.}$, $H_{n.y.}$ и T_{κ} из уравнения (13) получаем следующие две системы уравнений:

$$T_{n.y.} = (L_{\kappa, n.y.}^4)^{-1} H_{n.y.} - (L_{\kappa, n.y.}^4)^{-1} L_{\kappa, n.y.}^3 T_{\kappa}; \quad (14)$$

$$H_{\kappa} = L_{\kappa, n.y.}^1 T_{\kappa} + L_{\kappa, n.y.}^2 T_{n.y.}, \quad (15)$$

последовательное решение которых позволяет найти искомые значения компонент вектора H_{θ} из выражения (7), определив тем самым решение задачи многопутевой маршрутизации.

2.2. Узловой метод решения задачи МПМ

Тензорный метод расчета сети с узловым возбуждением, связанный с нахождением вектора нагрузок в ветвях сети и определяющий решение задачи многопутевой маршрутизации, состоит в выполнении следующих пяти этапов [3].

Во-первых, производится расчет вектора нагрузок вдоль пар узлов сети

$$H_{n.y.} = A_{n.y.}^t H_{\theta}^v, \quad (16)$$

где H_{θ}^v — вектор узлового возбуждения ветвей сети.

Во-вторых, определяется узловая часть проекции тензора пропускных способностей в системе координат независимых контуров

$$L_{n.y.} = A_{n.y.}^t L_{\theta} A_{n.y.}. \quad (17)$$

В-третьих, рассчитываются задержки между парами узлов сети

$$T_{n.y.} = (L_{n.y.})^{-1} H_{n.y.}. \quad (18)$$

В-четвертых, производится расчет величин временных задержек в каждой ветви сети

$$T_{\theta} = A_{n.y.} T_{n.y.}. \quad (19)$$

В-пятых, рассчитывается вектор нагрузок в ветвях сети, определяющий окончательное решение задачи МПМ

$$H_g = L_g T_g. \quad (20)$$

2.3. Численный пример решения задачи МПМ

Решение задачи МПМ проведем с использованием ортогональной модели ТКС и одноименного метода расчета.

Пусть необходимо обеспечить многопутевую доставку 100 ед. т. из узла 1 в узел 7 для сети (рис. 3), пропускные способности ветвей которой заданы в виде диагональных элементов матрицы

$$L_g = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

В сети, состоящей из девяти ветвей (В1–В9) и семи узлов (У1–У7), исходя из выражения (1), количество независимых контуров равно трем ($r=3$), а независимых пар узлов – шести ($s=6$). Выбор базисов в системах координат отдельных ветвей и независимых контуров и пар узлов приведен в табл. 1.

Таблица 1

Система координат	Направленность базисного пути, имеющего номер				
	1	2	3	4	5
Ветвей сети	У1–У2	У1–У3	У2–У3	У2–У4	У3–У5
Контуров и пар узлов	У1–У2	У2–У4	У4–У6	убывает из У7	убывает из У6
Система координат	Направленность базисного пути, имеющего номер				
	6	7	8	9	
Ветвей сети	У4–У5	У4–У6	У6–У7	У5–У7	
Контуров и пар узлов	убывает из У5	убывает из У4	убывает из У3	убывает из У2	

Матрицы прямого и обратного координатного преобразования C и A в соответствии с выбранными базисами имеют следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последовательный расчет величин $L_{к.п.у.}$ (10), $T_{п.у.}$ (14), H_k (15) определил в соответствии с выражением (7) решение задачи МПМ в виде вектора информационной загрузки ветвей сети

$$H'_g = [72,6 \ 27,4 \ 14,2 \ 58,4 \ 41,6 \ 7,8 \ 50,6 \ 50,6 \ 49,4].$$

В рамках рассмотренного примера в качестве базисных могут выступать следующие четыре межузловых пути: первый – У1–У2–У4–У6–У7, реализующий доставку 50,58 ед. т.; второй – У1–У2–У4–У5–У7 – 7,8 ед. т.; третий – У1–У2–У3–У5–У7 – 14,25 ед. т. и четвертый – У1–У3–У5–У7 – 27,38 ед. т. Время доведения вдоль каждого из перечисленных путей является одинаково минимальным для данной пары отправитель–получатель и в соответствии с условиями рассматриваемого примера составляет 4,4 с [3, 4].

3. Решение задачи поиска кратчайшего пути

Понятие кратчайшего пути неразрывно связано с принятой метрикой оценки его протяженности (длины), которая, в свою очередь, всецело определяется смыслом решаемой задачи. В рамках рассматриваемых моделей ТКС в качестве длины ветви удобно выбрать величину, обратную ее пропускной способности.

Небольшая размерность приведенного примера позволяет априорно определить в качестве искомого первый путь, являющийся кратчайшим в метрике обратных пропускных способностей. Остальные пути по отношению к кратчайшему определяются как «избыточные».

Интерпретация решений задачи многопутевой маршрутизации заключается в исключении «избыточных» путей доведения пользовательских данных от отправителя к получателю. В результате интерпретации должен остаться единственный путь, являющийся кратчайшим в выбранной метрике.

Исходя из того, что в решении задачи МПМ время доведения вдоль каждого из рассчитанных путей одинаково, а кратчайший путь по определению имеет минимальную длину в принятой метрике, обосновано предположить, что именно межузловой путь, исполняющий наибольшую нагрузку принятого к обслуживанию абонентского трафика, и является кратчайшим. Таким образом, исключив из рассмотрения r путей в конечном

итоге можно однозначно определить искомый кратчайший путь.

Для интерпретации решений задачи МПМ предлагаются две процедуры исключения «избыточных» путей — многошаговая и одношаговая.

3.1. Многошаговая процедура исключения «избыточных» путей (МПИИП)

В начале процедуры происходит исключение ветвей, в которых информационная нагрузка по итогам решения задачи МПМ отсутствует. Структура сети, образованная оставшимися ветвями, принимается к последующему рассмотрению.

В дальнейшем МПИИП носит итерационный характер и основывается на последовательном исключении «избыточных» путей из сети путем удаления из рассмотрения на каждом шаге ветви, нагрузка в которой является ненулевой и минимальной по всем ветвям сети.

Удаление минимально загруженной ветви происходит путем приравнивания к нулю ее пропускной способности. При сохранении прежнего количества узлов в сети, учитывая выражения (1) и (11), число базисных путей уменьшится на один. Далее производится очередное решение задачи МПМ в соответствии с выражениями (7), (14), (15) или (16)–(20) в зависимости от выбранного типа модели ТКС.

В случае, когда минимальное значение информационной нагрузки в ветвях сети равно объему передаваемого трафика, работа процедуры прекращается, определяя окончательное решение задачи ПКП. Количество итераций процедуры исходя из выражения (11) равно $r + 1$, где r — количество независимых контуров в сети, образованной ветвями, задействованными в решении задачи МПМ.

В табл. 2 приведены результаты работы МПИИП. В рамках рассмотренного в подразделе 2.3 примера последовательное исключение из сети ветвей 6, 3, и 2 определило единственный оставшийся путь $У1-У2-У4-У6-У7$ (рис. 3), являющийся кратчайшим в метрике обратных пропускных способностей ветвей.

Таблица 2

№ итерации процедуры	1	2	3	4
№ исключаемой ветви	6	3	2	1
Загруженность ветви	7,8	17,6	39,4	100

3.2. Одношаговая процедура исключения «избыточных» путей (ОПИИП)

Как показали проведенные исследования, в подавляющем большинстве случаев при решении задачи ПКП путем исключения «избыточных» путей в решении задачи МПМ можно ограничиться одной итерацией. Однако выбор в пользу ОПИИП возможен только в том случае, когда в рамках решения задачи МПМ не существует путей одинаковой длины, т. е. отсутствуют пути, вдоль которых обеспечивается доставка равного объема пользовательских данных. С увеличением степени связ-

ности ТКС, количества моделируемых трактов передачи данных, а также с ростом многообразия величин их пропускных способностей вероятность такого исхода существенно снижается.

ОПИИП определяет следующую последовательность действий. Во-первых, необходимо определить в рамках решения задачи МПМ r различных ненулевых минимально загруженных ветвей сети и все ветви с нулевой исполняемой нагрузкой. Во-вторых, приравняв пропускные способности данных ветвей к нулю и оставляя прежним количество узлов сети, тем самым осуществляется переход к сети древовидной структуры, в которой существует лишь один путь между рассматриваемой парой узлов, определяющий решение задачи ПКП.

В рамках приведенного примера одновременное исключение ветвей с номерами 6, 3 и 2 (рис. 3) определит в качестве кратчайшего путь с номерами ветвей 1, 4, 7, 8 и 9 (табл. 1), что полностью отвечает решению, полученному с помощью МПИИП.

4. Сравнительная оценка вычислительной сложности тензорных решений задачи ПКП

Сравнительная оценка вычислительной сложности тензорных решений задачи ПКП будет основываться на оценке вычислительной сложности решений задачи МПМ, полученных с использованием ортогонального и узлового метода расчета. Без потери общности будем использовать одношаговую процедуру исключения «избыточных» путей, так как вычислительная реализация МПИИП ровно в r раз сложнее.

В качестве показателя вычислительной сложности будет использоваться количество элементарных арифметических операций (умножение, сложение), необходимых для реализации того или иного метода. Выбранный показатель чаще всего представляется как функция количества узлов сети [1], но более адекватно показатель вычислительной сложности может быть представлен функцией узлов и ветвей сети.

При моделировании рассматривались только связанные сети без кратных ветвей, что гарантировалось выполнением в процессе моделирования следующего условия:

$$k - 1 \leq n \leq \frac{k(k-1)}{2}.$$

4.1. Оценка вычислительной сложности ортогонального метода расчета

При использовании ортогонального метода непосредственно в расчетах принимают участие выражения (10), (14), (15) и (7).

С учетом диагональной структуры матрицы L_n вычислительная сложность выражения (10) равна $2n^3$.

Сложность выражения (14) с учетом обращения матрицы $L_{k,n,y}^4$ и принимая во внимание, что $T_k = 0$ и в векторе $H_{n,y}$ имеется $s-1$ нулевых элементов, равна $(k-1)^3 + k - 1$ [2, 5].

В соответствии с размерностью матриц, входящих в выражение (15), его сложность составляет $(n-k+1)(2k-3)$.

Для вычисления выражения (7) необходимо произвести $n(n-k+2)$ элементарных операций.

Зависимость общего количества элементарных операций ($V1$) от числа узлов (k) и ветвей n в сети при реализации ортогонального метода расчета приведена на рис. 4.

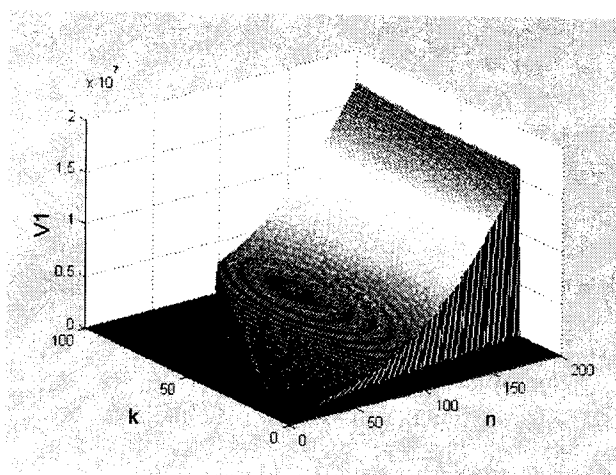


Рис. 4. Вычислительная сложность ($V1$) ортогонального метода расчета

4.2. Оценка вычислительной сложности узлового метода расчета

В случае применения узлового метода при решении задач МПМ и ПКП непосредственно в расчетах принимают участие выражения (16)–(20).

Сложность вычислительной реализации выражения (16) с учетом того, что лишь один компонент вектора H_y^v отличен от нуля, равна $k-1$.

Диагональная структура матрицы L_y определила вычислительную сложность выражения (17), равную $2n_{уз}^2(k-1)$.

Сложность выражения (18) с учетом обращения матрицы $L_{n,y}$ составляет $(k-1)^3 + (k-1)(2k-3)$.

Реализация выражения (19) и (20) требует выполнения соответственно $n_{уз}(2k-3)$ и n элементарных операций.

Зависимость вычислительной сложности реализации узлового метода расчета ($V2$) как функции числа узлов (k) и ветвей (n) в сети приведена на рис. 5.

Сравнительный анализ вычислительной сложности реализации ортогонального и узлового методов расчета при решении задач МПМ и ПКП позволил сделать ряд важных замечаний. Узловой метод имеет существенные преимущества вычислительной реализации по срав-

нению с ортогональным методом расчета, что особенно проявляется с увеличением степени связности узлов сети (рис. 6).

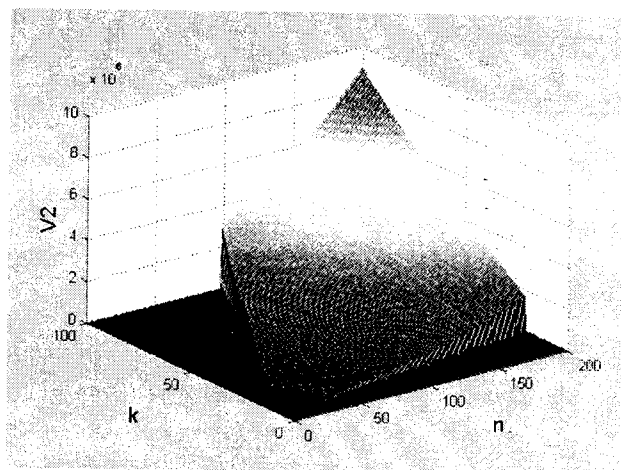


Рис. 5. Вычислительная сложность ($V2$) узлового метода расчета

Лишь для сетей со структурой, близкой к древовидной, где введение мнимой ветви существенно влияет на вычислительную сложность получаемых решений, ортогональный метод расчета имеет минимальное преимущество.

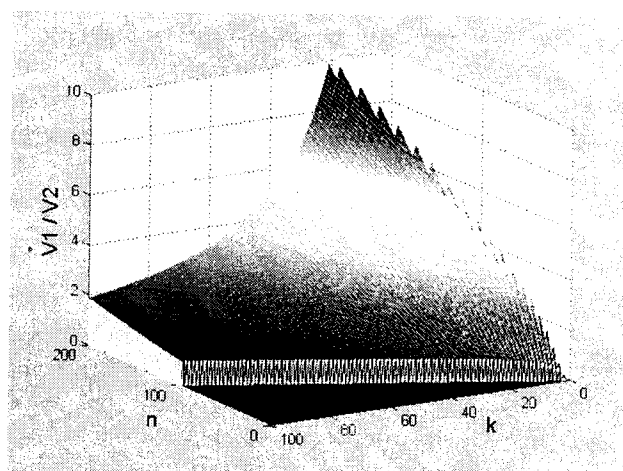


Рис. 6. Соотношение вычислительной сложности ($V1/V2$) ортогонального и узлового методов расчета

Выводы

В работе продемонстрирован подход к решению задачи поиска кратчайшего пути, основанный на тензорном представлении модели ТКС. Решение задачи поиска кратчайшего пути было получено путем интерпретации решений задачи многопутевой маршрутизации, которая заключалась в исключении из получаемых решений «избыточных» путей.

К достоинствам предложенных алгоритмических решений задачи ПКП стоит отнести их наглядность и эффективность программной реализации по сравнению с комбинаторными алгоритмами ПКП – Дijkstra, Беллмана-Форда, Флойда-Уоршелла и др.

Решение задачи поиска кратчайшего пути с помощью узлового метода, как показали результаты сравнительного анализа, имеет существенные вычислительные преимущества в сравнении с ортогональным методом расчета, что особенно проявлялось с ростом размерности и связности моделируемых сетей.

Применение предложенных решений задачи ПКП не ограничивается телекоммуникационными сетями. Полученные результаты могут найти свою реализацию в рамках сетевых моделей систем смежных предметных областей.

Вопросы сравнительного анализа вычислительной сложности предлагаемых процедур и известных комбинаторных решений будут подробно освещены в последующих работах по данной проблематике.

Литература: 1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 544 с. 2. Поповский В.В., Лемешко А.В. Тензорный анализ в задачах системного исследования телекоммуникационных систем // Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 125. С. 157–165. 3. Лемешко А.В. Тензорный синтез адаптированного алгорит-

ма многопутевой маршрутизации с контролем качества в гибридных телекоммуникационных системах. Праці УНДІРТ. Випуск № 2 (30). Одеса, Видання УНДІРТ, 2002. С. 15–23. 4. Лемешко А.В. Особенности моделирования двухполюсной сети связи ортогональной сетью в рамках тензорного анализа // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 128. С. 16–25. 5. Крон Г. Тензорный анализ сетей. М.: Сов. радио, 1978. 719 с. 6. Оре О. Теория графов. 2-е изд. М.: Наука, 1980. 336 с.

Поступила в редколлегию 29.11.2002 г.



Лемешко Александр Витальевич, кандидат технических наук, докторант Харьковского института Военно-Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба. Научные интересы: системный анализ и оптимизация телекоммуникационных сетей.

Адрес: Харьков-165, ул. Ключовская, 228. Контактные телефоны: 30-82-19 (раб.), 32-65-06 (дом.).