

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Чисельний аналіз методом R -функцій електростатичних
полів в областях з геометричними сингулярностями

(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-22-1

Галін П.К.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Ламтюгова С.М.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Галіну Павлу Костянтинівичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Чисельний аналіз методом R -функцій електростатичних полів
в областях з геометричними сингулярностями

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель електростатичного поля
в області з геометричною сингулярністю

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Ламтюгова С.М.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 54 с., 8 рис., 1 дод., 16 джерел.

ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ, ГЕОМЕТРИЧНА СИНГУЛЯРНІСТЬ,
ПОТЕНЦІАЛ, МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, МЕТОД РІТЦА.

Об'єкт дослідження – процеси електростатики.

Мета роботи – застосування структурного методу (методу R -функцій) до знаходження розв'язку крайової задачі для потенціалу електростатичного поля в областях з геометричними сингулярностями.

Методи дослідження – конструктивні методи теорії R -функцій та чисельні методи розв'язування задача математичної фізики.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями. Було проведено огляд математичних моделей електростатики, методів їх чисельного аналізу та зроблено висновок про доцільність використання структурного методу R -функцій у поєднанні з методом Рітца. На основі методики побудови структур розв'язку побудовано жмуток функцій, що точно задовольняє умови задачі, включаючи умови на геометричній сингулярності. Для апроксимації невизначеної компоненти жмутка запропоновано використати метод Рітца. Запропонована методика була алгоритмізована та програмно реалізована у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2. Наведено результати обчислювального експерименту для двох тестових задач.

ABSTRACT

Introductory note: 54 pages, 8 figures, 1 appendix, 16 sources.

ELECTROSTATIC FIELD, GEOMETRIC SINGULARITY, POTENTIAL, *R*-FUNCTIONS METHOD, RITZ METHOD.

The object of research is the processes of electrostatics.

The purpose of the work is to apply the structural method (*R*-functions method) for finding the solution of the boundary value problem for the potential of the electrostatic field in regions with geometric singularities.

Methods of research are the constructive methods of the *R*-functions theory and numerical methods of solving the mathematical physics problems.

The qualifying work considers the problem of mathematical modeling of electrostatic processes in areas with geometric singularities. A review of mathematical models of electrostatics, methods of their numerical analysis was conducted, and a conclusion about the appropriateness of using the *R*-functions structural method in combination with the Ritz method was made. Based on the methodology for constructing solution structures, a bundle of functions that exactly satisfies the conditions of the problem, including the conditions at the geometric singularity, was constructed. It was proposed to use the Ritz method to approximate the undetermined component of the bundle. The proposed technique was algorithmized and implemented in the Mathematica 13.2 computer algebra system. The results of the computational experiment for two test problems are presented.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Огляд математичних моделей електромагнітних процесів	9
1.2 Огляд методів чисельного аналізу задач математичної фізики	14
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	18
1.4 Постановка задач дослідження	20
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	22
2.1 R -функції і обернена задача аналітичної геометрії	22
2.2 Структурний метод (метод R -функцій)	25
2.3 Застосування структурного методу (методу R -функцій) до моделювання електростатичних процесів в областях з геометричними сингулярностями	35
Висновки за розділом 2	39
3 Програмна реалізація	40
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 та її можливості реалізації інженерних розрахунків	40
3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання електростатичних процесів в областях з геометричними сингулярностями	42
3.3 Опис програми	43
Висновки за розділом 3	43
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	45
4.1 Обчислювальний експеримент розв'язання тестової задачі 1	45
4.2 Обчислювальний експеримент розв'язання тестової задачі 2	46
Висновки за розділом 4	48
Висновки	49
Перелік джерел посилання	50
Додаток А Лістинг програми	52

ВСТУП

Актуальність теми. Електричне поле є особливим видом матерії, пов'язаним з електричними зарядами, що передає дії зарядів один на одного. Електричне поле – поле, що створене нерухомими електричними зарядами (за відсутності електричних струмів). Розв'язання задачі електродинаміки для різного виду геометричних структур є надзвичайно важливою проблемою у зв'язку з розвитком електроніки, фізики твердого тіла, включаючи фізику напівпровідників і оптоелектроніку. Часто досліджувана структура містить об'ємний заряд, що створює електростатичне поле, яке сильно впливає на входні параметри і характеристики приладів. Найбільш простим прикладом є діод, оснований на PN-переході. Отже, обрана тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) до знаходження розв'язку крайової задачі для потенціалу електростатичного поля в областях з геометричними сингулярностями.

Для досягнення поставленої мети під час проходження професійної практики необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз математичних моделей електромагнітних процесів;

- ознайомитися із чисельними методами отримання наближеного розв'язку задач математичної фізики, застосовних для дослідження електростатичних полів;

- розробити алгоритм застосування структурного методу (методу R -функцій) до чисельного дослідження електростатичних полів в областях з геометричними сингулярностями.

- виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в пакеті Mathematica 13.2;

- провести обчислювальний експеримент для тестових задач.

Об'єктом дослідження є процеси електростатики.

Предметом дослідження є двовимірна крайова задача для потенціалу та застосування до знаходження її розв'язку структурного методу (методу R -функцій).

Методи дослідження. У роботі використовуються конструктивний апарат теорії R -функцій та чисельні методи математичної фізики.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [2].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Огляд математичних моделей електромагнітних процесів

Основою математичного моделювання електромагнітних процесів є рівняння Максвелла [6, 10]. Електричні і магнітні поля, звісно, існували ще і до Максвелла. Вони породжувались зарядами і струмом, які вважались першопричиною виникнення електромагнітних явищ.

Рівняння, що були сформульовані Максвеллом, виникли на основі важливих експериментальних відкриттів, які були зроблені на початку ХІХ ст. Зокрема, в 1831 р. Фарадей зробив відкриття про те, що, якщо біля провідника переміщати магніт, то в провіднику породжується електричний струм. Це явище було названо електромагнітною індукцією. Фарадей увів поняття поля сил – деякого середовища, що знаходиться між зарядами і токами, яке характеризується розподілом певної фізичної величини в просторі. Це поняття Максвелл замінив на напруженість поля. Воно стало ключовим у його теорії.

Максвелл написав рівняння, яким підпорядковується електродинамічне середовище, що визначається взаємодією зарядів і струмів, навіть, що дуже важливо, при їх відсутності. Тобто в теорії Фарадея-Максвелла електромагнітні явища можуть протікати й без зарядів і струмів.

Рівняння Максвелла описують електромагнітні поля, які, змінюючись, взаємодіють між собою. Вони можуть існувати і розповсюджуватись самі по собі в просторі зі скінченною швидкістю.

Класична електродинаміка, що базується на рівняннях Максвелла, лежить в основі численних застосувань електро-, радіотехніки, оптики, квантової механіки, астрофізики, космології тощо. Цікаво зауважити, що досягнення фізики, які базуються на рівняннях електромагнетизму, окупили всі затрати людства на фундаментальні науки на 100 років уперед.

Перейдемо до запису рівнянь Максвелла. Станом будь-якої динамічної

системи електродинаміки є електромагнітні поля. Ці поля характеризуються векторними величинами: напруженістю електричного поля \vec{E} , напруженістю магнітного поля \vec{H} , електричною індукцією \vec{D} та магнітною індукцією \vec{B} .

Рівняння Максвелла дають у векторній формі систему з чотирьох рівнянь, яка в покоординатній формі зводиться до восьми (два векторних рівняння, що містять по три компоненти, плюс два скалярних) лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Ці рівняння мають вигляд [5, 6, 10]

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де \vec{j} , ρ – об’ємна густина електричного струму й об’ємна густина електричних зарядів;

$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{CM}}{\text{C}}$ – електродинамічна стала.

Тут $\operatorname{rot} \vec{E}$ – диференціальна операція над вектором $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, що визначається визначником вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Рівняння (1.1) мають фізичну інтерпретацію. Перше з них означає, що електричний заряд є джерелом електричної індукції, друге – що не існує магнітних зарядів, третє – що зміна магнітної індукції породжує вихрове електричне поле, четверте – що електричний струм і зміна електричної індукції породжують вихрове магнітне поле.

У загальному випадку це досить складна система рівнянь, оскільки вона описує всі явища електростатики, магнітостатики, електродинаміки й магнітного випромінювання хвиль.

Оскільки існують так звані матеріальні алгебраїчні рівняння Максвелла, що зв'язують характеристики \vec{D} і \vec{E} , а також \vec{B} і \vec{H} , то систему (1.1) часто записують у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Система (1.2) є перевизначеною. Вона містить вісім рівнянь для шести компонент, тобто двох векторних величин \vec{E} і \vec{H} . Але, як відомо, два скалярних рівняння можна взяти за початкові значення \vec{E} і \vec{H} .

У випадку розповсюдження електромагнітних хвиль у пустоті, тобто при відсутності зарядів і струму ($\rho, j = 0$), рівняння Максвелла (1.2) спрощуються і набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

З цих рівнянь можна одержати хвильове рівняння, яке дає існування гармонічної біжучої електромагнітної хвилі. Її швидкість, як з'ясувалося, є

близькою до швидкості світла, тому можна зробити висновок про те, що світло має електромагнітну природу.

Покажемо, що з (1.3) випливають хвильові рівняння для величин \vec{E} і \vec{H} . Дійсно, продиференціюємо рівняння для \vec{E} за t , а до рівняння для величини \vec{H} застосуємо операцію rot . Тоді одержимо

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \text{rot rot} \vec{E}.$$

Застосовуючи відому формулу векторного аналізу $\text{rot rot} = \nabla \text{div} - \Delta$, дістанемо

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -c^2 (\nabla \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}).$$

Оскільки $\text{div} \vec{E} = 0$, то приходимо до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}.$$

Аналогічно можна виписати рівняння і для вектора напруженості магнітного поля \vec{H} . Тепер можна знаходити розв'язки хвильових рівнянь, які задовольняють систему (1.3).

Розв'яжемо простішу задачу. Припустимо, що \vec{E} і \vec{H} є тільки функціями двох змінних: часу t і координати x . Наша задача з'ясувати, чи рівняння Максвелла (1.3) мають розв'язки у вигляді плоских біжучих хвиль уздовж осі Ox .

Нехай $\vec{E} = (E_x(x), E_y(x), E_z(x))$, $\vec{H} = (H_x(x), H_y(x), H_z(x))$. Тоді з двох останніх рівнянь системи (1.3) маємо

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

А це означає, що компоненти E_x і H_x векторів \vec{E} і \vec{H} не залежать від x . Нехай вони набувають нульових значень $E_x = 0$, $E_y = 0$.

Після цього розпишемо два перших рівняння системи (1.3) в компонентній формі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial H_z}{\partial x}, & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= c \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= c \frac{\partial E_z}{\partial x}, & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -c \frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ці рівняння розділяються на дві незалежні пари. Випишемо одну з них

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Диференціюючи перше рівняння за t , а друге – за x і порівнюючи їх, приходимо до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2},$$

яке, як відомо, має розв'язок типу біжучої гармонічної хвилі

$$E_y = A_1 \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right).$$

Аналогічний розв'язок можна одержати і для величини H_z

$$H_z = A_2 \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right).$$

Одержаний частинний розв'язок задовольняє вихідну систему (1.3) і є електромагнітною хвилею, що складається з двох перпендикулярних гармонічних плоских хвиль електричного і магнітного полів, які розповсюджуються вздовж осі Ox зі швидкістю c (рис. 1.1).

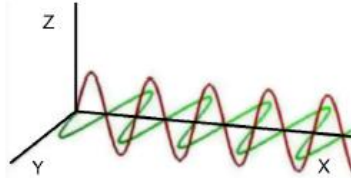


Рисунок 1.1 – Гармонічна електромагнітна хвиля

Як бачимо, зміна з часом електричного поля супроводжується породженням магнітного поля, а зміна з часом магнітного поля супроводжується породженням електричного поля, тобто електромагнітне поле – це два взаємозв'язаних поля.

Електромагнітних хвиль є багато, серед них – світлові, радіохвилі, ультрафіолетові, інфрачервоні, рентгенівські та ін. Всі вони мають електромагнітну природу і відрізняються лише частотою і довжиною хвилі при однакових швидкостях розповсюдження.

Отже, електромагнітні поля наявні в просторі, вони взаємодіють, розповсюджуються, хоча рухомих зарядів уже не існує, тобто електромагнітне поле є реальністю, існує самостійно і проявляє себе як матеріальний об'єкт.

1.2 Огляд методів чисельного аналізу задач математичної фізики

Розглянемо тепер методи розв'язання рівнянь математичної фізики, зокрема, рівняння Пуассона.

Одним з можливих методів розв'язання рівнянь математичної фізики є метод сіток, при використанні якого проводиться дискретизація розрахункової

області, тобто заміна цієї області набором точок, і після цього вихідна диференціальна задача замінюється системою лінійних рівнянь. Розглянемо застосування методу сіток [1, 11] на прикладі двовимірної задачі.

У прямокутнику

$$\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$$

з межею $\partial\Omega$ розглянемо наступну задачу

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$u(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (1.5)$$

де $\mu(\mathbf{x})$ – задана функція, неперервна на $\partial\Omega$.

Задачу (1.4), (1.5) можна трактувати як двовимірну задачу електростатики, коли на межах прямокутника задано потенціал.

В області Ω введемо рівномірну сітку з кроком h_1 за змінною x_1 і кроком h_2 за змінною x_2

$$\bar{\Omega}_h = \{\mathbf{x}_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (ih_1, jh_2), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2, \\ h_1 N_1 = l_1, h_2 N_2 = l_2\}.$$

Припустимо, що задача (1.4), (1.5) має єдиний розв'язок, що належить простору $C^4(\Omega)$.

Нехай

$$y = \{y_{ij}, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

– сіткова функція, що задана на сітці $\bar{\Omega}_h$ і апроксимує розв'язок u диференціальної задачі (1.4), (1.5), а

$$[u]_{\mathbf{h}} = \{u_{ij} = u(\mathbf{x}_{ij}), i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}$$

– проєкція точного розв’язку одновимірної стаціонарної задачі на сітку $\bar{\Omega}_{\mathbf{h}}$.

Для апроксимації оператора Лапласа скористаємось п’ятиточковим шаблоном «хрест», який складається з точок \mathbf{x}_{ij} , $\mathbf{x}_{i\pm 1, j}$, $\mathbf{x}_{i, j\pm 1}$. У множині $\bar{\Omega}_{\mathbf{h}}$ виокремимо множину внутрішніх вузлів

$$\Omega_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{ij} = (ih_1, jh_2), i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}$$

і множину граничних вузлів

$$\partial\Omega_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{x}_{0j}, \mathbf{x}_{N_1j}\}_{j=1}^{N_2-1} \cup \{\mathbf{x}_{i0}, \mathbf{x}_{iN_2}\}_{i=1}^{N_1-1}.$$

У внутрішніх вузлах сітки $\mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ оператор Лапласа Δu апроксимуємо виразом $\Delta_{\mathbf{h}} u = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$, який задається у вузлі $\mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ рівністю

$$\Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = \frac{y_{i-1, j} - 2y_{ij} + y_{i+1, j}}{h_1^2} + \frac{y_{i, j-1} - 2y_{ij} + y_{i, j+1}}{h_2^2}.$$

При цьому

$$\Delta_{\mathbf{h}} u_{ij} - \Delta u_{ij} = \frac{h_1^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}(\xi_i, x_2^{(j)}) + \frac{h_2^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}(x_1^{(i)}, \eta_j),$$

де

$$\begin{aligned} \xi_i &\in (x_1^{(i-1)}, x_1^{(i+1)}), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ \eta_j &\in (x_2^{(j-1)}, x_2^{(j+1)}), \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \end{aligned}$$

Тоді поставимо у відповідність задачі (1.1), (1.2) різницеву схему

$$-\Delta_{\mathbf{h}} y_{ij} = f(\mathbf{x}_{ij}), \text{ якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \Omega_{\mathbf{h}}, \quad (1.6)$$

$$y_{ij} = \mu_{ij}, \text{ якщо } \mathbf{x}_{ij} \in \partial\Omega_{\mathbf{h}}. \quad (1.7)$$

Тут $\mu_{ij} = \mu(\mathbf{x}_{ij})$, $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$.

Недоліком скінченно-різницевого схем є те, що замість отримання наближеного розв'язку у вигляді неперервної функції ми отримаємо лише каркас наближеного розв'язку, до якого ще треба застосувати апарат інтерполяції. Нехай y_{ij} , $i = 0, 1, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots, N_2$, – значення каркасу наближеного розв'язку задачі (1.4), (1.5), знайдені з системи (1.6), (1.7). Тоді наближений розв'язок задачі (1.4), (1.5) можна записати у вигляді неперервної функції, наприклад, за допомогою кусково-лінійного сплайна:

$$u_{N_1, N_2}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} y_{ij} \cdot B_1\left(\frac{N_1 x_1}{l_1} - i\right) B_1\left(\frac{N_2 x_2}{l_2} - j\right),$$

$$\text{де } B_1(t) = \begin{cases} t+1, & t \in [-1, 0], \\ 1-t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \text{ – фінітний сплайн Шенберга першого степеня.}$$

Крім сіткових методів до розв'язування задачі (1.4), (1.5) можна також застосовувати варіаційні методи, зводячи задачу (1.4), (1.5) до задачі знаходження мінімуму функціоналу енергії у відповідному енергетичному просторі [7, 9, 11, 16]. Проте практична реалізація варіаційних методів натикається на необхідність будувати координатні функції для областей некласичної (складної) геометрії. Для подолання цих труднощів слід використати конструктивний апарат теорії R -функцій [13, 14].

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Система рівнянь, що описує поведінку електромагнітного поля, пов'язаного з постійним струмом, впливає з системи рівнянь Максвелла у результаті нехтування доданками, залежними від часу t

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, & \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система рівнянь (1.8) описує поля, що створюються в просторі вільними електричними зарядами, постійними магнітами, стаціонарними струмами у провідниках. За відсутності струму провідності $\vec{j} = 0$ система рівнянь (1.8) розпадається на дві незалежні системи рівнянь – електростатики і магнітостатики.

Система рівнянь електростатики (1.8) приводить до поширеного рівняння відносно електростатичного потенціалу φ – рівняння Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (1.9)$$

У областях, де відсутній заряд ($\rho = 0$) потенціал φ задовольняє рівняння Лапласа $\Delta \varphi = 0$ (відповідне (1.9) однорідне рівняння).

У сучасній науці величезний інтерес має моделювання геометричних структур із зниженою вимірністю – квантових ям, квантових ниток і точок. Ці структури містять об'ємний заряд, поширений в одному, два або трьох вимірах. Моделями двовимірних структур є прямокутні пластини, зображені на рис 1.2 та рис. 1.3.

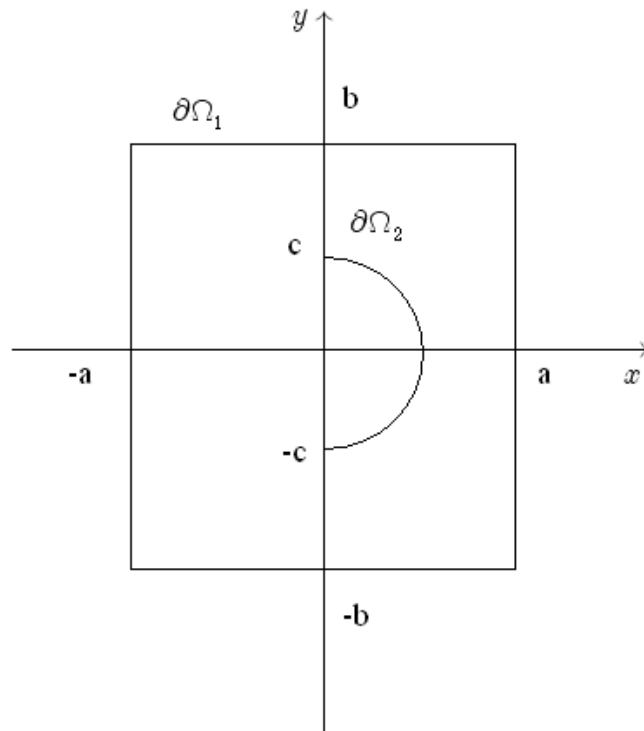


Рисунок 1.2 – Прямокутна область з розрізом-напівколом

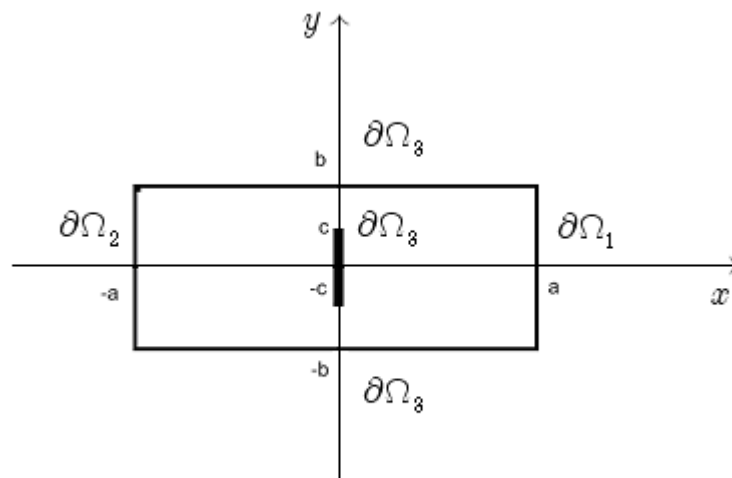


Рисунок 1.3 – Прямокутна область зі вставкою-ізолятором

Ми розглядаємо прямокутну область, тому що ця геометрія є типовою для планарних структур. Реалізація такої геометрії є найбільш простим способом створення напівпровідникових структур. Також важливим є знання про характер розподілу електростатичного поля усередині прямокутних областей в теорії антен, що працюють у СВЧ-діапазоні.

У роботі розглядаються дві задачі у областях з розрізами (так званими геометричними сингулярностями).

Задача 1. Математична модель має вигляд

$$\Delta u = 0 \text{ у } \Omega, \quad (1.10)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad u|_{\partial\Omega_2} = 1, \quad (1.11)$$

де Ω – область, зображена на рис. 1.2.

Задача 2. Математична модель має вигляд

$$\Delta u = 0 \text{ у } \Omega, \quad (1.12)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad u|_{\partial\Omega_2} = -1, \quad (1.13)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_3} = 0, \quad (1.14)$$

де Ω – область, зображена на рис. 1.3.

1.4 Постановка задач дослідження

Проведений аналіз математичних моделей електромагнітних процесів та методів їх чисельного аналізу показав перспективність дослідження двовимірних задач електростатики в областях з геометричними сингулярностями із застосуванням для їх чисельного аналізу методу R -функцій.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) до чисельного аналізу плоских задач електростатики в областях з геометричними сингулярностями.

Для досягнення поставленої мети необхідно:

– провести аналіз математичних моделей електромагнітних процесів;

– ознайомитися із методами отримання наближеного розв’язку задач математичної фізики, застосовних для дослідження електростатичних процесів (зокрема, методом R -функцій);

– розробити алгоритм застосування структурного методу (методу R -функцій) до чисельного дослідження плоских задач електростатики в областях з геометричними сингулярностями.

– виконати програмну реалізацію розробленого алгоритму в пакеті Mathematica 13.2;

– провести обчислювальний експеримент для тестових задач.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 R-функції і обернена задача аналітичної геометрії

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії. Нехай у \mathbb{R}^2 заданий геометричний об'єкт (локус) Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ і необхідно побудувати функцію $\omega(x, y)$, що є додатною усередині Ω , від'ємною зовні Ω і такою, що дорівнює нулю на $\partial\Omega$. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ у неявній формі визначатиме геометричне місце точок, що є межею $\partial\Omega$ області Ω .

Функція $\omega(x, y)$ досить просто можна побудувати за допомогою методу R-функцій [4, 8, 14] для областей досить довільної форми, причому функція $\omega(x, y)$ в цьому випадку належатиме класу елементарних функцій і матиме вигляд єдиного аналітичного виразу.

Введемо до розгляду характеристичну функцію, що відповідає області Ω ,

$$\chi(\omega(x, y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x, y) < 0, \\ 1, & \omega(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Маючи у розпорядженні деяку конкретну систему характеристичних функцій $\chi_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)$, $i = \overline{1, m}$, та булеву функцію $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$, можна побудувати предикат

$$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = F((\omega_1 \geq 0), (\omega_2 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)),$$

який визначає область Ω , що сконструйована з допоміжних областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ за логічними правилами, визначеними булевою функцією F , за допомогою наступних логічних операцій над множинами: “ \cap ” – перетину, “ \cup ” – об'єднання і “ \neg ” – доповнення. Формально це можна записати так:

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (2.1)$$

Вважаємо, що вихідні або, точніше, опорні області $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ мають простішу форму, ніж Ω , і для кожної з них відомим є рівняння її межі $\omega_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Метод R -функцій дозволяє на підставі теоретико-множинного опису області Ω отримати в аналітичному вигляді рівняння її межі $\omega(x, y) = 0$.

Означення 1. R -функцією (функцією В.Л. Рвачова), що відповідає розбиттю числової осі на інтервали $(-\infty, 0)$ і $[0, +\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів.

Одночасно з R -функцією буде заданою деяка супроводжуюча функція двозначної логіки з тією є самою кількістю аргументів. Тому можна дати також наступне еквівалентне означення R -функції [4, 8, 14].

Означення 2. Функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$, де двозначний предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Кожній R -функції відповідає єдина супроводжуюча булева функція. Зворотне твердження не є вірним, і одній і тій самій булевій функції відповідає нескінченна множина (вітка) R -функцій. Множина R -функцій функціонально замкнена, тобто суперпозиція R -функцій також є R -функцією.

Означення 3. Система функцій H , що складається з R -функцій, називається досить повною, якщо множина всіх суперпозицій елементів H (множина H -реалізованих функцій), має непорожній перетин з кожною віткою множини R -функцій.

Достатньою умовою повноти системи H є повнота системи H^* відповідних супроводжуючих булевих функцій. Система $H^* = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$ є однією з найбільш уживаних повних систем в множині булевих функцій.

Перехід від предикатного задання області Ω у вигляді (2.1) до її задання за допомогою нерівності $\Omega = (\omega(x, y) \geq 0)$ може бути здійснений за допомогою

однієї з досить повних систем R -функцій. Наприклад, найчастіше використовується система \mathfrak{R}_α :

$$\begin{aligned}x \wedge_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha}(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}), \\x \vee_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha}(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}), \\-\bar{x} &\equiv -x.\end{aligned}$$

Тут $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$, $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y)$.

Перехід від предикатної форми задання області (2.1) до звичайного, який використовується в аналітичній геометрії, рівняння для межі області здійснюється за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$, $i=1, 2, \dots, m$, а символів $\{\cap, \cup, \neg\}$ – відповідно на символи R -операцій $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, -\}$. Отримаємо у результаті аналітичний вираз $\omega(x, y)$, який і визначає в елементарних функціях потрібне рівняння $\omega(x, y)=0$ межі $\partial\Omega$. При цьому $\omega(x, y) > 0$ для внутрішніх точок області і $\omega(x, y) < 0$ для зовнішніх точок.

Означення 4. Рівняння $\omega(x, y)=0$ локуса $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$ до n -го порядку, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = -1, \quad \frac{\partial^l\omega}{\partial\mathbf{n}^l}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad l=2, 3, \dots, n, \quad (2.2)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Зазначимо, що умови (2.2) означають, що уздовж нормалі до $\partial\Omega$ функція $\omega(x, y)$ поводить себе приблизно як функція відстані r точок цієї нормалі від межі $\partial\Omega$.

Нормалізоване до першого порядку рівняння $\omega(x, y)=0$ може бути отримане з рівняння $\omega_1(x, y)=0$ таким чином.

Теорема 1. Якщо $\omega(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умови $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ і $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} > 0$,

то функція

$$\omega_1 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + |\nabla\omega|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2),$$

де $|\nabla\omega| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}$, задовольняє умови $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = -1$ у всіх

регулярних точках межі $\partial\Omega$.

У випадку, коли $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, для побудови нормалізованого до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса Ω можна скористатися простішою формулою $\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}$.

Для таких областей, як напівплощина, смуга, шар, круг, сфера і деяких інших, нормалізовані рівняння можна отримати шляхом введення простих множників нормувань. Також виявляється, що використання деяких досить повних систем R -функцій дозволяє перенести цю їх властивість нормалізованості і на випадок складних локусів, для яких згадані прості області є опорними.

Теорема 2. Функція $\omega(x, y)$, утворена з нормалізованих функцій $\omega_i(x, y)$ за допомогою R -операцій систем \mathfrak{R}_α також є нормалізованою в регулярних точках межі, якщо $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

2.2 Структурний метод (метод R -функцій)

У своїй більшості математичні моделі фізичних полів мають вигляд крайових (або початково-крайових) задач для диференціальних рівнянь з

частинними похідними. Задача розрахунку фізичного поля зводиться до знаходження в деякій області Ω розв'язку u рівняння $Au = f$ за наступних умов на межі $\partial\Omega$ області Ω :

$$L_i u = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

де A і L_i – задані диференціальні оператори (L_i у окремому випадку можуть бути тотожним оператором); f і φ_i – функції, визначені відповідно усередині області Ω і на ділянках $\partial\Omega$ її межі. Ділянки $\partial\Omega_i$ не обов'язково всі різні і можуть співпадати з усією межею $\partial\Omega$. Наявні в постановках крайових задач функції u , f , φ_i і оператори A і L_i називаються аналітичними компонентами крайової задачі; область L_i , її межа $\partial\Omega$, ділянки межі $\partial\Omega_i$ – геометричними компонентами. Особливий інтерес мають крайові задачі розрахунку полів, залежних від двох і більше координат. Характерною особливістю таких задач є залежність поля від геометричних форм, що може мати у реальних об'єктах доволі складну конфігурацію. Це може бути форма області Ω , ділянок $\partial\Omega_i$, межі $\partial\Omega$, ліній або поверхонь розриву аналітичних компонент тощо. Більш того, в разі крайових задач для кусково-однорідних середовищ, самі оператори A і L_i можуть мати абсолютно різний вигляд в різних підобластях $\Omega_j \subset \Omega$ і на ділянках $\partial\Omega_j \subset \Omega$. Існування двох різнорідних видів інформації (аналітичної і геометричної) є серйозною перешкодою при знаходженні розв'язку крайової задачі. При дослідженні і розв'язуванні крайових задач необхідно не лише враховувати вигляд формул, що входять в постановку задачі, але і приводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, щоб включати її у розрахунковий алгоритм. Здійснити цю процедуру як раз і дозволяє метод R -функцій [4, 8, 14].

За допомогою нормалізованого рівняння можна будувати жмутки функцій, нормальна або тангенціальна похідна яких, або довільна лінійна комбінація вказаних похідних і самої функції на межі області набуває заданих

значень. Для цього введемо спочатку такі лінійні диференціальні оператори із змінними коефіцієнтами, залежними від форми області:

$$D \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$T \equiv -\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x},$$

де $\omega(x, y)$ – нормалізоване рівняння межі області, тобто:

- а) $\omega(x, y) > 0$ усередині Ω ,
- б) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$,
- в) $\omega(x, y) < 0$ зовні Ω ,
- г) на $\partial\Omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = -1. \quad (2.3)$$

При цьому для довільної досить гладкої функції f на межі області $\partial\Omega$ матиме місце

$$Df|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega}, \quad Tf|_{\partial\Omega} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}|_{\partial\Omega},$$

де \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – вектори зовнішньої нормалі і дотичної до межі відповідно. Аналоги операторів D і T , що відповідають ділянкам $\partial\Omega_i$ межі $\partial\Omega$, позначатимемо як

$$D^{(i)} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad T^{(i)} \equiv -\frac{\partial \omega_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x},$$

де $\omega_i(x, y)$ – нормалізоване рівняння відповідної ділянки межі $\partial\Omega_i$.

З (2.3) для $\omega(x, y)$ і добутку $\omega(x, y)\Phi$, де Φ – обмежена диференційовна функція, отримуємо

$$D_1\omega = 1 + O(\omega), \quad T_1\omega = 0,$$

$$D_1(\omega\Phi) = (D_1\omega)\Phi + \omega D_1\Phi = \Phi + O(\omega), \quad T_1(\omega\Phi) = O(\omega).$$

Означення 5. Загальною структурою розв'язку крайової задачі називається вираз

$$u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m),$$

що при будь-якому виборі невизначеної компоненти Φ точно задовольняє всі крайові умови задачі. Тут B – оператор, залежний від геометрії області Ω і ділянок $\partial\Omega_i$ її межі, а також операторів крайових умов, але не залежний від вигляду оператора A і функції f .

Відповідно, частковою структурою розв'язку називатимемо вираз вигляду

$$u = B_i(\Phi, \omega, \omega_i, \varphi_j),$$

який при будь-якому виборі невизначеної компоненти Φ точно задовольняє лише граничну умову на i -й ділянці межі $\partial\Omega$.

Отже, структура розв'язку здійснює продовження граничних умов всередину області. Метод R -функцій у застосуванні до розв'язування крайових задач часто називають також структурним методом R -функцій. Основні типи крайових умов для диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку (наприклад Лапласа, Пуассона, Гельмгольца) і структури розв'язку відповідних крайових задач наведено далі.

Наведемо основні типи крайових умов та їх структури розв'язку:

а) умова першого роду $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, структура розв'язку, що їй відповідає, має вигляд $u = \omega\Phi + \varphi$;

б) умова другого роду $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \varphi$, відповідна структура розв'язку – $u = (1 - \omega D)\Phi - \omega\varphi$;

в) умова III-го роду $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi$, відповідна структура – $u = [1 + \omega(h - D)]\Phi - \omega\varphi$;

г) мішані умови $\begin{cases} u|_{\partial\Omega_1} = \varphi_1, \\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu\right)\right|_{\partial\Omega_2} = \varphi_2, \end{cases}$ структура – $u = \left[1 + \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}(h - D^{(2)})\right](\omega_1\Phi + \varphi_1) - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\varphi_2$.

Зазначимо, що у структурах розв'язку для крайових умов диференціального типу функції $\omega(x, y)$ і $\omega_2(x, y)$ мають бути нормалізованими.

Задача побудови рівняння складного геометричного об'єкту є окремим випадком загальнішої проблеми, коли шукана функція φ набуває на різних ділянках $\partial\Omega_i$ межі області Ω задані значення φ_i , тобто

$$\varphi = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Для простоти вважатимемо, що φ_i є елементарними функціями, визначеними всюди в області $\Omega \cup \partial\Omega$. Із застосуванням методики, описаної вище, конструюються функції ω_i^0 , які дорівнюють нулю всюди на $\partial\Omega$, за винятком ділянки $\partial\Omega_i$. Тоді функція

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i \omega_i^0}{\sum_{j=1}^m \omega_j^0} \quad (2.5)$$

задовольняє умови (2.4) і визначена всюди в області, за винятком точок, спільних для різних ділянок. Замість виразу (2.5) можна також застосовувати формулу

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i \omega_i^{-1}}{\sum_{j=1}^m \omega_j^{-1}}, \quad (2.6)$$

де $\omega_i = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_i$ межі $\partial\Omega$, причому $\omega_i > 0$ зовні $\partial\Omega_i$. При наближенні до ділянки $\partial\Omega_i$ функція $\omega_i \rightarrow 0$ і граничні значення функції φ співпадають із значеннями відповідної функції φ .

Оператор “склеювання” граничних значень, що визначається за допомогою якої-небудь з наведених формул (2.5), (2.6), позначатимемо надалі ЕС.

У виразах (2.5), (2.6) замість функцій φ_i можна записати жмутки функцій, співпадаючих на ділянках $\partial\Omega_i$ з φ_i , а саме φ_i замінити на $\varphi_i + \omega_i \Phi_i$, де Φ_i – невизначена обмежена функція. Таким чином, замість (2.6) можна записати формулу для жмутків функцій, що набувають на ділянці $\partial\Omega$ задані значення:

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^m \varphi_i \omega_i^{-1}}{\sum_{j=1}^m \omega_j^{-1}} + \frac{\Psi}{\sum_{j=1}^m \omega_j^{-1}} + \omega \Phi,$$

де $\omega = 0$ – рівняння межі $\partial\Omega$;

Φ – довільна обмежена функція;

$$\Psi = \Phi_1 + \dots + \Phi_m.$$

Невизначені компоненти Ψ і Φ цього жмутка функцій можна використовувати для задоволення додаткових умов, які виникають при використанні жмутків в крайових задачах.

Невизначену компоненту Φ зазвичай подають у вигляді апроксимаційно-універсального полінома $\Phi \approx P_N$ – степеневого, тригонометричного, Чебишова, складеного з фінітних сплайнів або атомарних функцій, де N – розмірність простору апроксимації. Залежно від вигляду аналітичних компонент – операторів A , L_i і функцій f , φ_i , що моделюють відповідно фізичні закони і характер розподілу збудників полів, – а ріогі зазвичай вдається встановити приналежність розв’язку крайової задачі до деякого компакту K , наприклад $K = H^s(\Omega)$. Проблема повноти структурних формул

$$u = B(\Phi, \omega, \omega_i), \quad (2.7)$$

де B – оператор, залежний від форми межі $\partial\Omega$ і її ділянок $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, який будується так, що для будь-якого вибору невизначеної компоненти Φ формула (2.7) точно задовольняє крайові умови $L_i u = 0$ на $\partial\Omega$, полягає в з’ясуванні умов, за виконання яких для кожної функції $u \in K$ існує такий поліном P_N , що

$$\|u - B(P_N, \omega, \omega_i)\|_{H^s(\Omega)} < \varepsilon,$$

де ε – довільне досить мале додатне число.

Повнота структури (2.7) за досить загальних припущень відносно функцій u , ω і форми області Ω була досліджена Л.В. Канторовичем для $k = 0$ [3] і І.Ю. Харрік в загальному випадку [12]. У теоремі І.Ю. Харрік передбачається, що функція ω визначена у відкритій області $\Omega_0 \supset \Omega$ і задовольняє наступні умови:

$$\text{а) } \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega_1, \partial\Omega_2;$$

б) $\omega \neq 0$ усередині Ω і $\vec{\nabla}\omega \neq 0$ на $\partial\Omega$;

в) межа $\partial\Omega$ задовольняє умові «конуса»: для всякої точки $A \in \partial\Omega$ існує такий конус з вершиною A і ненульовим кутом розвороту, який повністю лежить усередині Ω ;

г) $\omega \in C^k(\Omega_0)$.

За виконання цих умов І.Ю. Харрік була отримана наступна оцінка

$$\|u - \omega^{k+1} P_N\|_{C^k(\Omega)} < \varepsilon$$

у банаховому просторі $C^k(\Omega)$, з якої виходить зручніша при реалізації варіаційних методів оцінка в гільбертовому просторі $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ з нормою

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sum_{i=0}^k \sum_{(i)} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де символ $\sum_{(i)}$ означає підсумовування норм (у метриці L_2) всіх можливих

похідних порядку $i = i_1 + i_2 + \dots + i_s$:

$$\left\| \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Покажемо, як структуру Канторовича можна трансформувати в повну.

Розглянемо деяку область $[\omega_0 \geq 0]$, що містить розріз (рис. 2.1).

Нормалізоване рівняння розрізу може бути подане у вигляді $\omega_1 = [\sqrt{l^2 \nu_\alpha \bar{\nu}}]$ або

$$\omega_1 = \left[\sqrt{\left(\frac{v^2 + l^4 - v}{2} \right)^2 + l^2} = 0 \right], \text{ де } L = [l = 0] \text{ – нормалізоване (із змінною знаку } l$$

під час переходу через L) рівняння лінії, що містить розріз, а $\Theta = [v(x, y) \geq 0]$ – область, що виділяє його з лінії L . Рівняння межі області з розрізом має вигляд: $\omega = \omega_0 \wedge_{\alpha} \omega_1$, і $\Omega = [\omega \geq 0]$.

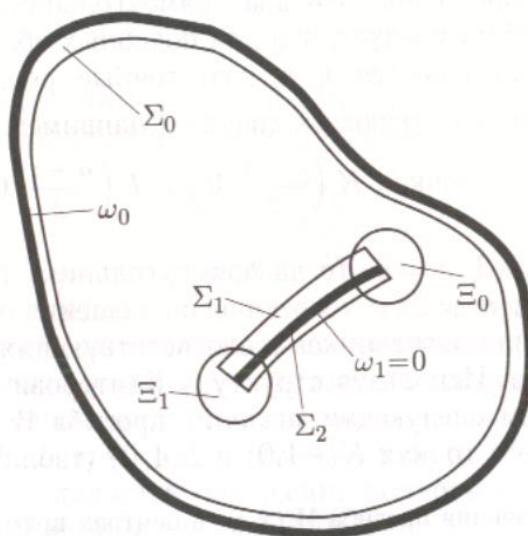


Рисунок 2.1 – Межа області з розрізом

Розглянемо оператор $D_1^{(l)}$, що визначений в області Ω

$$D_1^{(l)} = \frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Як наголошувалося вище, його можна розглядати, як продовження оператора диференціювання за нормаллю \mathbf{n} до L

$$D_1^{(l)} u \Big|_{l=0} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{l=0}.$$

Відмітимо, що при підході до розрізу з різних сторін функція $D_1^{(l)}\omega_1$ приймає на $\omega_1 = 0$ значення

$$D_1^{(l)}\omega_1 \Big|_{\omega_1=0} = \begin{cases} -1, & l = -0, \\ 1, & l = +0. \end{cases}$$

Використовуючи функцію $D_1^{(l)}\omega_1$ побудуємо «функції стрибка» q_1 і q_2 , які при підході до розрізу вздовж нормалі з однієї його сторони прямують до нуля, а при підході з іншої – до 1:

$$q_i = \frac{1}{2}(1 - (-1)^i D_1^{(l)}\omega_1) \Big|_{\omega_1=0} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + (-1)^i), & l = -0, \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)^i), & l = +0. \end{cases}$$

Нехай $\Xi_i = [\delta^2 - (x - x_i)^2 - (y - y_i)^2 \geq 0]$, $i = 1, 2$, – δ -околи кінців розрізу, $\Sigma_i = [\delta_i - q_i \geq 0]$, $i = 1, 2$, – δ_i -околи лівої і правої сторін розрізу відповідно, $\Sigma_0 = [\delta_0 - \omega_0 \geq 0]$ – δ_0 -окіл межі області без розрізу (рис. 2.1).

Теорема 3. Нехай:

- а) $u \in H^2(\Omega)$;
- б) $u = 0$ на $\partial\Omega$;
- в) $\|D_1' \omega_1\|_{H^2(\Xi)} \leq \varepsilon^2$, де $\Xi = \Xi_0 \cup \Xi_1$;
- г) функції ω_0 і ω_1 – нормалізовані.

Тоді структура

$$u = \omega[q_1(x, y)\Phi_1 + q_2(x, y)\Phi_2],$$

де $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ – невизначена компонента є повною в метриці $H^1(\Omega)$.

2.3 Застосування структурного методу (методу R -функцій) до моделювання електростатичних процесів в областях з геометричними сингулярностями

Задача 1. Для розв'язання задачі (1.10), (1.11) скористаємося структурним методом. Відповідно до теореми 3, структура розв'язку має вигляд:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2} + \omega_{12}(q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2), \quad (2.8)$$

де $\omega_{12} = \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2$ – нормалізоване рівняння ділянки межі $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$;

$\varphi = \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$ – функція, що задовольняє крайові умови (1.11);

$$q_1 = \frac{1}{2}(1 + D_1[\omega_2, l]), \quad q_2 = \frac{1}{2}(1 - D_1[\omega_2, l]), \quad l = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2).$$

У задачі (1.10), (1.11) зробимо заміну $u = \varphi + v$, де v – нова невідома функція. Для функції v отримаємо задачу з однорідними крайовими умовами

$$-\Delta v = \Delta \varphi \quad \text{в } \Omega, \quad (2.9)$$

$$v|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad v|_{\partial\Omega_2} = 0. \quad (2.10)$$

У відповідності до (2.8) функція v має вигляд

$$v = \omega_{12}(q_1\Phi_1 + q_2\Phi_2).$$

Невизначені компоненти Φ_1 , Φ_2 апроксимуємо методом Рітца. Для цього Φ_1 , Φ_2 наближено подамо у вигляді

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{(n)} = \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{(m)} = \sum_{k=1}^m d_k \Psi_k.$$

Після підстановки до формули для v отримаємо

$$v = \omega_{12} \left(q_1 \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k + q_2 \sum_{k=1}^m d_k \Psi_k \right).$$

Введемо наступні позначення

$$\vec{a} = (c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

$$\vec{\tau} = (\omega_{12} q_1 \Psi_1, \omega_{12} q_1 \Psi_2, \dots, \omega_{12} q_1 \Psi_n, \omega_{12} q_2 \Psi_1, \omega_{12} q_2 \Psi_2, \dots, \omega_{12} q_2 \Psi_m).$$

Тоді $v = \sum_{i=1}^{n+m} a_i \tau_i$. У відповідності до методу Рітца, задача (2.9), (2.10) є

еквівалентною задачі знаходження у енергетичному просторі H_A мінімуму функціонала енергії $J[v] = \|v\|_{-\Delta}^2 - 2(v, \Delta\phi)$. Для визначення коефіцієнтів a_i , $k = 1, 2, \dots, n + m$, отримуємо СЛАР

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_i [\tau_i, \tau_j] = (-\Delta\phi, \tau_j), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (2.11)$$

де

$$[\tau_i, \tau_j] = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \tau_i}{\partial x} \frac{\partial \tau_j}{\partial x} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y} \frac{\partial \tau_j}{\partial y} \right] dx dy, \quad i, j = \overline{1, n+m},$$

$$(-\Delta\phi, \tau_j) = \iint_{\Omega} \Delta\phi \tau_j dx dy, \quad j = \overline{1, n+m}.$$

Розв'язавши СЛАР (2.11) і знайшовши функцію $v_n(x, y)$, отримаємо

$$u_n(x, y) = \varphi(x, y) + \sum_{i=1}^{n+m} a_i \tau_i(x, y)$$

– наближений за Рітцом розв'язок задачі (1.10), (1.11).

Задача 2. Для розв'язання задачі (1.12) – (1.14) також скористаємося структурним методом. Відповідно до теореми 3, структура розв'язку має вигляд:

$$u = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} + \omega_{12}(q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2), \quad (2.12)$$

де $\omega_{12} = \omega_1 \wedge_{\alpha} \omega_2$ – нормалізоване рівняння ділянки межі $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$;

$\varphi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$ – функція, що задовольняє крайові умови (1.13), (1.14);

$$q_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\partial\omega_3}{\partial x} \right), \quad q_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial\omega_3}{\partial x} \right).$$

У задачі (1.12) – (1.14) зробимо заміну $u = \varphi + v$, де v – нова невідома функція. Для функції v отримаємо задачу з однорідними крайовими умовами

$$-\Delta v = \Delta \varphi \quad \text{у } \Omega, \quad (2.13)$$

$$v|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad v|_{\partial\Omega_2} = -1, \quad (2.14)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_3} = 0. \quad (2.15)$$

Згідно з (2.12) функція v має вигляд

$$v = \omega_{12}(q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2).$$

Невизначені компоненти Φ_1, Φ_2 апроксимуємо методом Рітца. Для цього Φ_1, Φ_2 наближено подамо у вигляді

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{(n)} = \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{(m)} = \sum_{k=1}^m d_k \Psi_k.$$

Після підстановки до формули для v отримаємо

$$v = \omega_{12} \left(q_1 \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k + q_2 \sum_{k=1}^m d_k \Psi_k \right).$$

Введемо наступні позначення

$$\vec{a} = (c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

$$\vec{\tau} = (\omega_{12} q_1 \Psi_1, \omega_{12} q_1 \Psi_2, \dots, \omega_{12} q_1 \Psi_n, \omega_{12} q_2 \Psi_1, \omega_{12} q_2 \Psi_2, \dots, \omega_{12} q_2 \Psi_m).$$

Тоді $v = \sum_{i=1}^{n+m} a_i \tau_i$. У відповідності з методом Рітца, задача (2.13) – (2.15)

еквівалентна до задачі знаходження у енергетичному просторі H_A мінімуму функціонала енергії $J[v] = \|v\|_{-\Delta}^2 - 2(v, \Delta\varphi)$. Для визначення коефіцієнтів a_i , $k = 1, 2, \dots, n + m$, отримуємо СЛАР

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_i [\tau_i, \tau_j] = (-\Delta\varphi, \tau_j), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (2.16)$$

де

$$[\tau_i, \tau_j] = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \tau_i}{\partial x} \frac{\partial \tau_j}{\partial x} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y} \frac{\partial \tau_j}{\partial y} \right] dx dy, \quad i, j = \overline{1, n+m},$$

$$(-\Delta\varphi, \tau_j) = \iint_{\Omega} \Delta\varphi\tau_j dx dy, \quad j = \overline{1, n+m}.$$

Розв'язавши СЛАР (2.16) і знайшовши функцію $v_n(x, y)$, отримаємо

$$u_n(x, y) = \varphi(x, y) + \sum_{i=1}^{n+m} a_i \psi_i(x, y)$$

– наближений за Рітцом розв'язок задачі (1.12) – (1.14).

Висновки за розділом 2

У розділі проведено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі математичного моделювання електростатичних процесів в областях з геометричними сингулярностями.

1. Розглянуто основні поняття структурного методу R -функцій акад. НАН України В.Л. Рвачова та з'ясовано доцільність його застосування для розв'язування задачі розрахунку електростатичного поля у областях з геометричними сингулярностями.

2. Описано сумісне застосування структурного методу R -функцій та методу Рітца до розв'язання задачі математичного моделювання електростатичних процесів в областях з геометричними сингулярностями.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 та її можливості реалізації інженерних розрахунків

Mathematica 13.2 є потужним інструментом в області комп'ютерної алгебри, призначеним для розв'язування складних інженерних завдань. Ця система має широкий спектр функцій, які роблять її затребуваним інструментом у наукових та інженерних галузях [15]. Вона надає широкий спектр можливостей для розв'язання різних завдань, включно з:

- математичні обчислення: система Mathematica дає змогу виконувати складні математичні операції, включно з тригонометричними, алгебраїчними, диференціальними та інтегральними рівняннями;

- графічні можливості: система Mathematica дає змогу створювати різні типи графіків, включно з двовимірними, тривимірними, анімованими та інтерактивними;

- алгоритмічні можливості: система Mathematica надає широкий спектр алгоритмів для розв'язання різноманітних задач, включно з оптимізацією, лінійним програмуванням, чисельним моделюванням і багатьом іншим.

Однією з ключових особливостей Mathematica 13.2 є її здатність автоматизувати і спрощувати обчислення, даючи змогу інженерам зосередитися на сутності завдання, а не на технічних деталях обчислень. Інтерактивне середовище розробки з інтуїтивним інтерфейсом прискорює процес створення і тестування алгоритмів, що особливо важливо при проведенні складних інженерних розрахунків.

Mathematica 13.2 забезпечує широкий спектр математичних функцій, включаючи алгебру, статистику, графіку і чисельні методи. Ця система також підтримує символні обчислення, що робить її незамінним інструментом під час роботи з аналітичними виразами та рівняннями.

Завдяки вбудованим можливостям візуалізації результатів, Mathematica 13.2 дає змогу інженерам представляти дані в наочній формі, покращуючи розуміння процесів і результатів розрахунків. Це особливо важливо в інженерних проектах, де візуалізація даних відіграє ключову роль.

Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 є інтегрованим рішенням для інженерних розрахунків, забезпечуючи високу точність, ефективність і зручність використання. Її можливості роблять її незамінним інструментом для професіоналів, які займаються науковими та інженерними дослідженнями.

Mathematica 13.2 також містить низку нових функцій і поліпшень, які роблять її ще більш ефективною для інженерних розрахунків. Зокрема, у новій версії було додано такі можливості:

- покращена підтримка паралельних обчислень: Mathematica 13.2 може використовувати можливості багатоядерних процесорів для прискорення обчислень;

- нові функції для роботи з великими даними: Mathematica 13.2 надає нові функції для роботи з великими масивами даних, включно з обробкою та аналізом даних, машинним навчанням і багато іншого;

- нові бібліотеки для інженерних розрахунків: Mathematica 13.2 містить нові бібліотеки для інженерних розрахунків, включно з механікою, електротехнікою, теплофізикою та багато іншого.

Отже, Mathematica 13.2 є потужним і універсальним інструментом, який може бути використаний для розв'язування широкого спектра інженерних задач. Вона є гарним вибором для інженерів, які потребують потужного та гнучкого інструменту для виконання складних розрахунків.

Ось кілька прикладів використання Mathematica 13.2 для інженерних розрахунків:

- проектування й аналіз конструкцій: Mathematica може бути використана для проектування й аналізу конструкцій, включно з розрахунками міцності, стійкості та динамічних навантажень;

– моделювання фізичних процесів: Mathematica може бути використана для моделювання фізичних процесів, таких як рух тіл, поширення хвиль і теплопередача;

– розробка нових матеріалів і пристроїв: Mathematica може бути використана для розробки нових матеріалів і пристроїв, включно з розрахунками властивостей матеріалів і моделюванням їхньої поведінки.

Mathematica 13.2 є ефективним інструментом для виконання інженерних розрахунків, який може допомогти інженерам підвищити ефективність роботи і знизити ризик помилок.

Виходячи з цього можна зробити висновок про доцільність використання системи комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2 для програмної реалізації чисельного дослідження електростатичних полів в областях з геометричними сингулярностями.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання електростатичних процесів в областях з геометричними сингулярностями

З урахуванням викладеного у п. 2.3 алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями складається з наступних етапів:

а) задати фізичні параметри процесу та геометрію області Ω , у якій розглядається процес;

б) методом R -функцій побудувати нормалізоване рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області Ω та нормалізовані рівняння ділянок межі;

в) в залежності від вигляду крайових умов задачі обрати структуру розв'язку;

г) задати послідовність координатних функцій;

д) обрати номер наближення n ;

- д) сформувати систему Рітца, обчисливши елементи матриці Рітца і елементи вектора правих частин;
- е) знайти коефіцієнти a_1, \dots, a_{n+m} , розв'язавши систему Рітца;
- є) записати наближений за Рітцем розв'язок задачі;
- ж) провести аналіз та візуалізацію побудованого наближеного розв'язку.

3.3 Опис програми

Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями, розроблений у п. 3.2, програмно було реалізовано у пакеті Mathematica 13.2. Програма складається з наступних блоків.

Блок 1. Задання й аналітичний опис геометрії розрахункової області. У цьому блоці задаємо геометричні параметри області, R -операції системи \mathfrak{R}_0 , будуємо нормалізовані рівняння межі та розрізу.

Блок 2. Задання координатної послідовності. Тут задаємо порядок наближення n та послідовність координатних функцій $\{\tau_k\}$.

Блок 3. Формування та розв'язування системи Рітца. У цьому блоці за обчислюються елементи матриці Рітца і вектора правих частин, а також розв'язується система Рітца для визначення коефіцієнтів a_1, \dots, a_{n+m} .

Блок 4. Виведення результатів. У цьому блоці записуємо наближений за Рітцем розв'язок задачі і за допомогою функцій Plot3D, ContourPlot побудовано поверхню та лінії рівня електростатичний потенціалу.

Висновки за розділом 3

Для розв'язання поставленої задачі математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями було обрано

пакет Mathematica 13.2. Програма, розроблена у цій системі, ураховує специфічні вимоги задачі моделювання процесів електростатики. Для реалізації різних етапів моделювання використано вбудовані функції системи Mathematica, таких як чисельне інтегрування, візуалізація результатів у вигляді 3D моделі та ліній рівня функції потенціалу.

1. Описано особливості і переваги системи комп'ютерної алгебри Mathematica 13.2.

2. Розроблено алгоритм розв'язування задачі математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями.

3. Описано програму, розроблену за побудованим алгоритмом у пакеті Mathematica 13.2.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент розв'язання тестової задачі 1

Для задачі 1 вигляду (1.10), (1.11), що розглядається в прямокутнику з розрізом-напівколом (рис. 1.2) обчислювальний експеримент було проведено для значень $a=b=1$, $R=\frac{1}{2}$. Структура розв'язку цієї крайової задачі має вигляд (2.8). Невизначені компоненти структури апроксимувалися за допомогою поліномів Лежандра.

На рис. 4.1 наведено лінії рівня потенціалу u , а на рис. 4.2 наведено його поверхню.

Як бачимо поведінка потенціалу відповідає як математичній постановці задачі, так і фізичному змісту відповідного процесу, що свідчить про адекватність отриманих результатів.

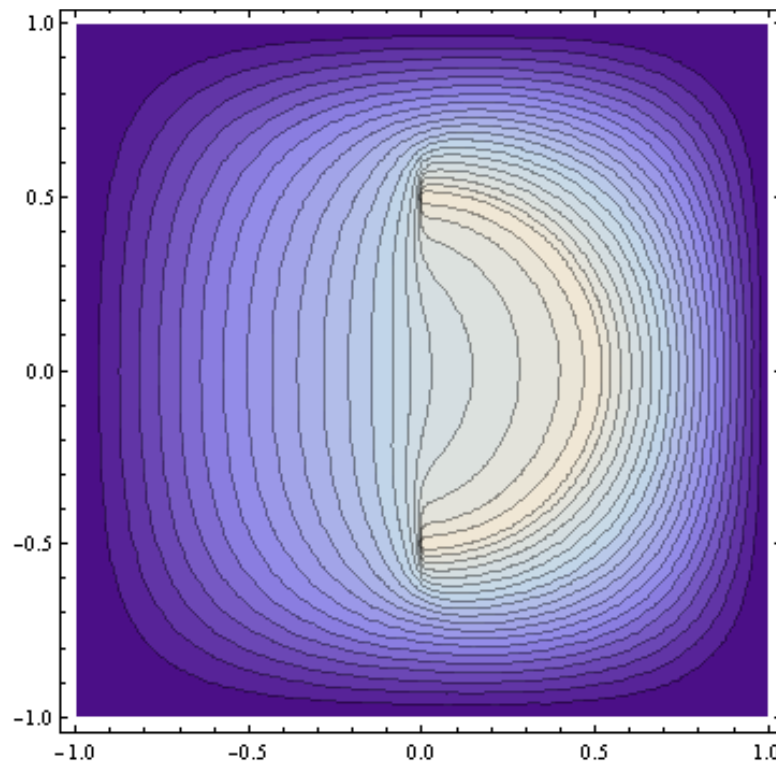


Рисунок 4.1 – Лінії рівня потенціалу u для задачі 1

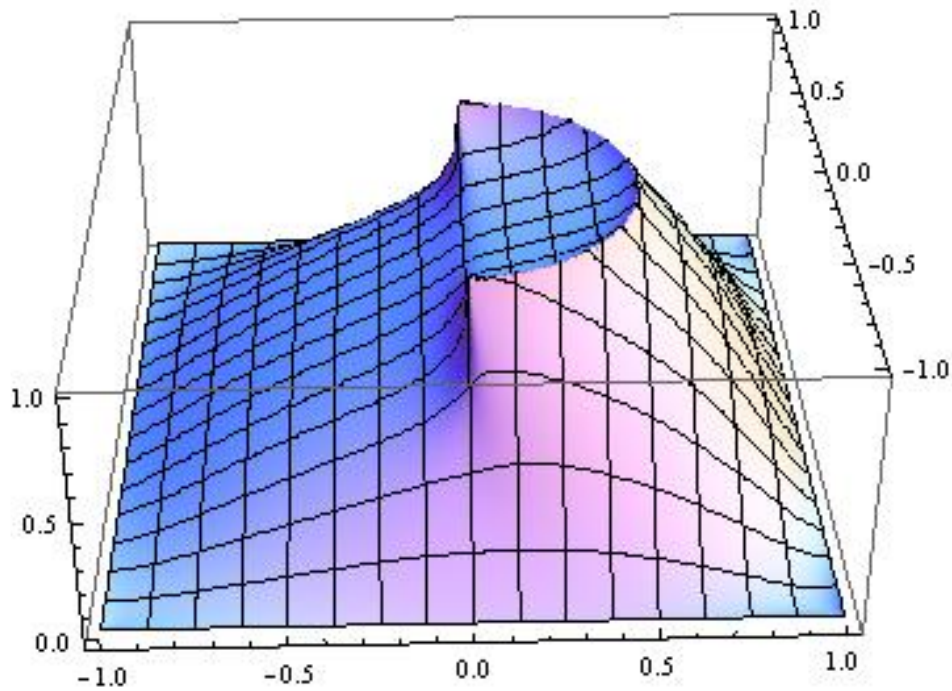


Рисунок 4.2 – Поверхня потенціалу u для задачі 1

4.2 Обчислювальний експеримент розв'язання тестової задачі 2

Для задачі 2 вигляду (1.12) – (1.14), що розглядається в прямокутнику зі вставкою-ізолятором (рис. 1.3) обчислювальний експеримент було проведено для значень $a=2$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$. Структура розв'язку цієї крайової задачі має вигляд (2.12). Невизначені компоненти структури апроксимувалися за допомогою поліномів Лежандра.

На рис. 4.3 наведено лінії рівня потенціалу u , а на рис. 4.4 наведено його поверхню.

Як бачимо у цьому випадку поведінка потенціалу також відповідає як математичній постановці задачі, так і фізичному змісту відповідного процесу, що свідчить про адекватність отриманих результатів.

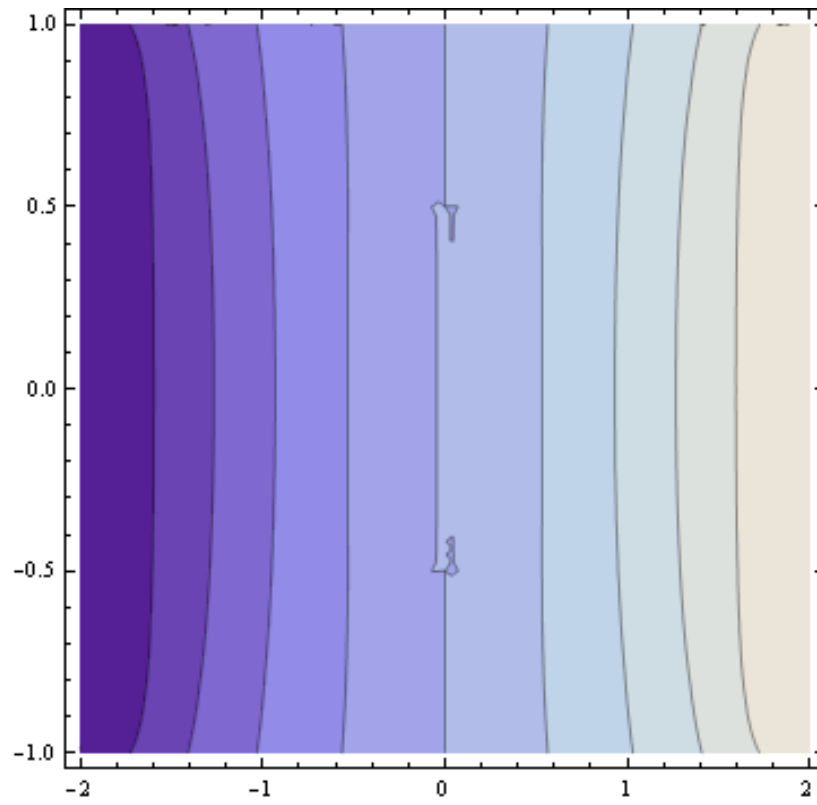


Рисунок 4.3 – Лінії рівня потенціалу u для задачі 2

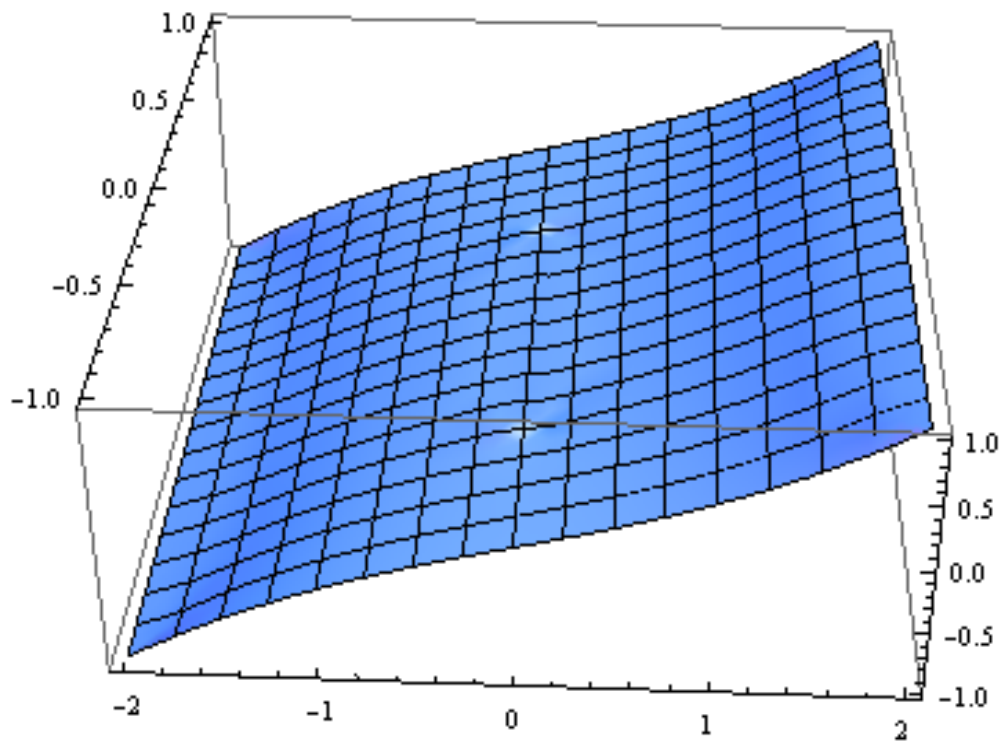


Рисунок 4.4 – Поверхня потенціалу u для задачі 2

Висновки за розділом 4

Виконано обчислювальний експеримент для двох тестових задач знаходження потенціалу електростатичного поля в областях з геометричними сингулярностями. Результати обчислювального експерименту подано у вигляді ліній рівня та поверхонь електростатичного потенціалу. Аналіз результатів показує, що застосування до розв'язування задачі математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями дає адекватні результати, які узгоджуються як з фізичним змістом, так і з математичною постановкою задачі.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було застосовано структурний метод R -функцій акад. НАН України В.Л. Рвачова разом з варіаційним методом Рітца до чисельного аналізу процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями.

1. Було проведено аналіз математичних моделей електростатичних процесів та методів їх чисельного аналізу. Зроблено висновок про перспективність застосування до математичного моделювання процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями саме структурного методу R -функцій.

2. На основі сумісного застосування методів R -функцій та Рітца розроблено алгоритм чисельного аналізу двох математичних моделей, що описують поле потенціалу електростатичного поля в областях з геометричними сингулярностями.

3. Розроблений алгоритм програмно реалізовано у пакеті Mathematica 13.2 і за допомогою розробленої програми проведено обчислювальний експеримент для двох тестових задач, що підтвердило ефективність та адекватність застосування структурного методу.

4. Дослідження процесів електростатики в областях з геометричними сингулярностями можна застосувати, зокрема, при проектуванні мікросхем та різних друкованих плат тощо.

5. Подальші дослідження за даною тематикою можуть бути пов'язані з ускладненням постановок крайових задач та умов, що задаються на геометричних сингулярностях.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. У 2 ч. Ч. 2. Київ : Вища школа, 1995. 432 с.
2. Галін П. К. Чисельний аналіз структурним методом R -функцій електростатичних полів в плоских областях з геометричними сингулярностями. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2023. С. 115–116.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е, испр. Москва ; Ленинград : ГИФМЛ, 1962. 708 с.
4. Максименко-Шейко К. В. R -функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харків : ІПМаш НАН України, 2009. 306 с.
5. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. Львів : Видавництво Національного університету Львівська політехніка, 2008. 366 с.
6. Маценко В. Г. Математичне моделювання. Чернівці : Чернівецький національний університет, 2014. 519 с.
7. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 2006. 424 с.
8. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.
9. Савула Я. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. 224 с.
10. Сугаков В. И. Теоретична фізика. Електродинаміка. Київ : Вища школа, 1974. 272 с.
11. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. Київ : Видавнича група ВНУ, 2006. 480 с.
12. Харрик И. Ю. О приближении функций, обращающихся на границе области в нуль вместе с частными производными, функциями особого вида. *Сибирский математический журнал*. 1963. Т. 4, № 2. С. 408 – 425.

13. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R -function method. *Journal of Engineering Mathematics*. 2015. Vol. 91, № 1. Pp. 59–79.
14. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R -Functions in Boundary Value Problems in Mechanics. *Applied Mechanics Reviews*. Vol. 48, № 4. Pp. 151-188.
15. The Wolfram Mathematica. URL: <http://www.worlfram.com/index.ru.html> (дата звернення: 21.12.2023).
16. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechnics. Oxford : BH, 2000. 459 p.