

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інфокомунікацій
(повна назва)

Кафедра інформаційно-мережної інженерії
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

другий (магістерський)
(рівень вищої освіти)

Розробка та реалізація методів узгодженості ймовірнісних моделей для
ДКП коефіцієнтів JPEG зображень
(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ІМІМ-19-2
Котов Д.О.
(прізвище, ініціали)

Спеціальності 172 Телекомунікації та
радіотехніка
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми: Освітньо-наукова
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Інформаційно-
мережна інженерія
(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Ширяєв А.В.
(прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри

(підпис)

Безрук В.М.
(прізвище, ініціали)

2021 p.

Не містить відомостей заборонених до відкритого публікування.

Студент _____ /Котов Д.О.

Керівник _____ /Ширяєв А.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ *інфокомунікацій* _____

Кафедра _____ *інформаційно-мережної інженерії* _____

Рівень вищої освіти _____ *другий (магістерський)* _____

Спеціальність _____ *172 Телекомунікації та радіотехніка* _____

(код і повна назва)

Тип програми _____ *Освітньо-наукова* _____

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня-наукова програма _____ *Інформаційні мережі зв'язку* _____

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____

(підпис)

«_____» _____ 2021 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові _____ *Котову Дмитру Олеговичу* _____

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _____ *Розробка та реалізація методів оцінювання* _____

_____ *узгодженості ймовірнісних моделей для ДКП коефіцієнтів JPEG зображень* _____

затверджена наказом по університету від «12» березня 2021 року № 350 Ст _____

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії *19 травня 2021 р.* _____

3. Вихідні дані до роботи *Провести ідентифікацію ймовірнісних розподілів ДКП* _____

_____ *коефіцієнтів. Розрахувати параметри розподілів (положення та масштабу) та* _____

_____ *побудувати альтернативні криві для різних зображень. Провести перевірку гіпотези* _____

_____ *про теоретичний розподіл за допомогою критерію узгодженості. Для проведення* _____

_____ *статистичної обробки даних використовувати мову програмування R.* _____

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

_____ *1. Зчитування та реєстрація зображень, формат JPEG* _____

_____ *2. Гамма розподіл, апарат ймовірнісних Р Р графіків* _____

_____ *3. Статистичні критерії узгодження, рекспериментальних даних* _____

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів)

Слайди у форматі Power Point

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	<i>Ознайомлення із завданням. Уточнення ТЗ.</i>	25.01.2021	
2	<i>Підбір літератури за темою роботи.</i>	27.01 – 27.01.21	
3	<i>Виконання розділу 1</i>	01.02 – 01.02.21	
4	<i>Виконання розділу 2</i>	05.02 – 09.02.21	
5	<i>Виконання розділу 3</i>	10.02 – 17.03.21	
6	<i>Виконання розділу 4</i>	20.03 – 15.04.21	
7	<i>Виконання розділу 5</i>	30.04 – 07.05.21	
8	<i>Оформлення пояснювальної записки</i>	09.05 – 12.05.21	
9	<i>Оформлення презентаційного матеріалу, підготовки до захисту у ЕК</i>	12.05.2021 28.04 – 18.05.21	

Дата видачі завдання _____ 25.01.2021 _____

Студент _____

(підпис)

Керівник роботи _____

(підпис)

доц. Ширяєв А.В.

(посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 93 с., 26 рис., 3 табл., 21 джерел, 2 додаток.

Об'єкт дослідження – ймовірнісні розподіли ДКП коефіцієнтів JPEG зображень.

Мета роботи – розробка та реалізація методів визначення узгодженості ймовірнісних моделей ДКП коефіцієнтів JPEG зображень та оцінювання їх параметрів

Результати, які були отримані шляхом дослідження підтверджують, що форма емпіричного розподілу ДКП коефіцієнтів визначається саме структурними особливостями певного зображення. Тому для коректного врахування при прогнозуванні якості стиснених JPEG зображень слід використовувати адаптивні моделі розподілу ДКП коефіцієнтів.

В роботі проводиться ідентифікація розподілу ДКП коефіцієнтів. Такими розподілами є: двобічний гама розподіл та двобічний бета розподіл другого роду. Були проведені експериментальні дослідження, що підтверджують отримані в роботі теоретичні висновки.

СТИСНЕННЯ З ВТРАТАМИ, ДИСКРЕТНЕ КОСИНУСНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ, JPEG, ДВОБІЧНИЙ ГАМА РОЗПОДІЛ, ДКП КОЕФІЦІЄНТИ, МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ МОМЕНТІВ, БЕТА РОЗПОДІЛ ДРУГОГО РОДУ, ТЕКСТУРНЕ ЗОБРАЖЕННЯ, МОНОТОННЕ ЗОБРАЖЕННЯ

THE ABSTRACT

Explanatory note: 93 p., 26 fig., 3 tab., 21 sources, 2 app.

The object of this work is probability distributions of the DCT coefficients of JPEG images.

The purpose of the work is design and implementation of methods for assessing the fit of probability models for the DCT coefficients of JPEG images.

The conducted research confirms that shape of the empirical distribution of the DCT coefficients is determined by structural peculiarities of a certain image. Thus, for correct consideration, while predicting the quality of compressed JPEG images the adaptive distribution models of the DCT coefficients should be used.

The thesis identifies the distribution of the DCT coefficients. Such distributions are the gamma distribution and the beta distribution of the second type.

LOSSY COMPRESSION, DISCRETE COSINE TRANSFORM, JPEG, GAMMA DISTRIBUTION, DCT COEFFICIENTS, MODIFIED METHOD OF MOMENTS, BETA DISTRIBUTION OF THE SECOND TYPE, TEXTURE IMAGES, MONOTONE IMAGES

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ.....	9
ВСТУП.....	10
1 ЦИФРОВІ ЗОБРАЖЕННЯ.....	12
1.1 ЗЧИТУВАННЯ ТА РЕЄСТРАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ.....	12
1.2 ФОРМАТ JPEG.....	16
1.3 ДИСКРЕТНЕ КОСИНУСНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	20
2 МЕТОД МОМЕНТІВ ПІРСОНА.....	26
3 ГАММА РОЗПОДІЛ.....	35
3.1 ВИЗНАЧЕННЯ.....	35
3.2 МОМЕНТИ РОЗПОДІЛУ ТА ІНШІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	38
3.3 ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ГАММА-РОЗПОДІЛУ.....	43
3.4 ВИПАДОК З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	44
4 АПАРАТ ІМОВІРНІСНИХ <i>P-P</i> ГРАФІКІВ.....	49
4.1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ.....	49
4.2 АЛЬТЕРНАТИВНІ КРИВІ.....	53
5 СТАТИЧНІ КРИТЕРІЇ УЗГОДЖЕННЯ.....	55
5.1 КРИТЕРІЙ ПІРСОНА.....	55
5.2 КРИТЕРІЙ КОЛМОГорова-СМІРНОВА.....	58
6 РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	59
6.1 РОЗРАХУНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛІВ.....	59
6.2 ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ УЗГОДЖЕННЯ ЙМОВІРНІСНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДКП КОЕФІЦІЕНТІВ JPEG ЗОБРАЖЕНЬ.....	68
6.3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ВІЛСОНА-ХІЛФЕРТІ.....	78
<u>ВИСНОВКИ.....</u>	<u>80</u>
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ.....	81
ДОДАТОК А.....	83
СЛАЙДИ ПРЕЗЕНТАЦІЇ.....	83
ДОДАТОК Б.....	90
ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ АТЕСТАЦІЙНОЇ РОБОТИ.....	90

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

DCT – (discrete cosine transform) дискретне косинусне перетворення.

ПЗЗ – пристрій з зарядовим зв'язком.

ISO – міжнародна організація зі стандартизації.

ДКП – дискретне косинусне перетворення.

JPEG – (Joint Photographic Experts Group) [растровий](#) формат зображень.

YCrCb – сімейство колірних просторів. Y - компонента яскравості, C_b і C_r є синьою і червоною кольороворізними компонентами.

P-P – (probability-probability) графік імовірності.

Q-Q – (quantile-quantile) графік імовірності.

SECAM – (Séquentiel couleur à mémoire) послідовний колір з пам'яттю.

PAL – (Phase Alternating Line) порядкова зміна фази.

NTSC – (National Television System Committee) Національний комітет з телевізійних систем.

ВСТУП

Інтерес до цифрової обробки зображень визначається двома основними областями її використання, якими є підвищення якості зображень для покращення їх візуального сприйняття людиною та обробка для їх зберігання, передачі та представлення в автономних системах машинного зору [1].

Термін "зображення" часто використовують для позначення художнього образу, наприклад, літературне зображення, графічне зображення і т.д. Зображення – об'єкт, образ, явище, в тій чи іншій мірі подібне (але не ідентичне) зображуваному або сам процес його створення. Зображенням в математичному сенсі називають результат функціонального перетворення. Перетворення (відображення) множини X безліч Y позначають $f: X \rightarrow Y$. Якщо для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $y \in Y$, то $y = f(x)$. Для деякого прообразу $Z \subseteq X$ $f(Z)$ є зображенням, або образом [2].

Говорячи про цифрові зображення, мають на увазі цифрові (дискретні) образи. У контексті цієї роботи цифровим зображенням (або просто зображенням) називають цифрові сигнали, отримані в результаті деяких відображень. У більшості випадків розглядається окремий випадок цифрових сигналів – цифрові графічні зображення. Відзначимо, що цифрові сигнали в більшості випадків є образами реальних фізичних процесів; можуть мати тільки дискретні, в заданому діапазоні, значення; завжди мають кінцеву область визначення. Слід зазначити, що цифрові графічні зображення є окремим випадком багатовимірних цифрових сигналів [2].

Той факт, що не менше ніж 90% інформації людина отримує за допомогою зору, давно перетворився на банальне твердження, проте не втратив своєї значимості. Більш того, обсяги зорової інформації, яку доводиться отримувати, сприймати і аналізувати, постійно зростають. Все більша роль при цьому відводиться технічним системам обробки і аналізу відеоінформації – як з метою перетворення і видозміни даних, що надходять для безпосереднього

надання людині, так і з метою автоматичного їх аналізу та вилучення інформації, в тому числі для формування подальшої реакції [2].

Число областей, в яких вихідні дані надходять у вигляді зображень, величезна. Тут і різні системи спостереження, технічного зору, моніторингу, відеотелефонії, які реєструють і передають величезні обсяги відеоданих, і різні автономні системи (роботи), які приймають рішення на основі аналізу відеоінформації, і персоналізоване телевізійне мовлення, і поліграфія зі значно збільшеним об'ємом ілюстрацій в друкованій продукції, і медицина, і Інтернет, і багато інших напрямків. При цьому поряд із значним підвищенням рівня розвитку техніки, саму істотну роль відіграють методи обробки відеоінформації. Вони забезпечують поліпшення зображень для їх найкращого сприйняття, стиснення відеоданих для зберігання і передачі по каналах зв'язку, а також аналіз, розпізнавання та інтерпретацію зорових образів для прийняття рішень і управління поведінкою автономних технічних систем. Широке поширення як професійних, так і побутових засобів фото і відеореєстрації, а також досить потужних обчислювальних машин, призвело до появи різноманітних програмних засобів обробки зображень. Вони надають багаті можливості перетворення і поліпшення даних [2].

1 ЦИФРОВІ ЗОБРАЖЕННЯ

1.1 Зчитування та реєстрація зображень

Більшість зображень, які нас цікавлять є двумірними відображеннями сцени що спостерігається (як правило двох або трьох-мірної), виникаючої як результат реєстрації променевої енергії з спостерігаючої сцени, за допомогою деякого пристрою – сенсора (або декількох сенсорів у один і той же час) [1].

Ми припускаємо, що реєструємий сенсором сигнал виникає в результаті взаємодії джерела освітлення з елементами зображуваної сцени в умовах ефектів відзеркалення та поглинання енергії цього джерела. Беремо слова «освітлення» та «сцена» в лапки, що б підкреслити той факт, що вони мають більш взаємний характер ніж зазвичай, коли джерело видимого світла освітлює звичайну, трьохмірну побутову сцену. Наприклад, освітлення не тільки може породжуватися джерелом другого діапазону електромагнітного випромінювання, наприклад радіолокаційного, інфрокрасного або рентгенівського, але також походить від менш традиційних джерел як наприклад, ультразвукового або навіть віртуального, синтезованого компютерною програмою [1].

В ролі елементів сцени можуть виступати знайомі предмети, але цілком можуть бути і молекули, структури підземних пластів або головний мозок людини. В залежності від природи джерела та особливостей сцени, енергія освітлення відзеркалюється від об'єктів сцени або проходить скрізь них. Прикладом першого виду може бути світло, відображене від поверхні предметів. Другий вид взаємодії займає місце, наприклад, при пропусканні рентгенівських лучів крізь тіло пацієнта для отримання діагностичного знімку на плівці [1].

На рис. 1.1 зображені три основні схеми розміщення чутливих елементів (сенсорів), які використовується для перетворення енергії «освітлення» в

цифрове зображення. Сама ідея перетворення дуже проста: падаюча енергія перетворюється в напругу завдяки поєднанню матеріалу, який володіє чуттєвістю до певного виду випромінювання та прикладеної до нього електричної енергії [1].

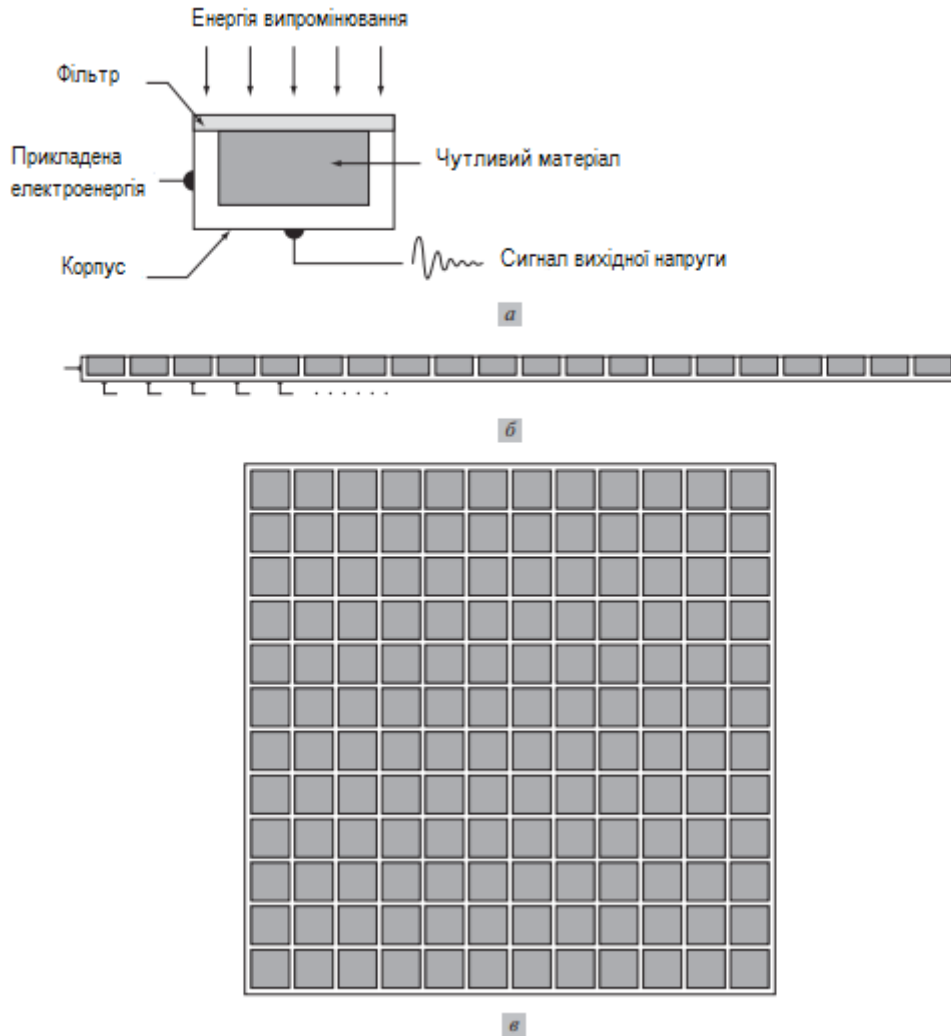


Рисунок 1.1 – (а) одинарний чуттєвий елемент; (б) лінійка чуттєвих елементів; (в) матриця чуттєвих елементів.

На рис. 1.1 показані компоненти одиночного сенсора (чуттєвого елементу). Ймовірно, більш відомим сенсором такого типу є фотодіод, виготовлений з напівпровідникового матеріалу (кремнію), напруга вихідного сигналу якого пропорціональна освітленості. Установка фільтра перед

чуттєвим елементом забезпечує вибірковість сенсора. Наприклад, якщо установити перед сенсором зелений пропускаючий фільтр, то вихідний сигнал буде вище для зеленої ділянки видимого спектру ніж для усіх інших [1].

Більш частіше ніж одинарний сенсор для зчитування зображень використовують одномірний масив сенсорів, звичайно розміщених уздовж прямої, як це показано на рис. 1.1(б). Така лінійка забезпечує одночасну реєстрацію елементів зображення в одному напрямі (умовно кажучи по рядку), а переміщення усієї лінійки в перпендикулярному напрямі дозволяє отримати усі рядки зображення [1].

На рис. 1.1(в) зображено розташування окремих сенсорів у формі двомірного масиву (матриці). Чисельні, електромагнітні, та деякі ультразвукові пристрої вводу даних сучасних систем обробки зображень використовують саме матрицю сенсорів. Така ж конструкція використовується у подавляючій кількості цифрових камер, у яких типічним чуттєвим пристроєм є матриця на основі пристроїв з зарядовим зв'язком (ПЗЗ), які випускаються у вигляді монолітної конструкції, об'єднуючої 4000x4000 елементів (і більше) з широким діапазоном чуттєвих якостей. ПЗЗ матриці широко використовуються в цифрових фото- та відеокамерах, а також у інших світлочуттєвих пристроях [1].

Рис. 1.2 ілюструє основний спосіб використання матриці сенсорів. Тут зображено, що енергія, випромінена джерелом освітлення, відзеркалюється від об'єкта сцени. Перша функція, виконувана системою формування зображення, полягає в тому, щоб зібрати енергію що надходить, та сфокусувати її на площині зображення. Якщо для освітлення використовується джерело видимого світла, то на вході системи формування зображення використовується оптична лінза, яка проектує сцену що спостерігається на площині зображення. Поєднана з цією площиною чуттєва матриця генерує набір вихідних сигналів, кожен із яких пропорційний інтегралу світлової енергії, прийнятої відповідним сенсором. За допомогою комплексної цифрової та аналогової електроніки ті вихідні сигнали по черзі перетворюються у відеосигнал. Той факт, що реєстрація двомірного сигналу реалізується дискретно розташованими в

просторі сенсорами, забезпечують просторову дискретизацію сигналу; квантування його здійснюється у наступному блоці формування зображення. На виході отримуємо цифрове зображення, показане на рис. 1.2 [1].

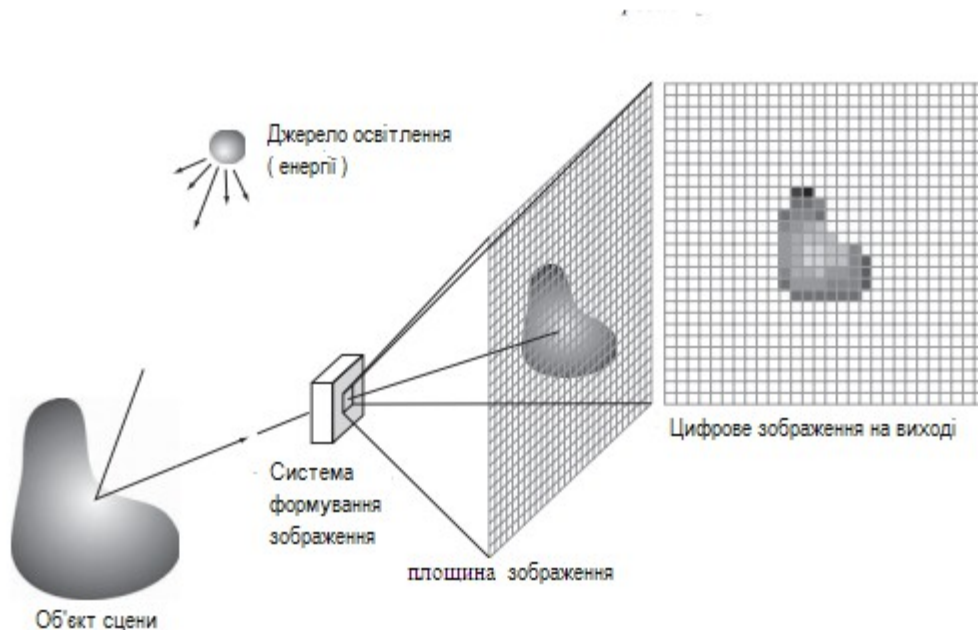


Рисунок 1.2 – Процес реєстрації цифрового зображення

1.2 Формат JPEG

У 1990 році об'єднаною групою експертів в області фотографії (*Joint Photographic Experts Group, JPEG*), створеною при Міжнародній організації по стандартах (ISO), була запропонована схема стиснення півтонових і кольорових зображень, яка згодом завоювала визнання як стандартний метод обробки нерухомих зображень, що отримав назву JPEG [4].

Даний метод стиснення зображень дозволяє досягти дуже високих коефіцієнтів стиску. Наприклад, 14-Мбайтний файл зі сканера або цифрової фотокамери можна стиснути приблизно до 1.2 Мбайт. Проте слід зазначити, що JPEG передбачає стиснення зображення з втратами. А це, зокрема, означає, що

для досягнення високого ступеня стиснення алгоритм так змінює вихідні дані, що після стиснення і відновлення зображення, воно буде відрізнятися від вихідного [4].

При розробці цього алгоритму стиснення передбачалося виконання наступних вимог:

1. Можливість адаптивного вибору параметрів для оптимізації співвідношення стиснення-якість відновленого зображення в найширшому діапазоні.

2. Універсальність процедури обробки зображень будь-яких розмірів, з будь-якої колірної гами; не повинно бути обмежень за складністю сюжету і статистичними властивостями.

3. Прийнята складність обчислень перетворення зображень, що реалізуються на комп'ютерах різної потужності з відповідним програмним забезпеченням.

4. Наявність наступних операційних режимів програми стиснення:

- просторово-поступальної обробки, при якій зображення, можливо розбите на блоки, обробляється зліва направо і зверху вниз;

- обробки з послідовним поглибленням чіткості, при якій спостерігач отримує на екрані спочатку грубе наближення, а потім програма здійснює циклічне сканування зображення, з кожним циклом підвищуючи його чіткість, додаючи високочастотні компоненти;

- можливості стиснення без втрат, що гарантує повне відновлення інформації про кожному пікселі при зворотній обробці, навіть якщо ступінь стиснення, виявляється невеликою;

- забезпечення багаторівневого кодування, при якому чіткість зображення пов'язана не тільки з просторово-частотними діапазонами (наприклад, номерами Z -впорядкованих компонент унітарного перетворення), але і з рівнем точності передачі (або номером біта двійкового представлення величин переданих компонент) [4].

Відповідно до цих вимог стандарт JPEG не містить вказівок виконання жорсткої послідовності операцій обробки, а передбачає їх вибір за бажанням користувача [4].

Початкове зображення відповідно до стандарту може бути багатокомпонентним, де кожна i -та компонента являє собою прямокутний масив даних з розмірністю $X_i \times Y_j$, причому X_i і Y_j не можуть перевищувати величину 2^{16} [4].

Алгоритм JPEG стискає кольорові зображення в кілька етапів. Перш за все зображення з кольорового простору RGB переводиться в простір YCrCb, що дозволяє підвищити ефективність стиснення. Це пов'язано з тим, що ще при розробці кольорових телевізійних стандартів (PAL, SECAM, NTSC) було виявлено, що відеосигнал можна розділити на три компоненти Y, Cr і Cb. Причому складова Y містить в цьому випадку інформацію про яскравість, а Cr і Cb - про колір. Таке рішення багато в чому в той час було вибрано з метою збереження сумісності з чорно-білим телебаченням. Проте у нього були й інші переваги. Виявилось, що система зору людини виключно чутлива тільки до складової Y і менш чутлива до двох інших (Cr і Cb). Іншими словами, повна і детальна яркостна інформація навіть при дуже поганій кольоровості дозволяє отримати зображення цілком прийнятної якості. Саме ця особливість людського зору використовується в методі JPEG при виділенні «зайвої» інформації, оскільки найважливіша для людського сприйняття яскравості інформація відділяється від менш суттєвої – колірної [4].

Після переходу до простору YCrCb виконується так зване проріджування даних кольоровості. Так, при проріджуванні відкидаються Cr і Cb- компоненти рядків і стовпців пікселів з певними номерами. Наприклад, при проріджуванні з коефіцієнтом 2: 1: 1 буде відкидатися інформація про колір для кожного другого рядка і кожного другого стовпчика пікселів, в результаті чого буде втрачено до 75% даних про колір. Втім, в деяких випадках проріджування може і не виконуватися (1: 1: 1) [4].

У стандарті JPEG обмовляється, що стиснення зображень може здійснюватися за допомогою квантування дискретного косинусного перетворення (ДКП) [4].

ДКП виконується окремо для каналів Y, Cr і Cb. Обробка ведеться блоками 8×8 пікселів, тобто відразу обробляється 64 пікселя. Такий розмір блоку з великою ймовірністю повинен містити пікселі близького кольору. ДКП є окремим випадком перетворення Фур'є з базовими функціями у вигляді косинусоїду. При виконанні цієї операції інформація про 64 вихідних пікселя перетворюється в матрицю з 64 коефіцієнтів, що характеризують властивості вихідних пікселів (ДКП переводить колір в частотну область). Конкретний вибір того чи іншого швидкого алгоритму обчислення ДКП залишений на розсуд розробників прикладних програм [4].

Після отримання матриці коефіцієнтів виконується квантування і кодування за методом Хаффмана. Саме в результаті квантування відбувається основна втрата даних, оскільки результат округляється до найближчого цілого, а, наприклад, перетворені в нулі відліки не можна відновити при зворотному перетворенні [4].

Вибір і застосування конкретних таблиць квантування залишений на розсуд користувачів, оскільки вони можуть бути оптимізовані для конкретних прикладних програм. Однак стандарт JPEG вимагає застосування для всіх блоків кожного масиву компонент зображення однієї і тієї ж таблиці квантування [4].

Як вже було сказано вище, основним недоліком такого методу кодування є використання єдиної таблиці квантування, що при відносно великих коефіцієнтах стиснення викликає спотворення дрібних деталей, виникнення ехосигналів при різких переходах яскравості і кольору, виникнення блокової структури [4].

Зазначені дефекти можуть бути істотно зменшені, якщо застосовувати різні таблиці квантування в залежності від складності рельєфу в кожному блоці, що піддається ДКП [4].

Операція зміни таблиці квантування може здійснюватися в такий спосіб. При стисненні зображення після ДКП та квантування коефіцієнтів початково обраної жорсткої таблиці квантування виконується зворотне перетворення пікселів блоку і їх порівняння з вихідними. Якщо отримані при цьому помилки перетворення виявляються значними, то таблиця квантування змінюється на менш жорстку і процес перетворення повторюється. При цьому одночасно з даними про квантовані коефіцієнти ДКП передається також номер застосованої таблиці квантування [4].

При відновленні зображення перелічені вище кроки виконуються в зворотному порядку.

Таким чином, можливий ступінь стиснення залежить як від типу зображення, так і від типів застосовуваних матриць квантування. Зображення, в яких сусідні пікселі мало відрізняються один від одного, стискаються краще. Збільшення розміру матриці квантування приводить до підвищення ступеня стиснення[4].

1.3 Дискретне косинусне перетворення

Одним з дискретних ортогональних перетворень, яке широко використовується при стисненні цифрових зображень з втратами, є дискретне косинусне перетворення (ДКП). Зокрема, на використання такого перетворення для стиснення зображень орієнтований широко розповсюджений стандарт JPEG, який був запропонований в 1992 році [3].

Основний етап процедури стиснення цифрових зображень заключається в перетворенні невеликих блоків зображень за допомогою двомірного ДКП. Обробка ведеться блоками 8x8 пікселів. Вибір ДКП у якості стандартного рішення трактується для зображень з сильно корельованими відліками (коефіцієнт кореляції $> 0,7$), ефективність ДКП у сенсі компактності подання даних схожа з перетворенням Карунена-Лоєва (це перетворення є оптимальним

у тому сенсі, що воно ортонормоване та гарантує некорелювання коефіцієнтів перетворення – елементів яскравості зображень) [3].

Обробка кожного блоку виконується незалежно та заключається у виконанні ДКП по рядкам та стовпчикам блоку, яке має вигляд:

$$F(u, v) = \frac{c(u)c(v)}{2} \times \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \times \cos\left(\frac{2x+1}{8} \times u \times \pi\right) \times \cos\left(\frac{2y+1}{8} \times v \times \pi\right) \quad (1.1)$$

У виразі (1.1) множник $c(u)$ є нормуючим та дорівнює $1/\sqrt{2}$ при $u = 0$ або одиниці для усіх інших значень індексу [3].

Також, на практиці використовують так звані швидкі алгоритми виконання косинусного перетворення. Відомі з літератури алгоритми швидких перетворень в базисах косинусних функцій, хоча і відокремлюються меншим числом операцій множення, але потребують додаткових перекомпановок після кожної ітерації алгоритму. Одномірне косинусне перетворення може бути обчислене через одномірне перетворення Хартлі. При цьому, на початку виконується перестановка елементів вектору вихідних даних таким чином, що першу половину послідовності складають непарні елементи, а другу половину послідовності – парні елементи у порядку зростання номерів, а потім виконується одномірне перетворення Хартлі над модифікованим вектором [6]:

$$H_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \text{cas}\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), k = 0, \dots, N-1 \quad (1.2)$$

де N – послідовність дійсних чисел h_0, h_1, \dots, h_{N-1} ,

$$\text{cas}[\dots] = \cos[\dots] + \sin[\dots].$$

Процедура зворотного косинусного перетворення відрізняється від прямого алгоритму іншою послідовністю обчислень [3].

До одного з незручностей косинусного перетворення можна віднести: негнучкі алгоритми для різного розміру ядра, тощо [3].

Зауважимо, що строго обумовлене двовимірне косинусне перетворення не володіє роздільним за координатами ядром, тому виконання двовимірного косинусного перетворення з метою скорочення обсягу обчислень може бути виконано як модифіковане перетворення рядково-стовпчиковим методом, подібно до того, як роблять при виконанні двовимірного перетворення Хартлі [3].

В результаті виконання ДКП формується 64 частотних компоненти блоку (або, що теж, коефіцієнтів ДКП). В результаті вихідний блок виявляється представленим в області просторових частот. Цей крок ще не призводить до стиснення зображення. Однак, при його виконанні потрібно було, аби в переважній більшості зображень близькі за своїми координатами пікселі мали і близькі значення. Тому, при переході від блоку пікселів до його частотного подання, велика частина енергії сигналу зосереджується в області низьких частот, тобто компоненти з меншим значенням індексу k в виразі (1.3) матимуть великі значення (рис. 1.3) [3].

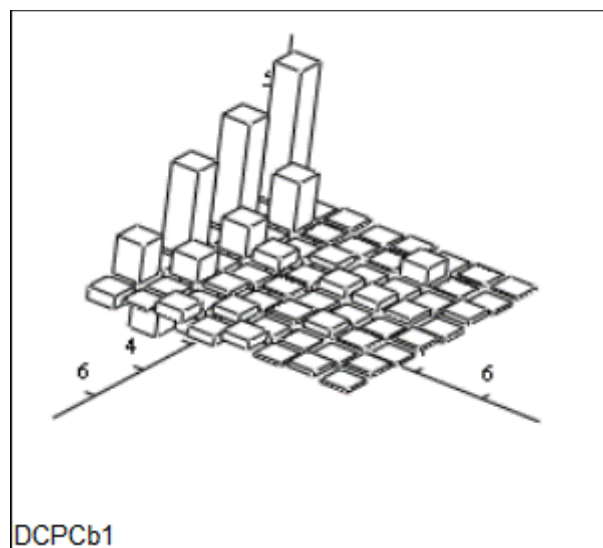


Рисунок 1.3 – Спектр ДКП окремого блоку зображення

При виконанні цієї операції 64 вхідних піксели перетворюються в матрицю з 64 ДКП коефіцієнтів, які характеризують «енергію» цих пікселів. Найважливішою особливістю цієї матриці коефіцієнтів є те, що перший коефіцієнт передає переважну частину "енергії", а кількість "енергії", переданої іншими коефіцієнтами, дуже швидко спадає. Тобто, велика частина інформації вихідної матриці 8x8 пікселів представляється першим елементом матриці, перетвореної за способом ДКП [3].

Перетворена матриця з 64 пікселів потім проходить операцію квантування, яка застосовується для скорочення розрядності коефіцієнтів. Процес квантування, який приводить до стиснення коефіцієнтів ДКП, виражається наступним чином:

$$z_{kl} = \text{round}(y_{kl} / q_{kl}) / q_{kl} = (y_{kl} \pm q_{kl} / 2) / q_{kl}, k, l = 0, 1, \dots, 7, \quad (1.4)$$

де q_{kl} – ваговий множник матриці квантування Q розміру 8x8 з номером $kl(x)$ (означає найбільше ціле менше або рівне x) [3].

Іноді для формування матриці квантування може використатися спеціальна вагова функція, дозволяюча формувати коефіцієнти квантування, перетворюючи в 0 найбільшу кількість високо та середньочастотних коефіцієнтів. Згідно формулюванню, елементи матриці Q лінійно зростають пропорційно сумі індексів елементу матриці (див. наприклад таб.1.1).

У результаті квантування буде перетворено в 0 багато коефіцієнтів y_{kl} . Вибір матриці Q визначається необхідним коефіцієнтом стиснення [3].

Саме тут відбувається сама значна втрата інформації – відкидаються малі зміни коефіцієнтів. Тому в процесі відновлення зображень після операції зворотного ДКП отримуються інші значення пікселів. Квантування також забезпечує можливість наступного ефективного стиснення даних за допомогою будь-якого методу стиснення без втрат [3].

Після квантування компоненти спектра всіх оброблених фрагментів розгортаються в послідовність чисел за допомогою алгоритму діагонального сканування. Схема обходу матриці спектральних коефіцієнтів фрагмента показана на рис. 1.5. В основі такого сканування лежить прийом, що дозволяє досягти більшого ущільнення і ґрунтується також на характерному вигляді спектра зображень реальних сцен [3].

Таблиця 1.1 – Матриця Q

3	5	7	9	11	13	15	17
5	7	9	11	13	15	17	19
7	9	11	13	15	17	19	21
9	11	13	15	17	19	21	23
11	13	15	17	19	21	23	25
13	15	17	19	21	23	25	27
15	17	19	21	23	25	27	29
7	19	21	23	25	27	29	31

Статистично доведено, що для реальних багаторівневих зображень двовимірний квантований спектр являє собою матрицю трикутного виду. Більшість значень знизу і праворуч – нулі [3].

Побудова елементів матриці в ланцюжок проводиться так, як це показано на рис. 1.5. При цьому в послідовність включаються тільки елементи від першого до останнього ненульового. Після нього в послідовність включається спеціальний стоп - код. Це дозволяє виключити з послідовності зайві нулі [3].

Далі зазвичай застосовується метод однопрохідного кодування Хаффмана. Спочатку аналізується вся послідовність символів. Часто повторюваним серіям біт привласнюються короткі позначення (маркери). Різниця розмірів маркерів і представлених ними бітових серій визначає досягаєму ступінь стиснення [3].

Після цього колірний простір даних зображення можна перетворити в вхідний вид. Втрати при зворотному ДКП також не великі в порівнянні з втратами внаслідок квантування [3].

2 МЕТОД МОМЕНТІВ ПІРСОНА

У цьому розділі розглянемо метод оснований на пошуку сімейства кривих, за допомогою якого можна задовільно представити ймовірнісні розподіли, що зустрічаються на практиці.

В граничному випадку гіпергеометричний розподіл збігається з розподілом, щільність якого задовольняє рівнянню:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x-a)f}{b_0 + b_1x + b_2x^2}, \quad (2.1)$$

Це рівняння може бути розглянуто з дещо іншої точки зору. Якщо мати на увазі унімодальні розподіли, то видається цікавим вивчити той клас щільностей, які:

- мають єдину моду, тобто $\frac{df}{dx} = 0$ в деякій точці $x = a$;

- мають гладке зіткнення з віссю x на кінцях інтервалу, де зосереджений

розподіл, тобто $\frac{df}{dx} = 0$, коли $f = 0$.

Рішення рівняння (3.1) задовільняють цим умовам. Пізніше стане зрозуміло, що серед розподілів сімейства (3.1) існують і такі розподіли, що мають J- та U-подібну форму.

Сімейство щільностей, що визначаються за формулою (3.1), відоме як «сімейство розподілів Пірсона». Перш ніж переходити до пошуку точних рішень, розглянемо деякі властивості, що притаманні цьому сімейству в цілому [5]. Маємо

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2)df = (x - a)fdx, \quad (2.2)$$

$$x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2)\frac{df}{dx} = x^n(x - a)f. \quad (2.3)$$

Інтегруючи по частинах ліву частину і припускаючи, що відповідні інтеграли існують, ми отримуємо

$$\begin{aligned} [x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2)f] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \{nb_0x^{n-1} + (n+1)b_1x^n + \\ + (n+2)b_2x^{n+1}\} f dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1} f dx - a \int_{-\infty}^{\infty} x^n f dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Припустимо, що вираз в квадратних дужках обертається в нуль на кінцях розподілу або $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n+2} f \rightarrow 0$, якщо розподіл має нескінченний розмах.

Тоді, користуючись позначеннями для моментів з 3.2, отримаємо:

$$-nb_0\mu'_{n-1} - (n+1)b_1\mu'_n - (n+2)b_2\mu'_{n+1} = \mu'_{n+1} - a\mu'_n, \quad (2.5)$$

$$nb_0\mu'_{n-1} + \{(n+1)b_1 - a\}\mu'_n + \{(n+2)b_2 + 1\}\mu'_{n+1} = 0. \quad (2.6)$$

Ці рівняння дозволяють визначити старші моменти за молодшими. Всі моменти можуть бути виражені через коефіцієнти a, b_0, b_1, b_2 і моменти $\mu_0 (= 1), \mu'_1$. І навпаки, ці чотири константи можна виразити через моменти μ'_1, μ'_2, μ'_3 та μ'_4 . Або через три моменти, що взяті відносно середнього: μ_2, μ_3, μ_4 . Вважаючи, що $n = 0, 1, 2, 3$ в 3.3, отримаємо рівняння для a, b_0, b_1, b_2 :

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} = -\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'}, \\ b_0 &= -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{A} = -\frac{\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{A'}, \\ b_1 &= -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} = -\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'}, \\ b_2 &= -\frac{(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)}{A} = -\frac{(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}{A'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

де $A = 10\mu_4\mu_2 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2$,

$$A' = 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1,$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}.$$

В цих формулах нульове значення прийнято в якості середнього, тому розподіли сімейства (3.1) повністю визначаються своїми чотирма першими моментами.

З рівняння 3.1, випливає, що мода дорівнює $x = a$. З (3.4) для пірсоновської міри асиметрії:

$$S_k = \frac{\text{середнє} - \text{мода}}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{-a}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}. \quad (2.8)$$

Якщо $a = 0$, то

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{xf}{(b_0 + b_1x + b_2x^2)} = \frac{f}{(b_0 + b_1x + b_2x^2)^2} (b_0 - b_2x^2). \quad (2.9)$$

Тому, точки перегину графіка щільності розподілу визначаються співвідношенням:

$$x^2 = \frac{b_0}{b_2}. \quad (2.10)$$

Отже, у щільностей з сімейства Пірсона існує не більше ніж дві точки перегину, і якщо їх дійсно дві, то вони відстоять від моди на однакову відстань. Але можлива ситуація, коли одна з точок перегину знаходиться поза області, де зосереджено розподіл [5].

Приймачи моду за початок відліку, рівняння (2.1) можна записати у вигляді:

$$\frac{d}{dX}(\log f) = \frac{X}{B_0 + B_1X + B_2X^2}, \quad (2.11)$$

або

$$\frac{d}{dx}(\log f) = \frac{x - a}{B_0 + B_1(x - a) + B_2(x - a)^2}, \quad X = x - a. \quad (2.12)$$

Таким чином точний вираз для щільності f можна отримати шляхом інтегрування правої частини рівняння (2.8).

Слід розрізняти два основних типу розподілів, які відповідають випадкам, коли знаменник в (2.8) має дійсні або уявні корені.

Тип I (бета-розподіл).

Нехай

$$B_0 + B_1X + B_2X^2 = B_2(X + a_1)(X - a_2), a_1, a_2 > 0, \quad (2.13)$$

тоді

$$\frac{d}{dX}(\log f) = \frac{X}{B_2(X + a_1)(X - a_2)} = \frac{a_1}{B_2(a_1 + a_2)} \frac{1}{(X + a_1)} + \frac{a_2}{B_2(a_1 + a_2)} \frac{1}{(X - a_2)}. \quad (2.14)$$

Звідси

$$f = k(X + a_1)^{\frac{a_1}{B_2(a_1 + a_2)}} (X - a_2)^{\frac{a_2}{B_2(a_1 + a_2)}}. \quad (2.15)$$

Це рівняння можна записати у вигляді:

$$f = k \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}, \quad (2.16)$$

де $\frac{m_1}{a_1} = \frac{m_2}{a_2}$.

Розмах цього розподілу зосереджено на інтервалі $(-a_1, a_2)$, тому, інтегруючи в цих межах, знайдемо:

$$1 = k \int_{-a_1}^{a_2} \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2} dx, \quad (2.17)$$

Звідки підставляючи $x = (a_1 + a_2)y - a_1$ отримаємо

$$1 = k \int_0^1 y^{m_1} (1-y)^{m_2} \frac{(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2 + 1}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}} dy = \frac{k(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2 + 1}}{a_1^{m_1} a_2^{m_2}} B(m_1 + 1, m_2 + 1),$$

(2.18)

де $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ – бета функція.

Цим рівнянням визначається константа k . Таким чином,

$$f = \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2 + 1} B(m_1 + 1, m_2 + 1)} \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{m_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{m_2}. \quad (2.19)$$

В якості початку відліку тут обрана мода. Якщо в якості початкової точки взяти початок розподілу, то отримаємо

$$f = \frac{a_2^{m_2}}{(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2 + 1} B(m_1 + 1, m_2 + 1)} x^{m_1} \left(1 - \frac{x - a_1}{a_2}\right)^{m_2}. \quad (2.20)$$

Або, вважаючи $a_1 + a_2 = 1$, отримаємо

$$f = \frac{1}{B(m_1 + 1, m_2 + 1)} x^{m_1} (1-x)^{m_2}. \quad (2.21)$$

Зазвичай цей вираз записують у вигляді:

$$f = \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, p, q > 0. \quad (2.22)$$

Відповідний розподіл зосереджений на інтервалі $(0, 1)$. Функція розподілу (3.13) є неповною бета-функцією, а сам розподіл найчастіше має назву бетарозподіл. Якщо p і q обидва перевищують одиницю, то крива щільності має єдину моду $(p-1)/(p+q-2)$ та перетворюється в нуль на кінцях інтервала $(0, 1)$. Якщо або p або q знаходиться між 0 і 1, то одна з крайніх ординат нескінченна і розподіл має J-образну форму [5].

Умова, що $B_0 + B_1X + B_2X^2$ має дійсні корені протилежних знаків, яка була використана при виведенні формули (2.13), еквівалентна тому, що B_0 і B_2 мають протилежні знаки, що в свою чергу еквівалентно умові $B_1^2 / (4B_0B_2) < 0$. В термінах b_1 і b_2 цю умову в силу (2.4) можна виразити нерівністю [5]:

$$\chi = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} < 0. \quad (2.23)$$

Якщо корені $B_0 + B_1X + B_2X^2$ дійсні та одного знаку, то аналогічно можна показати, що

$$f = kx^{-q_1} (x-a)^{q_2}, q_1 > q_2 - 1, \quad (2.24)$$

де $a \leq x \leq \infty$, якщо $a > 0$, та $-\infty \leq x \leq a$, якщо $a < 0$.

Цей розподіл називається IV типом Пірсона, але оскільки за допомогою простого перетворення $y = a/x$ він зводиться до розподілу I типу, то немає необхідності вивчати його окремо. Величина χ в 2.14 для цього випадку більше одиниці.

Розподіл, відомий як бета розподіл другого роду, має форму:

$$f = \frac{kx^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}, 0 \leq x \leq \infty. \quad (2.25)$$

Тут $1/k = B(p, q)$, як і для розподілу типу I.

ТИП III (гама-розподіл)

Пірсон розрізняє ще дев'ять інших типів, більшість з яких або тривіальні, або недостатньо цікаві. Зупинимось на одному з типів, що має значне теоретичне застосування. Якщо в (2.8) $B_2 = 0$, то розподіл має вигляд:

$$f = k\left(1 + \frac{x}{a}\right)^p e^{-px/a}, -a \leq x \leq \infty, \quad (2.26)$$

В якості початку тут обрано модальне значення. Якщо за початок відліку взяти початкову точку розподілу і відповідним чином обрати масштаб, то ми отримаємо

$$f = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x}, \lambda > 0, 0 \leq x \leq \infty, \quad (2.27)$$

де $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0$ гамма функція.

Для цього розподілу величина λ нескінченна. Крива розподілу (графіку щільності) унімодальна, за винятком випадків, коли значення λ менше або дорівнює одиниці. В цьому випадку розподіл J-образний. Він відомий як розподіл III типу, або гамма-розподіл (через те, що функція цього розподілу є неповною Γ -функцією) [5].

Було встановлено, що пірсоновські розподіли часто добре відповідають результатам спостережень. Інша перевага цих розподілів (зокрема I і III типів) полягає в тому, що за допомогою них можна з хорошою точністю наближати теоретичні розподіли, знаючи їх моменти.

Всі розподіли Пірсона визначаються своїми першими чотирма моментами $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4$, за винятком деяких вироджених розподілів, що задаються меншою кількістю моментів. Пірсоновський метод підгонки полягає в наступному [5]:

1. Визначаються перші чотири моменти для емпіричного розподілу, що відповідає результатам спостережень.

2. Обчислюються значення β_1, β_2 і величина χ (2.14), визначає тип розподілів.

3. Емпіричні моменти прирівнюються моментам потрібного розподілу, які виражені в термінах його параметрів.

4. Отримані рівняння вирішуються відносно невідомих параметрів і, отже знаходиться шуканий розподіл [5].

Більш детально гамма-розподіл буде розглянуто в наступному розділі.

3 ГАММА РОЗПОДІЛ

3.1 Визначення

Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X , яка має гама-розподіл, визначається формулою:

$$p_X(x) = \frac{(x - \gamma)^{\alpha-1} \exp[-(x - \gamma) / \beta]}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > \gamma. \quad (3.1)$$

Цей розподіл визначається як $\text{gamma}(\alpha, \beta, \gamma)$. Він відноситься до III типу системи розподілів Пірсона та залежить від трьох параметрів – α, β, γ . При $\gamma = 0$ розподіл називають двопараметричним гама-розподілом та зображується як $\text{gamma}(\alpha, \beta)$ [7].

Припустивши $\beta = 1$ та $\gamma = 0$, отримаємо щільність гама-розподілу в стандартному вигляді:

$$p_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \alpha > 0. \quad (3.2)$$

При $\alpha = 1$ розподіл перетворюється в експоненціальний, а при довільному натуральному значенні α – в розподіл Ерланга [7].

Випадкова величина $Y = -X$ також має гама-розподіл. Її щільність розподілу задається формулою:

$$p_Y(y) = \frac{(-y - \gamma)^{\alpha-1} \exp[(y + \gamma) / \beta]}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad y < -\gamma, \quad (3.3)$$

або

$$p_Y(y) = \frac{(-y)^{\alpha-1} e^y}{\Gamma(\alpha)}, \quad y < 0. \quad (3.4)$$

Проте, ці розподіли зустрічаються не часто, тому далі ми не будемо їх розглядати [7].

Інтеграл ймовірності (функція розподілу) для щільності (3.2) має наступний вид:

$$\Pr[X \leq x] = [\Gamma(\alpha)]^{-1} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(x, \alpha) / \Gamma(\alpha), \quad (3.5)$$

де величина

$$\Gamma(x, \alpha) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (3.6)$$

називається неповною гама-функцією, а $\Gamma(\alpha) = \Gamma_\infty(\alpha)$ – відома гама-функція Ейлера [7].

Відношення (3.5) залежить від величин x та α , і було би природньо розглядати його як функцію саме цих змінних. Проте, для табуляції значень цієї функції розподілу Пірсон знайшов більш зручним використовувати замість x змінну $u = x\alpha^{-1/2}$. З цією ціллю він увів до розгляду функцію:

$$I(u, \alpha - 1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{u\sqrt{\alpha}} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (3.7)$$

Найбільша значимість (стандартного) гама-розподілу в теорії розподілів пов'язана з наступним фактом. Якщо U_1, U_2, \dots, U_ν – незалежні стандартно

розподілені випадкові величини, то випадкова величина $\sum_{j=1}^v U_j^2$ має щільність розподілу ймовірностей виду (3.1) з параметрами $\alpha = v/2, \beta = 2$ та $\gamma = 0$. Цей частковий випадок гама-розподілу називається *розподілом χ^2 -квадрат з v степенями свободи*. Далі ми будемо триматися саме цього позначення.

Очевидно, що випадкова величина $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^v U_j^2$ підпорядковується стандартному гама-розподілу з $\alpha = v/2$. Щільність випадкової величини χ_v^2 можна записати наступним чином:

$$p_{\chi_v^2}(x^2) = \{2^{v/2} \Gamma(\frac{1}{2}v)\}^{-1} (x^2)^{(v/2)-1} \exp(-\frac{1}{2}x^2), \quad x^2 > 0. \quad (3.8)$$

Незважаючи на те, що за визначенням число v – є цілим, а розподіл, що визначається щільністю (3.8), називається χ^2 – розподілом та використовується як для цілих, так і для дрібних v [7].

3.2 Моменти розподілу та інші характеристики

Твірня функція моментів стандартного гама-розподілу з щільністю (3.2) задається за формулою

$$E[e^{tX}] = \{\Gamma(\alpha)\}^{-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp[-(1-t)x] dx = (1-t)^{-\alpha}, \quad t < 1, \quad (3.9)$$

а $(1-it)^{-\alpha}$ є його характеристичною функцією [7].

Щільність розподілу виду (3.1) може бути отримана з формули (3.2) за допомогою лінійного перетворення $X = (X' - \gamma)/\beta$. Тому, формули для моментів, твірних функцій і ін. для розподілу з щільністю (3.1) легко

виводиться з формул для відповідних характеристик розподілу з щільністю (3.2).

Випишемо формулу для r -го початкового моменту гама-випадкової величини з щільністю (3.2):

$$\mu_r' = \{\Gamma(\alpha)\}^{-1} \int_0^{\infty} x^{\alpha+r-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.10)$$

з неї отримуються прості вирази для відповідних семіваріантів:

$$k_r = (r-1)! \alpha. \quad (3.11)$$

Відповідно, для розподілу з щільністю (3.2) маємо рівності:

$$\begin{aligned} E[X] &= Var(X) = \alpha, \\ \mu_3 &= 2\alpha, \\ \mu_4 &= 3\alpha^2 + 6\alpha, \end{aligned} \quad (3.12)$$

звідки

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \sqrt{\beta_1} = 2\alpha^{-1/2}, \\ \alpha_4 &= \beta_2 = 3 + 6\alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Середнє відхилення (перший центральний абсолютний момент) в розподілі (3.2) дорівнює

$$\frac{2\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.14)$$

Стандартний гама-розподіл з щільністю (3.2) має єдину моду в точці $x = \alpha - 1$, якщо $\alpha \geq 1$. (Мода розподілу (3.1) отримується при $x = \gamma + \beta(\alpha - 1)$.)

Якщо $\alpha < 1$, то функція $p_X(x)$ прагне до нескінченості при $x \rightarrow 0$, а у випадку $\alpha = 1$ (стандартний експоненціальний розподіл) $\lim_{x \rightarrow 0} p_X(x) = 1$.

Точки перегину щільності розподілу рівновіддалені від моди та знаходяться за формулою

$$x = \alpha - 1 \pm \sqrt{\alpha - 1}, \quad (3.15)$$

якщо, звичайно, отримані значення – додаткові дійсні числа. Центрована та нормована випадкова величина

$$W = \frac{X - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \quad (3.16)$$

використовується гідрологами в якості *частотної характеристики* при аналізі частоти повенів [7].

Декілька типових прикладів графіків щільностей гама-розподілу наведені на рис.3.1 та рис.3.2. На другому з них показані графіки трьох різних щільностей з однаковими значеннями математичного сподівання (нуль) та стандартного відхилення (одиниця):

$$\begin{aligned} \alpha = 1: p(x) &= \exp[-(x + 1)], x > -1, & x &= -1, \\ \alpha = 4: p(x) &= \frac{8}{3}(x + 2)^3 \exp[-2(x + 2)], x > -2, & \text{мода при } x &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha = 9: p(x) &= \frac{2187}{4480}(x + 3)^8 \exp[-3(x + 3)], x > -3, & x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

На рис.(3.2) видно, що при збільшенні значення α криві щільностей гама-розподілу становляться схожими на графік щільності нормального

розподілу. Дійсно, розподіл центрованої та нормованої величини (3.16) сходиться до стандартного нормального розподілу при $\alpha \rightarrow 0$, тобто для всіх дійсних значень u

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Pr[(X - \alpha)\alpha^{-1/2} \leq u] = \Phi(u), \quad (3.17)$$

$$\text{де } \Phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^u \exp(-\frac{1}{2}t^2) dt.$$

Аналогічний результат справедливий і для розподілу з щільністю (3.1), а саме:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Pr\left[\left\{\frac{X - \gamma}{\beta} - \alpha\right\}\alpha^{-1/2} \leq u\right] = \Phi(u). \quad (3.18)$$

Для випадкової величини χ_v^2 це рівняння приймає вигляд

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \Pr[(\chi_v^2 - v)(2v)^{-1/2} \leq u] = \Phi(u). \quad (3.19)$$

З рівностей (3.13) прямує, що при $\alpha \rightarrow 0$, $\gamma_1 \rightarrow 0$ і $\gamma_2 \rightarrow 3$ (тобто значення коефіцієнтів асиметрії, та ексцесу наближуються до відповідних значень сімейства нормальних розподілів) [7].

Однією з найбільш важливих характеристик розглядуваного розподілу є *властивість відтворюваності*, яка полягає в наступному. Нехай X_1 та X_2 – незалежні випадкові величини з щільностями розподілу виду (3.1), можливо, з різними значеннями α' та α'' параметру α , але з однаковими значеннями параметрів β і γ .

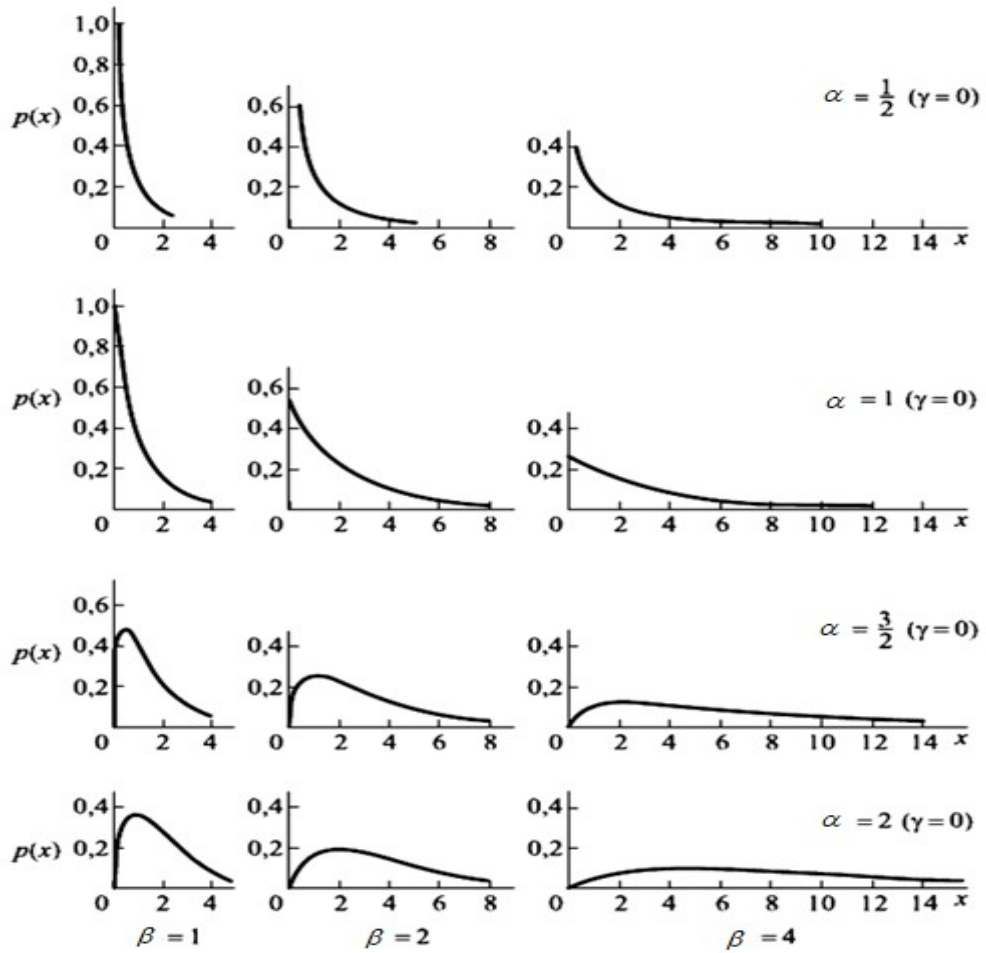


Рисунок 3.1 – Щільності гама-розподілу

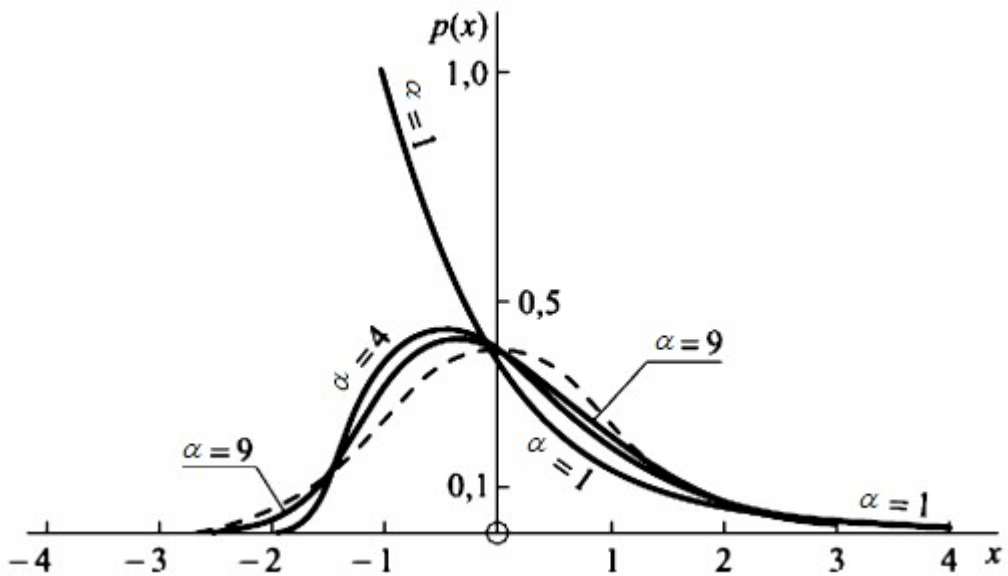


Рисунок 3.2 – Щільності гама-розподілу

Тоді, випадкова величина $(X_1 + X_2)$ має розподіл того же типу з тим же значенням β , подвоєним значенням γ та з параметром $\alpha = \alpha' + \alpha''$.

Відомо, що ε - квантіль $\mathcal{Y}_{\varepsilon|\alpha}$ гама-розподілу є щільністю (3.1), де

$$\int_0^{y_{\varepsilon|\alpha}} e^{-y} y^{\alpha-1} dy / \Gamma(\alpha) = \varepsilon, \quad (3.20)$$

має наступну властивість. Якщо $1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, то відношення $y_\alpha = y_{\varepsilon_2|\alpha} / y_{\varepsilon_1|\alpha}$ є спадаючою функцією параметру α , звідки витікає, що рівняння

$$\gamma_\alpha = b \quad (3.21)$$

має єдине рішення $\phi(b)$ для усіх $b \in (1, \infty)$ [7].

Властивість відтворюваності розподілу використовується, зокрема, при баєсовському підході до статистичного аналізу в теорії надійності при знаходженні параметрів апіорних гама-розподілів. Величина $y_{\varepsilon_2|\alpha} - y_{\varepsilon_1|\alpha}$ також зростає зі збільшенням α , звідки слідкує, що гама-розподіли «підпорядковані за степенями розсіювання» [7].

3.3 Оцінювання параметрів гамма-розподілу

За останні два десятиріччя завдання оцінювання параметрів гамма-розподілу знайшла широке відображення в літературі. Особливо варто відзначити внесок в розробку даної проблеми математиків Боумена і Шентона, а також Коена і його співавторів [7].

У монографії [15] проведено детальний аналіз оцінок максимуму правдоподібності, особливо оцінки параметра форми, для двопараметричного гамма-розподілу. У книзі містяться дані про розподіл і моменти цих оцінок, розглянуті їх спільні розподіли. Крім того, в роботі

детально розглянуті завдання оцінювання, пов'язані з трипараметричним гамма-розподілом. Особливу увагу наділено розподілам стандартного вибіркового відхилення, асиметрії та ексцесу для вибірок з гауссовою щільністю. Автори розглядають також моменти для оцінок, отриманих методом моментів. У списку літератури до цієї монографії наведені роботи авторів в цій області починаючи з 1968р [7].

Роботи А.Коена, присвячені оцінюванню параметрів гамма-розподілу, увійшли в монографії [11] і [16], в яких особливу увагу наділено модифікованим оцінками моментів і розглянутим вибірках.

3.4 Випадок з трьома невідомими параметрами

З початку, розглянемо оцінювання трьохпараметричного розподілу з щільністю (3.1), хоча в багатьох випадках можна припустити γ рівним нулю та оцінювати лише параметри α і β для щільності (3.1). Маючи n значень незалежних однаково розподілених випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , щільність кожної з яких задана формулою (3.1), випишемо рівняння, що їх задовольняють оцінки максимуму правдоподібності $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ та $\hat{\gamma}$ для параметрів α, β і γ відповідно [7]:

$$\sum_{j=1}^n \log(X_j - \hat{\gamma}) - n \log \hat{\beta} - n \psi(\hat{\alpha}) = 0, \quad (3.22a)$$

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\gamma}) - n \hat{\alpha} \hat{\beta} = 0, \quad (3.22б)$$

$$- \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{\gamma})^{-1} + n \{ \hat{\beta} (\hat{\alpha} - 1) \}^{-1} = 0, \quad (3.22в)$$

З рівняння (3.22в) видно, що якщо $\hat{\alpha} < 1$, то серед X_i повинні бути значення, менше ніж $\hat{\gamma}$. Це є аномальним, так як для $x < \gamma$ щільність (3.1)

дорівнює нулю. Також є очевидним, що рівняння (3.22) будуть давати нестійкі результати при значеннях $\hat{\alpha}$, близьких до одиниці, нехай навіть перебільшуючи її. Тому, виписаними рівняннями краще користатися тоді, коли припущене значення $\hat{\alpha}$ дорівнює, 2.5 як мінімум.

Рівняння (3.22) можна розв'язати ітераційними методами. Наприклад, зручно отримати нове значення $\hat{\beta}$ з рівняння (3.22а), підставляючи задані $\hat{\alpha}$ і $\hat{\gamma}$; потім, знаходити нове значення $\hat{\gamma}$ з рівняння (3.22б) по відомим $\hat{\alpha}$ і $\hat{\beta}$, і нарешті, підставляючи в рівняння (3.22в) знайдені $\hat{\beta}$ і $\hat{\gamma}$, обчислювати нове значення $\hat{\alpha}$ [7].

Асимптотична матриця коваріацій величин $\sqrt{n}\hat{\alpha}$, $\sqrt{n}\hat{\beta}$ і $\sqrt{n}\hat{\gamma}$ є зворотною до матриці

$$\begin{pmatrix} \psi'(\alpha) & \beta^{-1} & \beta^{-1}(\alpha-1)^{-1} \\ \beta^{-1} & \alpha\beta^{-2} & \beta^{-2} \\ \beta^{-1}(\alpha-1)^{-1} & \beta^{-2} & \beta^{-2}(\alpha-2)^{-1} \end{pmatrix},$$

визначник якої дорівнює

$$\beta^4 \left[\frac{2\psi'(\alpha)}{\alpha-2} - \frac{2\alpha-3}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \right].$$

Відповідно,

$$Var(\hat{\alpha}) = 2n^{-1} \left[2\psi'(\alpha) - (2\alpha-3)(\alpha-1)^{-2} \right]^{-1}, \quad (3.23a)$$

$$Var(\hat{\beta}) = n^{-1} \beta^2 \left[(\alpha-1)^2 \psi'(\alpha) - \alpha + 2 \left[2(\alpha-1)^2 \psi'(\alpha) - 2\alpha + 3 \right]^{-1} \right], \quad (3.23б)$$

$$Var(\hat{\gamma}) = n^{-1} \beta^2 (\alpha-2) \{ \alpha\psi'(\alpha) - 1 \} \left[2\psi'(\alpha) - (2\alpha-3)(\alpha-1)^{-2} \right]^{-1}. \quad (3.23в)$$

Використовуючи апроксимацію

$$\psi'(a) = \alpha^{-1} + \frac{1}{2}\alpha^{-2} + \frac{1}{6}\alpha^{-3}, \quad (3.24)$$

отримуємо прості формули:

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = 6n^{-1}\alpha^3, \quad (3.25a')$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = 3n^{-1}\beta^2\alpha, \quad (3.25б')$$

$$\text{Var}(\hat{\gamma}) = \frac{3}{2}n^{-1}\beta^2\alpha^3, \quad (3.25в')$$

які дають порядок значень дисперсій при більших α . Фішер [10] отримав більш точніше наближення

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = 6n^{-1}\left[(\alpha - 1)^3 + \frac{1}{5}(\alpha - 1)\right], \quad (3.28)$$

використавши більшу кількість складових в розкладанні (3.24) [7].

При оцінюванні параметрів α, β і γ методом моментів, отримуються наступні не менш простіші формули:

$$\hat{\gamma} + \hat{\alpha}\hat{\beta} = \bar{X}, \quad (3.26a)$$

$$\hat{\alpha}\hat{\beta} = m_2, \quad (3.26б)$$

$$2\hat{\alpha}\hat{\beta}^3 = m_3, \quad (3.26в)$$

де величини

$$\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j,$$

$$m_2 = n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2,$$

$$m_3 = n^{-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^3$$

представляють собою вибіркове середнє та вибіркві другий і третій центральні моменти. (Так як цей метод може бути застосованим лише при великих значеннях n , то немає необхідності намагатись отримати з виписаних оцїнок незміщені; також не зрозуміло, чи покращить ця процедура точність оцїнювання.) Зауважимо, що нерівності (3.26а) та (3.22б) однакові [7].

Таким чином як і в випадках логонормального та зворотного гауссовського розподілу, Коен і Віттен [11] пропонують використовувати наступні модифіковані оцїнки моментів:

$$E[X] = \bar{X} = \hat{\gamma} + \hat{\alpha}\hat{\beta}, \quad (3.27a)$$

$$Var(X) = s^2 = \hat{\alpha}\hat{\beta}^2, \quad (3.27б)$$

$$E[F(X'_{1:n})] = \frac{1}{n+1} = F\left(\frac{X'_{1:n} - \bar{X}}{s}; 0, 1, \hat{\alpha}\right). \quad (3.27в)$$

Зауважимо, що рівняння (3.22б) і (3.22в) можна відповідно записати в наступному вигляді:

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \hat{\gamma}}{n\hat{\beta}} \right), \quad (3.28a)$$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \hat{\gamma}}{n} \right) - \frac{n}{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\gamma})^{-1}}. \quad (3.28б)$$

Надаючи деякі значення величині $\hat{\gamma}$, можна обчислити $\hat{\alpha}(\hat{\gamma})$ і $\hat{\beta}(\hat{\gamma})$, а також відповідну правдоподібність $L(\hat{\gamma})$. Після цього, чисельно знаходиться значення $\hat{\gamma}$, максимізує $L(\hat{\gamma})$ [7].

4 АПАРАТ ІМОВІРНІСНИХ $P-P$ ГРАФІКІВ

Графік імовірності забезпечує простий та ефективний засіб оцінки узгодженості запропонованої імовірнісної моделі шляхом візуальної оцінки лінійності розташування точок на графіку. Такі ділянки можуть легко розкрити основні риси розподілу, такі як симетрія та відносна товщина хвосту, а також надати інформацію про відхилення від запропонованої моделі, яка зазвичай не виявляється іншими методами. $Q-Q$ (квантиль / квантиль) графіки є більш широко вживаними для оцінки узгодженості розподілів, що характеризуються параметрами положення і масштабу, але потенціал $P-P$ графіків залишається значною мірою недооціненим. Розглянемо привабливі особливості певного прикладу $P-P$ графіка, який називають стандартизованим $P-P$ графіком, і покажемо, як його можна використовувати для забезпечення візуальних порівнянь альтернативних моделей вірогідності шляхом відображення відповідних критеріїв посилення. Ця методика є найбільш ефективною для відстеження розташування розподілу, але її застосування у більш великих групах моделей імовірності ілюструється прикладом, що включає трьохпараметровий розподіл Вейбулла. Квадрат коефіцієнта кореляції точок на стандартній ділянці $P-P$ графіку представлений, як кількісний помічник для оцінки графіка. Формули для відсоткових точок нульового розподілу цієї статистики представлені для тестування відповідності звичайного або експоненціального, або розподілу Гумбела з невідомими параметрами положення та масштабу [8].

4.1 Загальні положення

Оскільки $Q-Q$ графіки найбільш ефективно використовуються для оцінки узгодженості розподілів. Нехай x_1, x_2, \dots, x_n – упорядкована вибірка

розміру n з розподілу з невідомими параметром положення та масштабу, позначених α та β , відповідно. Нехай F визначається як CDF для стандартної форми гіпотетичного розподілу, тому $F((x - a)/\beta)$ – імовірність того, що єдине випадкове спостереження не перевищує x , коли модель гіпотези коректна. Потім, будується "F" Q-Q графік за допомогою побудови x_i проти a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), де $a_i = F^{-1}(p_i)$ $a_i = F^{-1}(p_i)$, а p_i – позиція побудови, яка зазвичай вибирається так, щоб a_i було близьким до очікуваного значення x_i . З іншого боку, стандартний "F" P-P графік отримується шляхом побудови z_i проти p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), де $z_i = F^{-1}(p_i)$. Імовірнісні графіки маркеруються відповідно до гіпотетичного розподілу. Наприклад, якщо F являє собою CDF для стандартного нормального розподілу, то результуючий графік імовірності називається нормальним графіком імовірності. Якщо α та β невідомі, що зазвичай буває, коли вони можуть бути замінені на ефективні оцінки $\hat{\alpha}$ та $\hat{\beta}$. Максимальна оцінка правдоподібності використовується в цій статті, за винятком того, що для звичайного розподілу використовується звичайний необмежений розподіл [8].

Побудова Q-Q графіка та стандартного P-P графіка коротко ілюструються набором спостережень $n = 12$, щодо збільшення ваги щурів-самок з високим вмістом білка, отриманої від [12]. Спостереження відображені в табл. 4.1 разом із значеннями кількості, необхідними для побудови графіків.

Таблиця 4.1. Збільшення ваги жіночих щурів під дією високих білків та розміщення позицій для нормальних Q-Q та стандартизованих нормальних ділянок P-P

i	X_i	$p_i = i/(n + 1)$	$\Phi^{-1}[p_i]$	$\Phi[(x_i - \hat{\alpha})/\hat{\beta}]$
1	83	.077	-1.426	.04182

Продовження таблиці 4.1

2	97	.154	-1.020	.1141
3	104	.231	-.736	.2272
4	107	.308	-.502	.2717
5	113	.385	-.293	.3717
6	119	.462	-.097	.4813
7	123	.538	.097	.5558
8	124	.615	.293	.5742
9	129	.692	.502	.6630
10	134	.769	.736	.7436
11	146	.846	1.020	.8879
12	161	.923	1.426	.9724

Для цих даних $\hat{\alpha} = .50$ є середнім значенням вибірки, а $\hat{\beta} = .2772$ квадратний корінь звичайної об'єктивної оцінки дисперсії. Використовуючи Φ , як позначення CDF для стандартного нормального розподілу, на рис. 4.1 зображено нормальний квадратний діапазон x_i відносно $\Phi^{-1}[p_i]$, а відповідний нормальний P - P графік $\Phi[(x_i - \hat{\alpha}) / \hat{\beta}]$ - відображається на рис. 4.2 [8].

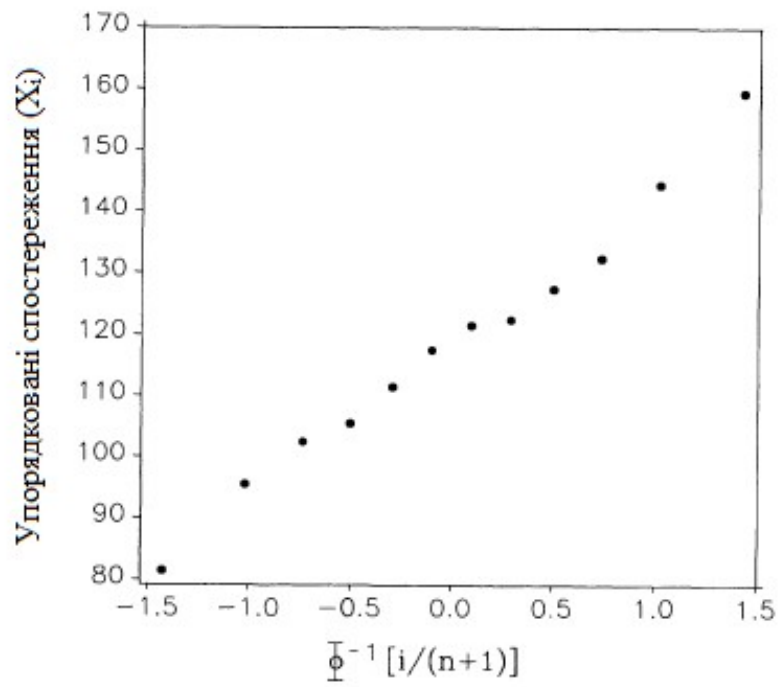


Рисунок 4.1 – $Q-Q$ графік даних ваги з табл. 4.1

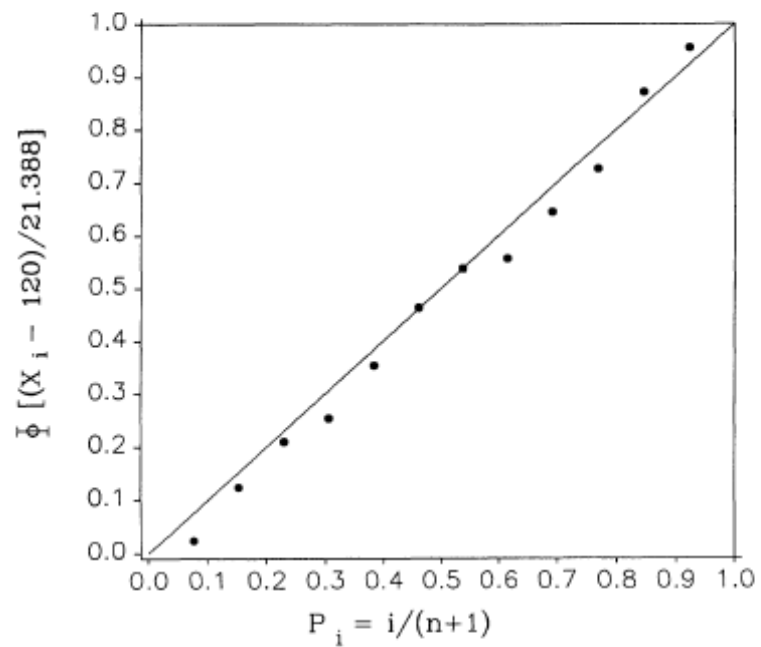


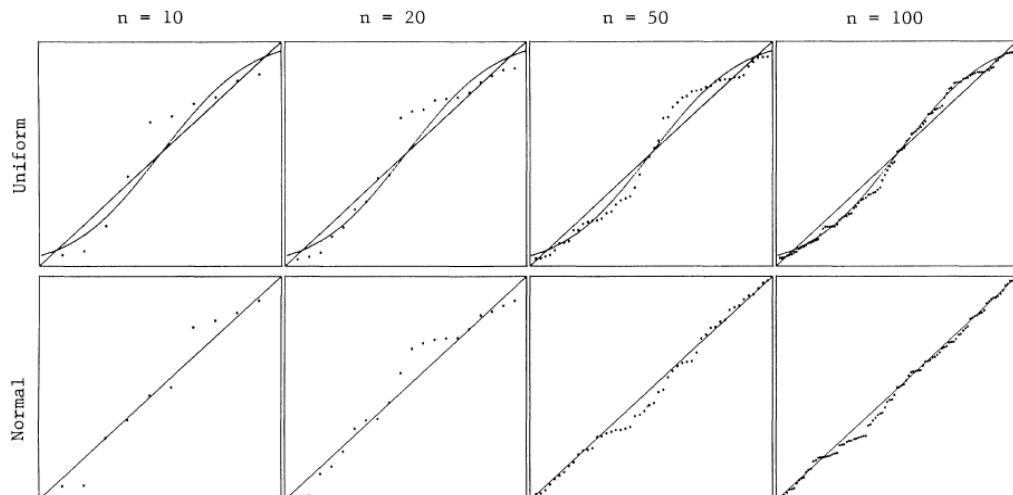
Рисунок 4.2 – $P-P$ графік даних ваги з табл. 4.1

4.2 Альтернативні криві

Існують специфічні криві, що відповідають різним розподілам "F" для кожного конкретного P-P графіку. Ці криві називають "кривими розподілу". Вони можуть бути використані, як візуальні індикатори узгодженості альтернативних моделей вірогідності. Щоб побудувати криву розподілу "G" на "F" P-P графіку для коректного розташування, слід виконати наступні кроки:

- вибираємо число k точок графіку і обчислимо $p_i = i/(n + 1)$ і $G^{-1}(p_i)$ для кожного $i = 1, 2, \dots, n$;
- використовуємо значення $G^{-1}(p_i)$, як дані для обчислення оцінок α та β для розподілу F ;
- будуємо $F(G^{-1}(p_i) - \hat{\alpha} / \hat{\beta})$ від p_i ;
- з'єднуємо точки, щоб отримати плавну криву.

Вибір k залежить від доступної якості графічних дисплеїв [8].



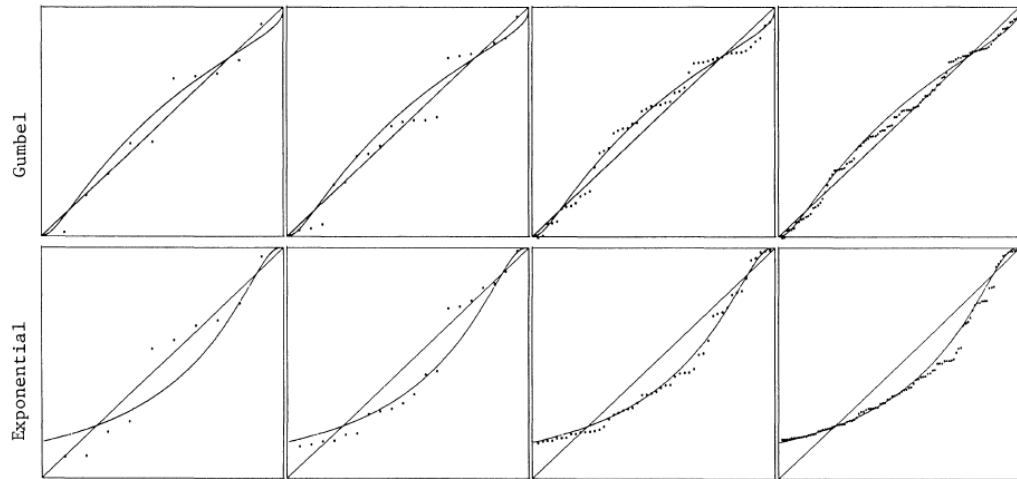


Рисунок 4.3 – P - P графіки; кожен з них містить криву для розподілу, як зазначено рядком. Колонки відповідають розміру вибірки 10, 20, 50 і 100

5 СТАТИЧНІ КРИТЕРІЇ УЗГОДЖЕННЯ

Перевірка гіпотези про гіпотетичний закон розподілу робиться так само, як і перевірка гіпотези про параметри розподілу, тобто з допомогою спеціально підбраної випадкової величини – критерію узгодженості [13].

Критерієм узгодженості називають критерій перевірки гіпотези про вигляд невідомого розподілу.

Є декілька критеріїв узгодженості: Пірсона, Колмогорова-Смірнова, Крамера-Мізеса-Смирнова і т. д. Нижче розглянуто критерій узгодженості Пірсона та Колмогорова-Смірнова.

5.1 Критерій Пірсона

Для перевірки критерію узгодженості за конкретними формулами порівнюють емпіричні частоти (за даними вибірки) n_i і теоретичні n_i' (обчислені в припущенні, що закон розподілу генеральної сукупності заданий).

Природно, що емпіричні та теоретичні частоти різняться. Можливо, що розбіжність випадкова (незначна), а можливо, розбіжність не випадкова, і пояснюється це тим, що обчислені теоретичні частоти виходять з неправильної гіпотези про розподіл генеральної сукупності.

Критерій Пірсона як і всякий критерій, він доводить справедливість гіпотези, а лише встановлює на певному рівні значимості її узгодження чи неузгодження з даними що спостерігаються. [9]

Статистика критерію розраховується за формулою:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}, \quad (5.1)$$

де m – число частотних інтервалів, на які поділяється статистичний розподіл вибірки;

n_i – частота ознаки в i -му інтервалі;

n_i – теоретичні частоти, підраховані за відповідними формулами закону розподілу ймовірностей, який припускається для ознаки генеральної сукупності.

Теоретичні частоти знаходяться за формулою:

$$n'_i = np_i, \quad (5.2)$$

де n – об'єм вибірки,

p_i – для дискретної величини є ймовірність події $p_i = P(X=x_i)$, для неперервної випадкової величини p_i є ймовірність того, що ознака X попаде в i -ий інтервал.

Наприклад, для гіпотези H_0 , яка припускає, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу, ймовірність p_i може бути обчислена за формулою:

$$p_i = \Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) \quad (5.3)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

Значення χ^2 у формулі (5.1) випадкове, і чим менше відрізняються значення емпіричних і теоретичних частот, тим менше буде значення статистики критерію [9].

Значення критичної точки $k_{кр}$ для критерію узгодженості Пірсона залежить від рівня значимості α і числа ступенів свободи k . Число ступенів

свободи розподілу визначається за формулою $k = l - r - 1$, де l – число інтервалів статистичного ряду, r – число параметрів теоретичного закону розподілу, що оцінюється за даними вибірки.

Зокрема, якщо перевіряється гіпотеза про нормальний розподіл, то оцінюється два параметри (математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення), тому $r = 2$, отже, $k = l - 3$.

Оскільки односторонній критерій більш “жорстко” відхиляє нульову гіпотезу, ніж двобічний, то будуть правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб ймовірність попадання статистики критерію в цю область при припущенні справедливості нульової гіпотези, яка дорівнювала обраному рівню значимості α :

$$P(\chi^2 > k_{кр}(\alpha, k)) = \alpha. \quad (5.4)$$

Отже, для того, щоб при заданому рівні значимості перевірити гіпотезу H_0 . Генеральна сукупність розподілена нормально, потрібно спочатку порахувати теоретичні частоти, а потім статистику критерію (5.1):

$$K_{cn} = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}. \quad (5.5)$$

Після чого по таблиці критичних точок розподілу χ^2 , за заданим рівнем значимості α і числом ступенів вільності $k = l - 3$ потрібно знайти критичну точку

$$k_{кр}(\alpha, k) = \chi^2_{кр}(\alpha, k) \quad [9].$$

Якщо $K_{cn} < k_{кр}$ – нема підстави відхиляти нульову гіпотезу.

Якщо $K_{cn} > k_{кр}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

Об’єм вибірки повинен бути досить великим (не менше 50), а кожна група з інтервалу (x_i, x_{i+1}) містити не менше 5-8 варіант; малочисленні групи слід об’єднувати в одну, сумуючи частоти.

5.2 Критерій Колмогорова-Смірнова

У статистиці, критерій узгодженості Колмогорова-Смірнова використовується для того, щоб визначити, чи підпорядковуються два емпіричних розподіли одному закону, або визначити, чи підпорядковується отриманий розподіл передбачуваній моделі [14].

Модифіковані статистики критерію Колмогорова-Смірнова дозволяють застосовувати їх в деяких окремих випадках і для ситуації з невідомими параметрами гіпотетичних розподілів.

Критерій Колмогорова-Смірнова є одним із основних і найбільш широко застосованих непараметричних методів, так як досить чутливий до відмінностей в досліджуваних вибірках.

На практиці крім критерію χ^2 часто використовується критерій Колмогорова, в якому в якості запобіжної розбіжності між теоретичним і емпіричним розподілами розглядають максимальне значення абсолютної величини різниці між емпіричною функцією розподілу $F_n(x)$ і відповідної теоретичної функцією розподілу:

$$D = \max_{-1 \leq x \leq 1} |F_n(x) - F(x)|, \quad (5.6)$$

яку називають статистикою критерію Колмогорова.

Доведено, що якою б не була функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X , при необмеженому збільшенні числа спостережень ($n \rightarrow \infty$) вірогідність нерівності $P(D\sqrt{n} \geq \lambda)$ прагне до межі

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1)^k e^{-2k^2\lambda^2}. \quad (5.7)$$

Задаючи рівень значущості α , зі співвідношення

$$P(\lambda) = \alpha \quad (5.8)$$

можна знайти відповідне критичне значення λ_α .

Схема застосування критерію Колмогорова наступна:

- будуються емпірична функція розподілу $F_n(x)$ і передбачувана теоретична функція розподілу $F(x)$.

- визначається міра розбіжності між теоретичним і емпіричним розподілом d за формулою (5.6) і обчислюється величина:

$$\lambda = D\sqrt{n}. \quad (5.9)$$

Якщо обчислене значення λ виявиться більше критичного λ_α , визначеного на рівні значущості α , то нульова гіпотеза H_0 про те, що випадкова величина X має заданий закон розподілу, відкидається (односторонній критерій). Якщо $\lambda \leq \lambda_\alpha$, то вважають, що гіпотеза H_0 не суперечить дослідним даним.

Потенційне перевага критерію Колмогорова в тому, що він не вимагає групування даних (з неминучою втратою інформації), а дає можливість розглядати індивідуальні спостережувані значення. Цей критерій можна успішно застосовувати для малих вибірок. Вважається, що його потужність, вище, ніж у критерію χ^2 .

6 РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

6.1 Розрахунки параметрів розподілів

У цьому розділі представлені результати експериментальних досліджень оцінок узгоджень наступних імовірнісних моделей:

- 1) двосторонній гамма розподіл [17] з щільністю ймовірності

$$f_{\Gamma\Gamma}(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} |x|^{\alpha-1} e^{-\frac{|x|}{\beta}}, \alpha > 0, \beta > 0;$$

- 2) двосторонній бета розподіл 2-го роду з щільністю ймовірності

$$f_{BB}(x) = \frac{\alpha-1}{2\beta} \left(1 + \frac{|x|}{\beta}\right)^{-\alpha}, \alpha > 1, \beta > 0$$

зображень.

Прийнято вважати, що емпіричний розподіл ДКП коефіцієнтів типових JPEG зображень симетричний відносно нуля. Однак на практиці можливі деякі порушення постульованої симетрії. Тому, є доцільним перейти до односторонніх варіантів ($x > 0$) вказаних розподілів, розглядаючи абсолютні значення ДКП коефіцієнтів, а саме:

$$f_{\Gamma}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \alpha > 0, \beta > 0, x > 0 \quad (6.1)$$

та

$$f_B(x) = \frac{\alpha-1}{\beta} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}, \alpha > 1, \beta > 0, x > 0. \quad (6.2)$$

З розділів 2 і 3 відомо, що розподіл (6.1) та (6.2) відносяться до сімейства кривих Пірсона, більш того, експоненціальний розподіл

$$f_E(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad (6.3)$$

рівний також як і його двосторонній варіант, розподіл Лапласа

$$f_E(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x|}{\beta}}, \quad (6.4)$$

є окремими випадками розподілів $f_\Gamma(x)$ та $f_{\Gamma\Gamma}(x)$ при $\alpha = 1$ відповідно. Зауважимо, що розподіл Лапласа (6.4) традиційно використовується для статистичного опису [18] поведінки ДКП коефіцієнтів.

В наступному, будемо використовувати апарат ймовірнісних експоненціальних Р-Р графіків (див. розділ 4) для візуальної оцінки узгодження конкуруючих гіпотез $(f_E(x), f_\Gamma(x), f_B(x))$ про види розподілів ДКП коефіцієнтів JPEG зображень. В експериментах використовувались півтонові тестові зображення розміру 256x256 пікселів.

В силу особливостей стандарту JPEG, запам'ятовуванню підлягають не самі значення ДКП коефіцієнтів, а номери рівнів, які реєструвалися на етапі квантування. При наявності таблиці квантування, дані можуть бути відновлені з точністю до половини кроку квантування $q/2$. Іншими словами, за умови $q = 1$, що співпадає запису зображення з найбільшою якістю, для спостереження виявляються доступними не неперервні, а округлені до найближчого цілого значення ДКП коефіцієнтів. Ця особливість має суттєвий вплив на вибір процедури оцінювання параметрів розподілів і точність (дисперсії) одержуваних оцінок, а також на вибір доступних статистичних процедур перевірки гіпотези про узгодження передбачуваної моделі та емпіричних даних. А саме: критеріїв, які припускають до їх використання щодо групованих даних.

До таких критеріїв, наприклад, відносяться критерії Пірсона і Колмогорова [19] або критерії, які використовують дані P-P [8] і Q-Q графіків [20], зокрема критерій Шапіро-Уїлка [21] перевірки на нормальність. Зауважимо також, що критерій Колмогорова дуже чутливий до викидів, а тому погано підходить для вирішення поставленого завдання.

Розподіл абсолютних значень ДКП коефіцієнтів має J-подібну форму, таким чином, параметр форми гамма розподілу $\alpha < 1$. Відомо [7], що метод максимальної правдоподібності рекомендований до застосування при $\alpha > 2,5$. Таким чином, необхідно використовувати альтернативні методи, наприклад, метод моментів або його модифікації. Однією з таких модифікацій є алгоритм Коена і Віттена [11], описаний в 3-му розділі цієї кваліфікаційної роботи, система рівнянь (3.27). Даний метод допускає узагальнення на випадок коли для спостереження доступні квантовані з кроком q значення, а також для інших видів розподілів, зокрема бета розподілу 2-го роду. Нижче наводиться висновок співвідношень (3.27), адаптованих для застосування до квантованих значень вибірки.

Нехай $X \sim f_{\Gamma}(x)$ та x — реалізація випадкової величини X . Переходячи до нормованої В.В. матимемо

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = \mu + \sigma z,$$

де μ, σ — математичне очікування та СКВ В.В. X відповідно. Отже

$$x = \alpha\beta + \sqrt{\alpha}\beta z \Rightarrow x = \beta\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} + z) = \beta \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right).$$

Отже,

$$g(z, \gamma_1) = k \left[\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right) \right]^{\frac{4}{\gamma_1^2} - 1} \exp \left[-\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right) \right]; z > -\frac{2}{\gamma_1}.$$

Знайдемо тепер константу k з умови $\int_{-\frac{2}{\gamma_1}}^{\infty} g(z, \gamma_1) dz = 1$:

$$k \int_{-\frac{2}{\gamma_1}}^{\infty} \left[\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right) \right]^{\frac{4}{\gamma_1^2} - 1} \exp \left[-\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right) \right] dz = \left. \begin{array}{l} t = \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right), \\ dz = \frac{\gamma_1}{2} dt, \\ t_1 = 0; t_2 = \infty \end{array} \right| =$$

$$= k \int_0^{\infty} t^{\frac{4}{\gamma_1^2} - 1} e^{-t} \frac{\gamma_1}{2} dt = \frac{\gamma_1}{2} k \Gamma \left(\frac{4}{\gamma_1^2} \right) = 1.$$

Звідси

$$k = \frac{\gamma_1}{2} \frac{1}{\Gamma \left(\frac{4}{\gamma_1^2} \right)}.$$

Остаточно,

$$g(z, \gamma_1) = \frac{\gamma_1}{2} \frac{1}{\Gamma \left(\frac{4}{\gamma_1^2} \right)} \left(\frac{2}{\gamma_1} \right)^{\frac{4}{\gamma_1^2} - 1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right)^{\frac{4}{\gamma_1^2} - 1} \exp \left[-\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right) \right];$$

$$g(z, \gamma_1) = \frac{(2/\gamma_1)^{4/\gamma_1^2}}{\Gamma(4/\gamma_1^2)} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right)^{\frac{4}{\gamma_1^2} - 1} \exp \left[-\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z \right) \right].$$

Тепер функція розподілу:

$$\begin{aligned}
 g(z, \gamma_1) &= \int_{-\frac{2}{\gamma_1}}^z \frac{(2/\gamma_1)^{4/\gamma_1^2}}{\Gamma(4/\gamma_1^2)} \left(\frac{2}{\gamma_1} + t\right)^{\frac{4}{\gamma_1^2}-1} \exp\left[-\frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + t\right)\right] dt = \left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + t\right), \\ dy = \frac{2}{\gamma_1} dt, \\ y_1 = 0; y_2 = \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z\right) \end{array} \right| = \\
 &= \frac{(2/\gamma_1)^{4/\gamma_1^2}}{\Gamma(4/\gamma_1^2)} \int_{\frac{2}{\gamma_1}}^{\frac{2}{\gamma_1}(\frac{2}{\gamma_1}+z)} \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^{\frac{4}{\gamma_1^2}} y^{\frac{4}{\gamma_1^2}-1} e^{-y} dy = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(4/\gamma_1^2)} \int_{\frac{2}{\gamma_1}}^{\frac{2}{\gamma_1}(\frac{2}{\gamma_1}+z)} y^{\frac{4}{\gamma_1^2}-1} e^{-y} dy = P\left(\frac{4}{\gamma_1^2}, \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z\right)\right),
 \end{aligned}$$

де $P(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

Відповідно

$$G(z, \gamma_1) = P\left(\frac{4}{\gamma_1^2}, \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} + z\right)\right).$$

Оскільки доступні для спостереження тільки квантовані значення, а ми цікавимося поведінкою в області нуля, то приходимо до наступної модифікованої процедури оцінювання в рамках методу моментів:

$$P\left(\frac{4}{\gamma_1^2}, \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} - \frac{\mu - q/2}{\sigma}\right)\right) = \frac{m}{n+1}; \quad (6.5a)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{4}{\hat{\gamma}_1^2}; \hat{\beta} = \frac{\hat{\gamma}_1^2}{2} \hat{\sigma}, \quad (6.5b)$$

тут n — обсяг вибірки,

m — число абсолютних значень ДКП коефіцієнтів, менше $q/2$,

q — крок квантування,

γ_1 — параметр, належний визначенню,

$\hat{\sigma}$ — вибіркоче СКВ.

В свою чергу, для бета розподілу другого роду, модифікований метод моментів отримується наступним чином. Нехай $X \sim f_B(x)$ та x — реалізація випадкової величини X . Переходячи до нормованої В.В. матимемо

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}, x = \mu + \sigma z, \mu = \frac{\beta}{(\alpha - 2)}; \sigma = \frac{\beta}{\alpha - 2} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}};$$

$$x > 0 \Rightarrow z > -\frac{\mu}{\sigma},$$

де μ, σ — математичне очікування та СКВ В.В. X відповідно.

$$f_B(x) = k \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}, f_B(z) = k_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\alpha - 2} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}} z\right)^{-\alpha}.$$

Визначимо k_1 з умови $\int_{\frac{\mu}{\sigma}}^{\infty} f_B(z) dz = 1$. Таким чином,

$$k_1 \int_{-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-1}}}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}} z\right)^{-\alpha} dz =$$

$$k_1 (\alpha - 2) \sqrt{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}} \int_{-\sqrt{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}}}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}} z\right)^{-\alpha} d\left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}} z\right) =$$

$$k_1 (\alpha - 2) \sqrt{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}} \int_1^{\infty} t^{-\alpha} dt = k_1 (\alpha - 2) \sqrt{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}} \left. \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{\infty} =$$

$$k_1(\alpha - 2)\sqrt{\frac{\alpha - 3}{\alpha - 1}}\frac{1}{\alpha - 1} = k_1\frac{\alpha - 2}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha - 3}{\alpha - 1}} = 1.$$

Остаточно,

$$k_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}}$$

та щільність ймовірності

$$f_B(z) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}}\left(1 + \frac{1}{\alpha - 2} + \frac{1}{\alpha - 2}\sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}}z\right)^{-\alpha}.$$

Знайдемо тепер функцію розподілу

$$\begin{aligned} F_B(z) &= \int_{-\sqrt{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}}}^z \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}\left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}x\right)^{-\alpha} dx = \\ &= (\alpha-1)\int_{-\sqrt{\frac{\alpha-3}{\alpha-1}}}^z \left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}x\right)^{-\alpha} d\left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}x\right) = \\ &= (\alpha-1)\int_1^{1+\frac{1}{\alpha-2}+\frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}z} t^{-\alpha} dt = (\alpha-1)\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^{1+\frac{1}{\alpha-2}+\frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}z} = \\ &= \frac{\alpha-1}{\alpha-1}(-1)\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}z\right)^{1-\alpha} - 1\right] = \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha-2}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}z\right)^{1-\alpha} = \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha-2}\left[1 + \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3}}z\right]\right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Остаточно,

$$F_B(z, \alpha) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha - 2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}} z\right]\right)^{1 - \alpha}.$$

Модифікований метод моментів (в застосуванні до квантованих значень):

$$F^+\left(\frac{q/2 - \mu}{\sigma}, \alpha\right) = \frac{m}{n + 1}; \beta = (\alpha - 2)\hat{\mu}, \quad (6.6)$$

де n – об'єм вибірки,

m – число абсолютних значень ДКП коефіцієнтів, менше $q/2$,

q – крок квантування,

$\hat{\mu}$ – вибіркоче середнє.

Рішення першого рівняння системи (6.6) можна отримати, наприклад, методом Ньютона. Дійсно

$$1 - \left(1 + \frac{1}{\alpha - 2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}} \frac{q/2 - \mu}{\sigma}\right]\right)^{1 - \alpha} = \frac{m}{n + 1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha - 2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}} \frac{q/2 - \mu}{\sigma}\right]\right)^{1 - \alpha} = 1 - \frac{m}{n + 1},$$

$$(\alpha - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha - 2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}} \frac{q/2 - \mu}{\sigma}\right]\right)^{1 - \alpha} = -\ln\left(1 - \frac{m}{n + 1}\right).$$

В якості початкового наближення достатньо вважати $\alpha = 6$. Похідна лівої частини останнього виразу:

$$\ln(1 + A(\alpha)) - \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2} \frac{A(\alpha) + B(\alpha)}{1 + A(\alpha)},$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 2} \left[1 + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}} \frac{q/2 - \mu}{\sigma} \right]; B(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 2)^2} \sqrt{\frac{\alpha - 3}{\alpha - 1}} \frac{q/2 - \mu}{\sigma}.$$

Проаналізуємо тепер точність оцінок, які отримуються за допомогою модифікованого методу моментів (6.5). З цією ціллю було проведено експеримент Монте-Карло, запрограмований на мові R. Суть експерименту була в наступному. Було сформовано $N = 1024$ вибірки об'єму $n = 1024$ відліку кожна з гамма розподілу з параметрами $\alpha = 0.5$ та $\beta = 30$. Потім, для кожної вибірки оцінювалось значення вибіркового коефіцієнта асиметрії $\hat{\gamma}_1 = \hat{\mu}_3 / \hat{\sigma}^3$, яке надалі використовувалось в якості початкового наближення при рішенні рівняння (6.5а) за допомогою Методу Ньютона. Похідна функції

$$P\left(\frac{4}{\gamma_1^2}, \frac{2}{\gamma_1} \left(\frac{2}{\gamma_1} - \frac{\mu - q/2}{\sigma}\right)\right)$$

за параметром γ_1 замінялась її численною апроксимацією, яка обчислюється як відношення прирощеної функції до малого прирощення аргументу. У таблиці 6.1 представлені зведення, отримані за результатами експерименту та дозволяють судити про ефективність оцінок параметру $\gamma_1 = 2,8284271$, отриманих методом моментів (ММ) та модифікованим методом моментів (МММ); $q = 0$ означає відсутність квантування.

Таблиця 6.1 Результати експерименту Монте-Карло: ефективність оцінок параметру γ_1 , отриманих методом моментів (ММ) та модифікованим методом моментів (МММ)

Крок квантування	Середнє	Медіана	СКВ
$q = 0$, ММ	2,7835745	2,7131176	0,4178142
$q = 0$, МММ	2,8264747	2,8242284	0,1106244
$q = 1$, ММ	2,7803261	2,7131452	0,4175148
$q = 1$, МММ	2,827927	2,828394	0,138542

Аналіз даних таблиці показує, що модифікований метод моментів забезпечує виграш по СКВ майже в 4 рази ($0,4178142/0,1106244 \approx 3,8$) в порівнянні з традиційним методом моментів, що є наглядною перевагою. Окрім цього, середнє значення параметру γ_1 , знайдене за результатами експерименту, для модифікованого методу моментів який відокремлюється від істинного значення в 4-му знаці після коми, в той час як традиційний метод моментів забезпечує точність тільки в першому знаці. Більш того, при вибраних значеннях параметрів $\alpha = 0,5$ і $\beta = 30$ квантування з кроком $q = 1$ практично не позначається на точності отриманих оцінок, однак це твердження виконується на практиці не завжди.

6.2 Графічний аналіз узгодження ймовірнісних моделей для ДКП коефіцієнтів JPEG зображень

Нижче наводяться експоненціальні P-P графіки для абсолютних значень ДКП коефіцієнтів різних тестових JPEG зображень з нанесеними альтернативами у виді гамма розподілу та бета розподілу другого роду. Для оцінювання параметрів вказаних розподілів використовувався модифікований метод моментів, який описується відношенням (6.5) та (6.6) відповідно.



Рисунок 6.1 – Тестове зображення «Цапля»

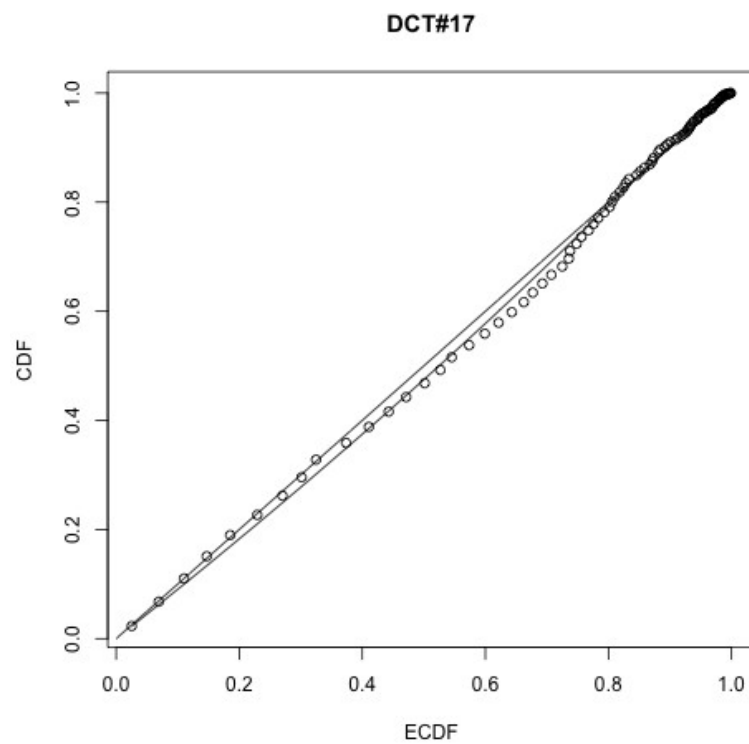


Рисунок 6.2 – Альтернатива у виді бета розподілу
другого роду для зображення «Цапля» для 13 коефіцієнта

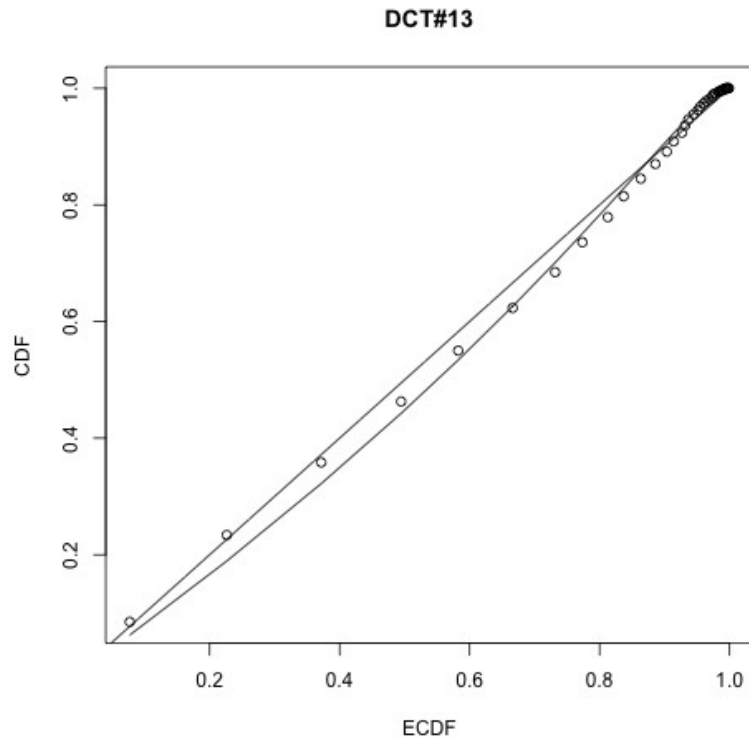


Рисунок 6.3 – Альтернатива у виді бета розподілу другого роду для зображення «Цапля» для 17 коефіцієнта

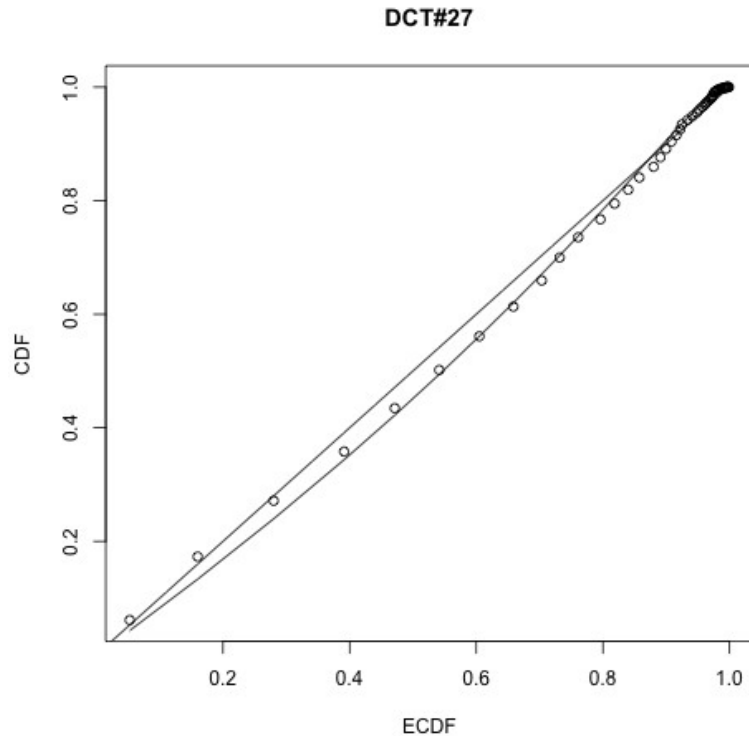


Рисунок 6.4 – Альтернатива у виді бета розподілу другого роду для зображення «Цапля» для 27 коефіцієнта



Рисунок 6.5 – Тестове зображення «Водяний млин»

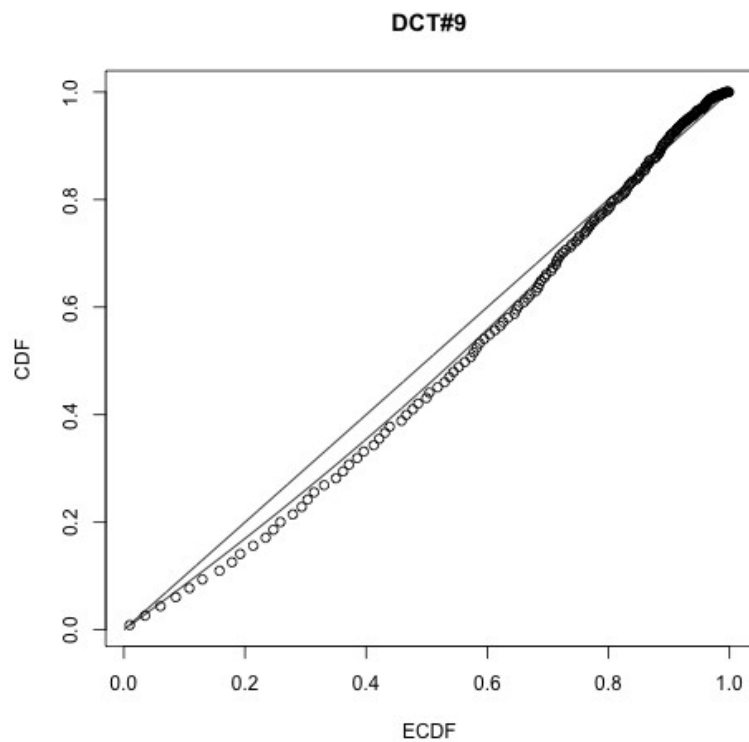


Рисунок 6.6 – Альтернатива у виді бета розподілу другого роду для зображення «Водяний млин» для 9 коефіцієнта

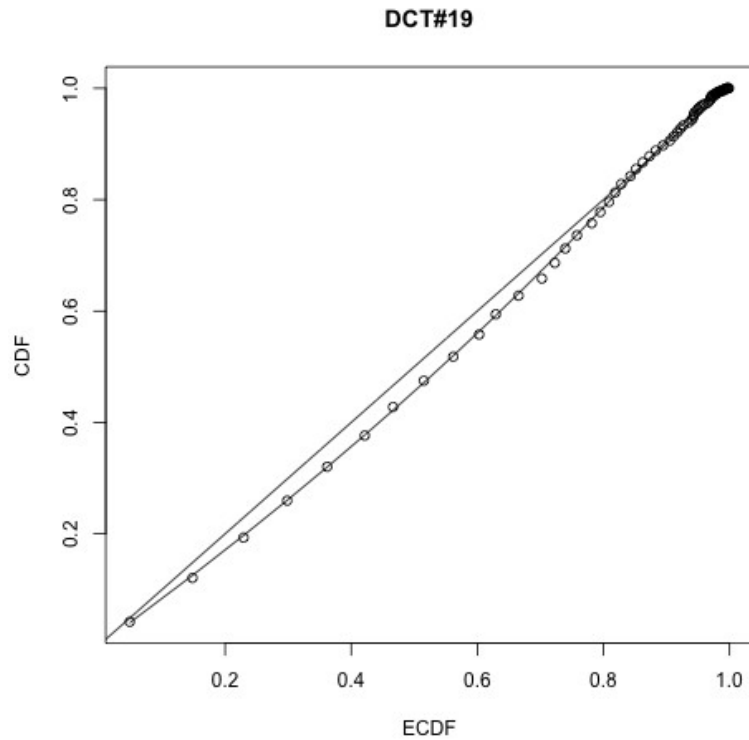


Рисунок 6.6 – Альтернатива у виді бета розподілу другого роду для зображення «Водяний млин» для 19 коефіцієнта

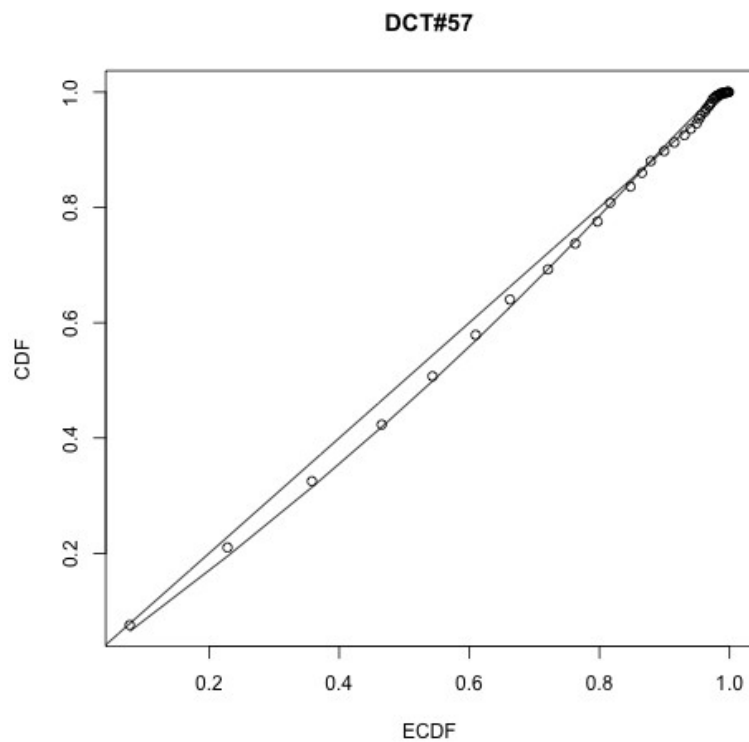


Рисунок 6.7 – Альтернатива у виді бета розподілу другого роду для зображення «Водяний млин» для 57 коефіцієнта



Рисунок 6.8 – Тестове зображення «Метелик»

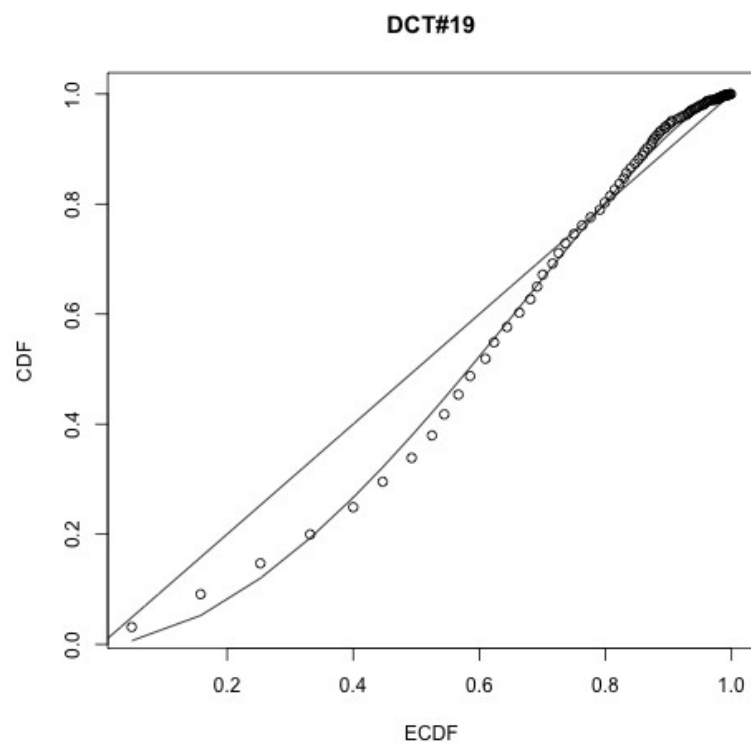


Рисунок 6.9 – Альтернатива у виді гамма розподілу для зображення «Метелик» для 19 коефіцієнта

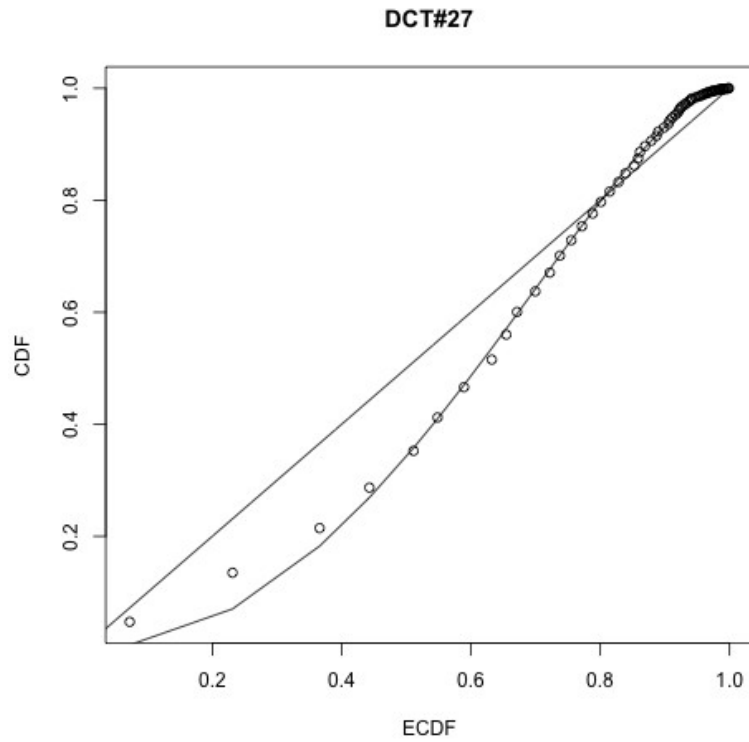


Рисунок 6.10 – Альтернатива у виді гамма розподілу
для зображення «Метелик» для 27 коефіцієнта

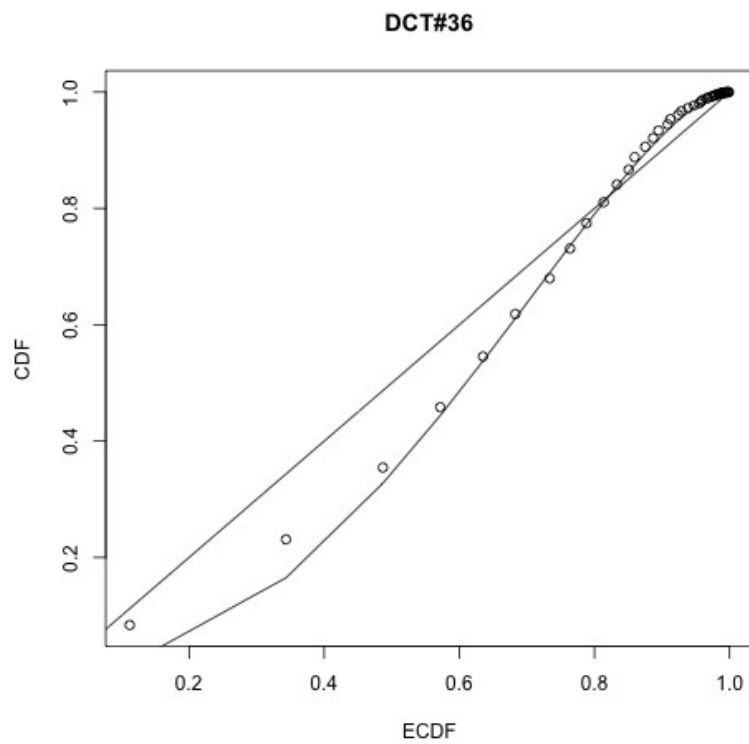


Рисунок 6.11 – Альтернатива у виді гамма розподілу
для зображення «Метелик» для 36 коефіцієнта



Рисунок 6.12 – Тестове зображення «Пагорб»

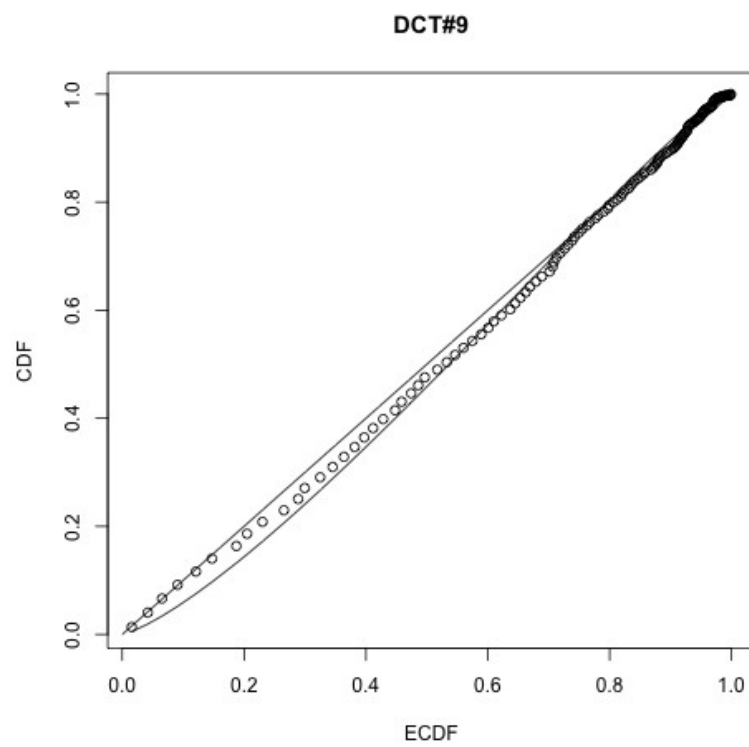


Рисунок 6.13 – Альтернатива у виді гамма розподілу
для зображення «Пагорб» для 9 коефіцієнта

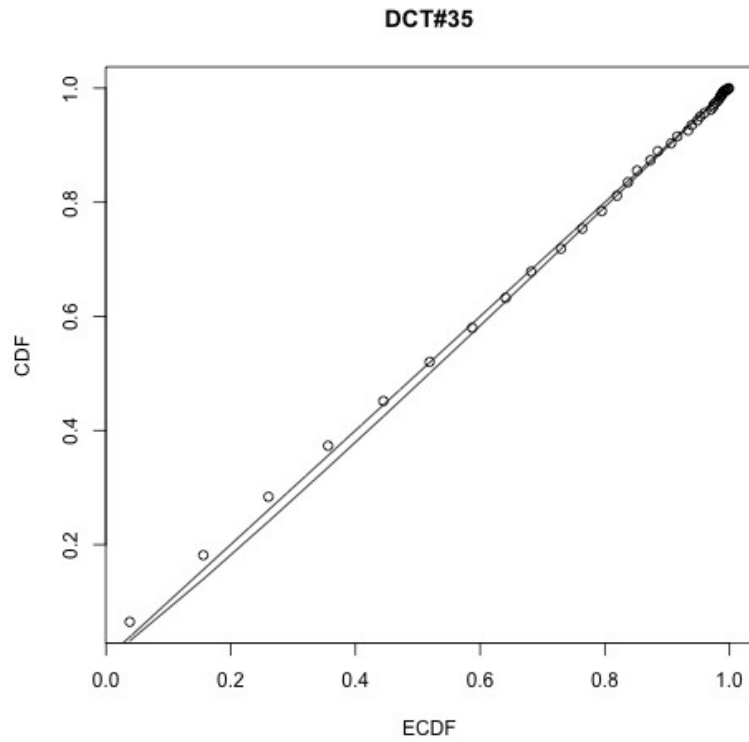


Рисунок 6.14 – Альтернатива у виді гамма розподілу
для зображення «Пагорб» для 35 коефіцієнта

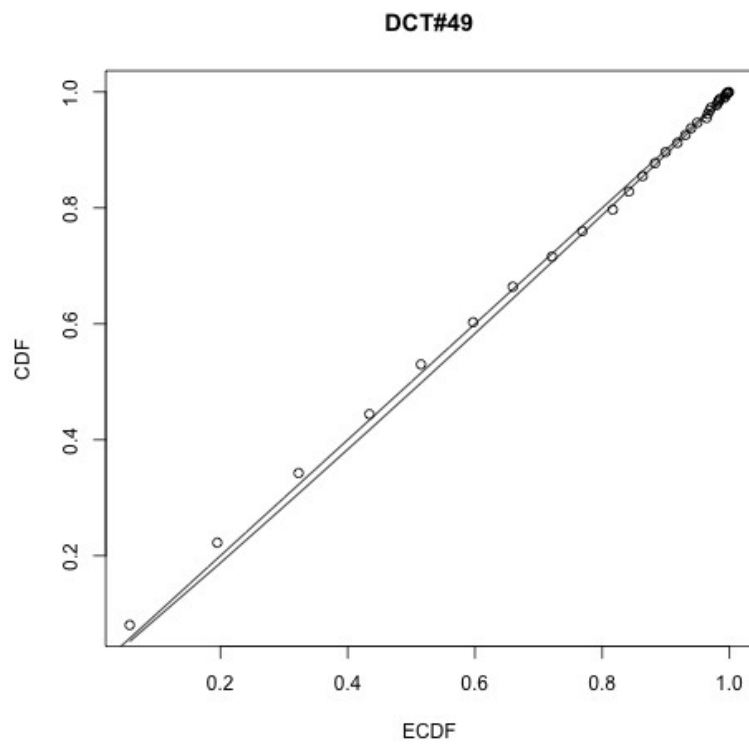


Рисунок 6.15 – Альтернатива у виді гамма розподілу
для зображення «Пагорб» для 49 коефіцієнта

Аналізуючи вище представлені Р-Р графіки окремих ДКП коефіцієнтів JPEG зображень, приходимо до висновку що для більшості коефіцієнтів задовільне узгодження забезпечує модель Лапласа (в даному випадку експоненціальний розподіл, оскільки аналізувалися абсолютні значення ДКП коефіцієнтів). У ряді випадків ми спостерігаємо відхилення від цієї моделі, іноді суттєві (див., наприклад, рис. 6.9-6.11) а іноді помірні, майже незначні, так як рис.6.14 та 6.15. Традиційно [18], у тих випадках коли модель Лапласа не працює, використовується загальний нормальний розподіл з щільністю

$$f_{GG}(x) = \frac{\alpha}{2\beta\Gamma(\frac{1}{\alpha})} e^{-\left(\frac{|x|}{\beta}\right)^\alpha}, \alpha, \beta > 0.$$

Незважаючи на те, що ця модель забезпечує

гарне узгодження з емпіричними даними, практична робота з цим розподілом ускладнена у виді масивності відношень які отримуються. Таким чином, актуальна задача пошуку альтернативних моделей, які були б простіше в роботі.

За результатами наведених в цій кваліфікаційній роботі досліджень, ми приходимо до висновку, що такими розподілами є в першу чергу гамма розподіл та бета розподіл другого роду або двосторонні еквіваленти. Вирази, які були отримані для бета штрих розподілу дещо простіше в порівнянні до гамма розподілу, однак останнє знаходить більш застосування в статистиці і ні цій основі, цьому розподілу можна дати більший пріоритет.

Для візуальної оцінки узгоджень добре підходять Р-Р графіки, представлені вище. Для строгої, кількісної оцінки узгодження ймовірнісної моделі та емпіричних даних можна рекомендувати критерій Гана [8] для експоненціального розподілу та перетворення Вілсона-Хілферті для гамма розподілу. Згадане перетворення дозволяє трансформувати гамма розподіл в нормальний розподіл, а потім, використовує той факт для перевірки гіпотези про узгодження. Розглянемо перетворення Вілсона-Хілферті детальніше.

6.3 Перетворення Вілсона-Хілферті

Нехай $X \sim f_{\Gamma}(x)$ та $Y = X^{\lambda}$, $\lambda < 1$. Тоді математичне очікування та дисперсія В.В. Y :

$$\begin{aligned} E[Y] = E[X^{\lambda}] &= \int_0^{\infty} x^{\lambda} f_{\Gamma}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1+\lambda}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \\ &= \frac{\beta^{\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1+\lambda}}{\beta^{\alpha-1+\lambda}} e^{-\frac{x}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{\beta^{\lambda} \Gamma(\alpha + \lambda)}{\Gamma(\alpha)}; \end{aligned}$$

$$E[X^{2\lambda}] = \frac{\beta^{2\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1+2\lambda}}{\beta^{\alpha-1+2\lambda}} e^{-\frac{x}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) = \frac{\beta^{2\lambda} \Gamma(\alpha + 2\lambda)}{\Gamma(\alpha)};$$

$$\begin{aligned} D[Y] = E[X^{2\lambda}] - E[X^{\lambda}]^2 &= \frac{\beta^{2\lambda} \Gamma(\alpha + 2\lambda)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\beta^{2\lambda} \Gamma^2(\alpha + \lambda)}{\Gamma^2(\alpha)} = \\ &= \frac{\beta^{2\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha + 2\lambda) - \frac{\Gamma^2(\alpha + \lambda)}{\Gamma(\alpha)} \right]. \end{aligned}$$

В окремому випадку, коли $\lambda = \frac{1}{4}$, отримаємо

$$\mu_1 = E[Y] = \frac{\beta^{\frac{1}{4}} \Gamma(\alpha + \frac{1}{4})}{\Gamma(\alpha)} \text{ та } \sigma^2 = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \left[\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) - \frac{\Gamma^2(\alpha + \frac{1}{4})}{\Gamma(\alpha)} \right].$$

Відомо, що випадкова величина Y наближено нормальна, тобто $X^{\lambda} \sim N(E[X^{\lambda}], D[X^{\lambda}])$. Цей факт може бути покладений в основу будування критеріїв про перевірки гіпотези про узгодження гамма розподілу та абсолютних значень ДКП коефіцієнтів JPEG зображень. Залишається тільки відкритим питання про найкращий вибір показника степеню $\lambda < 1$. Щоби відповісти на це

питання проведемо експеримент Монте Карло. А саме, будемо формувати вибірки з гамма розподілу з параметрами $\alpha \in \{0,2;0,35;0,5;0,65;0,8;0,75\}$ та $\beta = 1$. Потім, кожна отримана вибірка підноситься до степеню $\lambda \in [0,1;0,5]$ та за допомогою критерію Колмогорова перевіряється гіпотеза про узгодження перетворенної вибірки з нормальним розподілом. На рис. 6.16 показані отримані залежності статистики критерію Колмогорова від λ при різних значеннях параметру форми α . Горизонтальна лінія на графіку відповідає рівню значимості 0,01. Залежності отримані шляхом усереднення по 50 реалізаціям.

З аналізу даних рис. 6.16 видно, що близьке до оптимального значення $\lambda = \frac{1}{4}$.

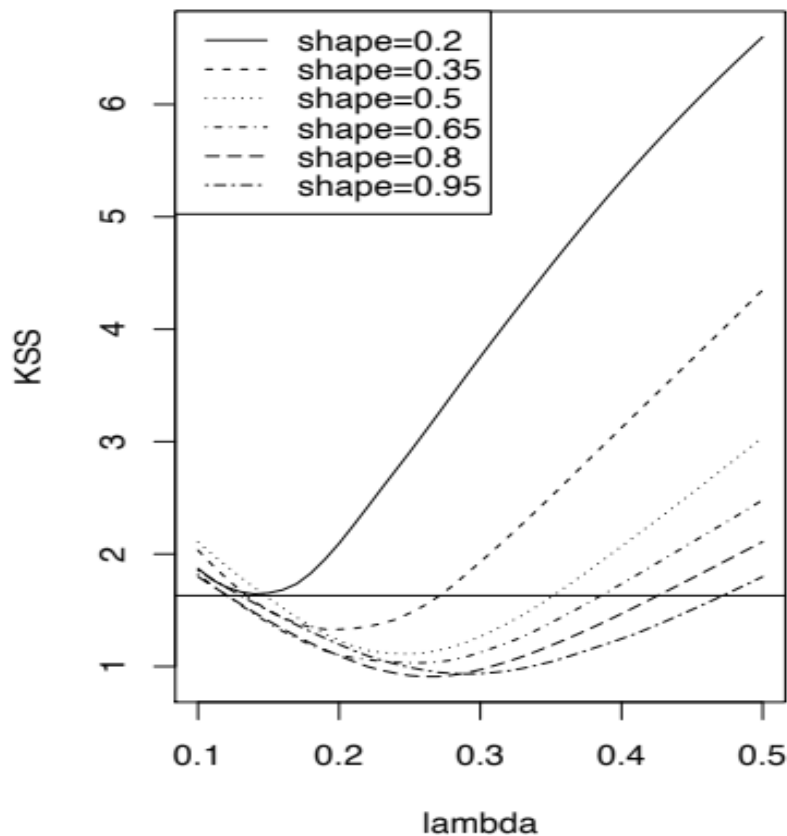


Рисунок 6.16 Визначення оптимального значення показника степеню λ в перетворенні Вілсона-Хілфєрти методом Монте Карло

ВИСНОВКИ

У цей час цифрові зображення займають дуже важливе місце у повсякденності: у школах, університетах, лікарнях тощо. Навіть не реально уявити наше життя без медіа, а саме цифрових зображень. Адже саме за допомогою цього ми можемо передати якусь неймовірну миттєву красу, звичайну фотографію або навіть започаткувати якийсь життєвий момент зі своєю родиною.

У даній роботі, була проведена ідентифікація ймовірнісних моделей ДКП коефіцієнтів JPEG зображень яка візуальним шляхом дає нам можливість побачити поводження самих ДКП коефіцієнтів. В кінці кінців, невідомі розподілі були ідентифіковані.

Експериментальним шляхом, за допомогою модифікованого методу моментів, були розраховані параметри розподілів (форма і положення) які були точніше традиційного методу моментів, що підтверджують отримані в роботі теоретичні висновки.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Гонсалес Р., Вудс Р. (2005), Цифрова обробка зображень, Техносфера, Москва, 1072с.
2. Цифрова обробка зображень. (2019), режим доступу до ресурсу: <http://sibsauktf.ru/courses/fulleren/g3.htm>
3. Матвеев Ю.Н., Симончик К.К., Тропченко А.Ю., Хитров М.В. (2013), Цифрова обробка сигналів, ИТМО, Санкт-Петербург, 166.
4. Басов С.В. (1999), Цифрова фотографія, СПбГУКиТ, Санкт-Петербург, 1112с.
5. Kendall, M. G., & Stuart, A. (1963). Distribution Theory, vol. 1. The Advanced Theory of Statistics, Griffin, London, p. 700.
6. Дискретне перетворення Хартлі (2020), режим доступу до ресурсу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Дискретное_преобразование_Хартли
7. Джонсон Н.Л., Коц С., Балакришнан Н. (2012), Одномірні неперервні розподіли, Біном, Москва, 703с.
8. Gan F.F., Koehler K.J., Thompson J.C. (1991), Probability plots and distribution curves for assessing the fit of probability models, No45, Taylor&Francis, pp.14-21.
9. Смірнов Н. В., Бунін-Барковський І. В. (1969), Курс теорії ймовірностей та математичної статистики, Наука, Москва, 512с.
10. Fisher, R. A., and Cornish, E. A. (1960). The percentile points of distributions having known cumulants, Technometrics, 2, pp. 209-225.
11. Cohen, A. C, and Whitten, B. J. (1988). Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models, Marcel Dekker, New York, p. 58.
12. Sendecor, G.W., and Cochran, W.G. (1980), Statistical Methods, Ames, IA: The Iowa State Press, p. 524.

13. Браунлі К.А. (1977), Статистична теорія та методологія в науці і техніці, Наука, Москва, 405с.
14. Гашніков М. В., Глумов Н. І., Ільясова Н. Ю. (2003), Методы компьютерной обработки изображений, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 784с.
15. Bowman, K. O., and Shenton, L. R. (1988). Properties of Estimators for the Gamma Distribution, Marcel Dekker, New York, p. 294.
16. Balakrishnan, N., and Cohen, A. C. (1991). Order Statistics and Inference: Estimation Methods, Academic Press, San Diego, p. 373.
17. Родигін М.В., Федоров О.В. (2015), Врахування структурних властивостей зображення при оцінювання якості стиснених JPEG зображень. *Східно-Європейський журнал передових технологій*. 6/4, № 78, 54-64с.
18. Lam E. Y., Goodman J. W (2000), Mathematical analysis of the DCT coefficient distributions for images, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 9, pp. 1661–1666.
19. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. (1984) Математическая статистика. Учебное пособие для вузов, Высш. Шк., Москва, 248с.
20. Loy A., Follett L., Hofmann H. (2014) Variations of Q–Q Plots: The Power of Our Eyes, *The American Statistician*, p.21.
21. D’Agustino R.B., Stephens M.A. (1987) Goodness-of-fit Techniques, Marcel Dekker, New York, pp. 412-416.