

УДК 517.925 : 519.83

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДО ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ЕПІДЕМІЄЮ В РАМКАХ SIRV-МОДЕЛІ

Ясько Д.В.

e-mail: dmytro.iasko@nure.ua

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук Луханін В.С.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

This work applies game theory to the SIRV epidemic model to study individual vaccination decisions. Each individual maximizes their payoff by weighing the cost of vaccination against the risk of infection derived from the SIRV model dynamics. The Nash equilibrium vaccination coverage is analytically derived and compared with the socially optimal coverage. The model demonstrates the “price of anarchy” effect: self-interested behavior leads to systematically lower vaccination rates than the social optimum. The magnitude of this gap depends on the perceived relative risk of vaccination and has direct implications for public health policy design.

Математичне моделювання пандемій традиційно зосереджується на детерміністичних моделях, які описують динаміку захворюваності, спираючись на закони масової дії між компартментами, але розглядають популяцію як однорідну масу. Водночас рішення про вакцинацію приймаються індивідами самостійно, виходячи з власної оцінки ризиків та наявної інформації про поширення хвороби. Теорія ігор надає формальний апарат для аналізу таких стратегічних взаємодій і дозволяє пояснити, чому охоплення вакцинацією часто виявляється нижчим за суспільно необхідний рівень.

Одним з найбільш поширених підходів до моделювання поширення інфекцій є SIR-модель, яка розподіляє популяцію на три основні групи: сприйнятливих до хвороби (S), інфікованих (I) та тих, що одужали (R) і припускає однорідне перемішування між цими групами. У базовому варіанті модель враховує лише природний розвиток епідемії без втручання з боку системи охорони здоров'я. Однак у реальних умовах на перебіг епідемії впливають додаткові фактори, такі як вакцинація та карантинні обмеження, які принципово змінюють швидкість переходів між компартментами.

У даному дослідженні розглянуто розширену SIRV-модель, яка доповнюється рівнянням для вакцинованих осіб (V), що дозволяє явно відстежувати частку імунізованих та їхній внесок у гальмування передачі. Динаміка захворюваності описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI - \upsilon S + \sigma R, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \mu I,\end{aligned}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R - \sigma R,$$

$$\frac{dV}{dt} = \upsilon S - \mu V,$$

де β – коефіцієнт передачі інфекції;

γ – швидкість одужання;

υ – швидкість вакцинації;

μ – природна смертність;

σ – швидкість втрати природного імунітету [1].

Базове репродуктивне число

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}$$

визначає середню кількість вторинних заражень, спричинених одним інфікованим у повністю сприйнятливій популяції, і тим самим визначає інтенсивність поширення за відсутності втручань.

Ігровий компонент формулюється наступним чином. Кожен індивід обирає стратегію $P \in [0, 1]$ – ймовірність вакцинації, що є його єдиним стратегічним ступенем свободи у грі з нескінченною кількістю гравців. При загальному охопленні вакцинацією p у популяції функція виграшу індивіда має вигляд:

$$E(P, p) = -r \cdot P - \pi_p (1 - P),$$

де $r = \frac{r_v}{r_i}$ – відносний ризик вакцинації;

π_p – ймовірність зараження невакцинованого індивіда при охопленні вакцинацією p [2].

Перший доданок відображає витрати від вакцинації, а другий – очікувані витрати від зараження для індивіда, який відмовився від щеплення.

Рівновага Неша P^* – стратегія, від якої жоден індивід не зацікавлений відхилятися за умови, що всі інші дотримуються тієї самої стратегії. Вона визначається з умови байдужості між вакцинацією та відмовою від неї [2]:

– $\pi_{P^*} = r$, якщо $r < \pi_0$;

– $P^* = 0$, якщо $r \geq \pi_0$.

Тут $\pi_0 = 1 - \frac{1}{R_0}$ – ймовірність зараження за відсутності вакцинації, яка

безпосередньо виражається через R_0 з SIRV-моделі. При $r < \pi_0$ існує змішана рівноважна стратегія $0 < P^* < 1$, за якої індивіди вакцинуються з ймовірністю, достатньою для вирівнювання граничних витрат обох стратегій.

Суспільно оптимальне охоплення p_{opt} відповідає порогу колективного імунітету, тобто мінімальному рівню охоплення, при якому хвороба не

може поширюватися в популяції, та визначається мінімізацією загальних витрат популяції:

$$p_{opt} = 1 - \frac{1}{R_0} = \pi_0.$$

Зіставлення P^* та p_{opt} виявляє ключовий результат. Оскільки при рівновазі Неша $\pi_{P^*} = r < \pi_0$, а функція π спадна, то $P^* < p_{opt}$ для будь якого $0 < r < \pi_0$. Це явище відоме як «ціна анархії» [3]: раціональні індивіди використовують колективний імунітет, створений іншими, і в рівновазі вакцинуються менше, ніж потрібно суспільству. Аналітичний вираз для розриву:

$$\Delta p = p_{opt} - P^* = \pi_0 - r$$

є лінійно зростаючою функцією π_0 (тобто зростає з R_0) і лінійно спадною функцією r . Отже, для більш контагіозних захворювань або при нижчому сприйнятому ризику вакцинації розрив між рівноважним та оптимальним охопленням є більшим.

Таким чином, інтеграція теорії ігор із SIRV-моделлю дозволяє аналітично обґрунтувати, чому добровільна вакцинація системно не досягає суспільного оптимуму. Отриманий результат підтверджує доцільність державних заходів – інформаційних кампаній зі зниження r та економічного стимулювання вакцинації – для наближення рівноважного охоплення до порогу колективного імунітету [4].

Список використаних джерел:

1. Ясько Д. В. Аналіз поширення пандемій за допомогою математичних моделей. *Радіoeлектроніка та молодь у XXI столітті : матеріали 29-го Міжнар. молодіж. форуму*, 16–19 квітня 2025 р. Харків, 2025. Т. 7. С. 343–345.
2. Bauch C. T., Earn D. J. D. Vaccination and the theory of games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2004. Vol. 101, No. 36. P. 13391–13394.
3. Laguzet L., Turinici G. Individual Vaccination as Nash Equilibrium in a SIR Model with Application to the 2009-2010 Influenza A (H1N1) Epidemic in France. *Bulletin of Mathematical Biology*. 2015. Vol. 77, No. 10. P. 1955–1984.
4. Chang S. L., Piraveenan M., Pattison P., Prokopenko M. Game theoretic modelling of infectious disease dynamics and intervention methods : a review. *Journal of Biological Dynamics*. 2020. Vol. 14, No. 1. P. 57–89.