УДК 621.397 : 62—52

Е. П. ПУТЯТИН, д-р техн. наук, *О. М. АБРАМОВ, С. О. ХОМИЦКИЙ*, канд. техн. наук

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ НОРМАЛИЗАЦИИ КОНЕЧНОГО РАНГА ДЛЯ ЦЕНТРИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Предпринимается попытка предложить систематический подход к построению нормализаторов смещений плоских изображений.

Пусть $B_1(x, y)$ — некоторое распределение яркости объекта слежения, например, визуальная характеристика его проекции на плоскость телевизионного датчика.

Непрерывный оператор F, определенный в окрестности распределения $B_1(x, y)$, является оператором нормализации смещений [1], если:

$$F: B(x, y) \to B(x + \Phi_1(B),\ y + \Phi_2(B)), \qquad (1)$$

где $B[x + \Phi_1(B),\ y + \Phi_2(B)] = B_0(x, y)$ — эталонное изображение, $\Phi_1(B)$, $\Phi_2(B)$ — некоторые вещественные непрерывные, нелинейные функционалы в пространстве изображений B.

В работе [2] показано, чтобы оператор (1) был нормализующим, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\Phi_1(B) - \Phi_1(B_0) = \alpha_1; \qquad (2) \qquad \Phi_2(B) - \Phi_2(B_0) = \alpha_2, \qquad (3)$$

где α_1, α_2 — параметры смещения эталона B_0. Очевидно, не всякий вещественный непрерывный функционал удовлетворяет условиям (2), (3).

Полученные эмпирическим путем в работе [2] функционалы логарифмического центра изображения и оптического центра тяжести удовлетворяют условиям (2), (3), однако являются функционалами частного вида.

В общем виде $\Phi(B)$ могут быть представлены следующим образом:

$$\Phi_1(B) = \Psi_1(t_1, \ldots, t_r); \qquad (4) \qquad \Phi_2(B) = \Psi_2(\tau_1, \ldots, \tau_s), \qquad (5)$$

где Ψ_1, Ψ_2 — вещественные непрерывные функции соответственно r и s переменных, определенные и дифференцируемые в окрестности точек

$$t_i = \iint\limits_D B_o(x, y)\, k_i(x)\, dxdy, \qquad (6) \qquad \tau_j = \iint\limits_D B_o(x, y)\, k_j(y)\, dxdy. \qquad (7)$$

В этом случае оператор нормализации имеет вид:

$$F: B \to B[x + \psi_1(t_1, \ldots, t_r),\ y + \psi_2(\tau_1, \ldots, \tau_s)]. \qquad (8)$$

В данной работе излагается метод, согласно которому для построения оператора F в виде (8) отыскиваются семейства функций $k_1, \ldots, k_r$; $k_1, \ldots, k_s$ для (6), (7) и функций ψ_1, ψ_2 таким образом, чтобы удовлетворялись условия (2), (3) для $\Phi_1(B)$ и $\Phi_2(B)$ из выражений (4), (5).

Определение. *Оператор, представленный в виде* (8), *назовем оператором нормализации смещений конечного ранга.*

Будем считать, что функции $k_1, \ldots, k_r$ и $k_1, \ldots, k_s$ — линейно независимы. В этом случае ранг оператора равен $r + s$.

В дальнейшем, с целью сократить математические выкладки, будем рассматривать только операторы ранга r, считая при этом, что все рассуждения справедливы также для операторов ранга s и $r + s$. Это возможно, поскольку смещения изображений B_0 по осям x и y являются независимыми друг от друга.

Теорема 1. *Если F — оператор нормализации ранга r и $k(x) = \begin{Vmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{Vmatrix}$ — вектор-столбец, существует матрица $\pi(\alpha_1)$ порядка r для которой*

$$k(x+\alpha_1) = \pi(\alpha_1)\, k(x). \tag{9}$$

Доказательство. Если $\Phi(B) = \psi(t_1, \ldots, t_r)$ и $\delta(B(x, y))$ — финитная гладкая функция, то [3]:

$$\Phi(B+\delta) = \Phi(B) + \sum_i \frac{\partial\psi(t_1, \ldots, t_r)}{\partial t_i} \iint_D k_i(x)\,\delta dxdy + 0(\delta). \tag{10}$$

Сумма в правой части (10) дает основной вклад в $\Phi(B+\delta)$ при малых δ и линейна по δ, поэтому ее называют главной линейной частью, дифференциалом Φ. Обозначим эту сумму $\Phi_*(B, \delta)$. Тогда

$$\Phi(B+\delta) = \Phi(B) + \Phi_*(B, \delta) + 0(\delta). \tag{11}$$

Используя равенство (2), перейдем к уравнению в вариациях

$$\Phi[B(x-\alpha_1, y) + \delta(B(x-\alpha_1, y))] = \Phi[B(x, y) + \\ + \delta(B(x, y))] + \alpha_1. \tag{12}$$

Из уравнения (12) следует:

$$\Phi[B(x-\alpha_1, y)] + \Phi_*[B(x-\alpha_1, y), \delta(B(x-\alpha_1, y))] + 0(\delta) = \\ = \Phi[B(x, y)] + \Phi_*[B(x, y), \delta(B(x, y))] + 0(\delta) + \alpha_1,$$

или

$$\Phi_*[B(x-\alpha_1, y), \delta(B(x-\alpha_1, y))] - \Phi_*[B(x, y), \delta(B(x, y))] = 0. \tag{13}$$

Таким образом, первая вариация функционала Φ инвариантна относительно сдвигов. Следовательно, уравнение (13) может быть переписано так:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\psi[t_1(B(x-\alpha_1, y)), \ldots, t_r(B(x-\alpha_1, y))]}{\partial t_i(B(x-\alpha_1, y))} k_i(x+\alpha_1) = \\ = \sum_{i=1} \frac{\partial\psi[t_1(B(x, y)), \ldots, t_r(B(x, y))]}{\partial t_i(B(x, y))} k_i(x). \tag{14}$$

Выберем $B_1, \ldots, B_r$ так, что

$$\det \left| \frac{\partial\psi[t_1(B_i), \ldots, t_r(B_i)]}{\partial t_j(B_i)} \right| \neq 0.$$

Тогда из уравнения (14) сможем найти функции $k_j(x+\alpha_1)$ в виде линейных комбинаций с коэффициентами $\pi_{ij}(\alpha_1)$ функций $k_i(x)$:

$$k_j(x+\alpha_1)=\sum_{i=1}^{r}\pi_{ji}(\alpha_1)\,k_i(x).$$

Таким образом,

$$k(x+\alpha_1)=\pi(\alpha_1)\,k(x), \tag{15}$$

где $\pi(\alpha_1)$ — матрица порядка r. Теорема доказана.

Докажем тождество:

$$\pi\left(\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}\right)=\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right)\pi\left(\alpha_1^{(2)}\right). \tag{16}$$

По теореме 1 имеем

$$k\left(x+\alpha_1^{(1)}\right)=\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right)k(x).$$

Тогда

$$k\left[x+\left(\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}\right)\right]=\pi\left(\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}\right)k(x).$$

С другой стороны:

$$k\left[\left(x+\alpha_1^{(1)}\right)+\alpha_1^{(2)}\right]=\pi\left(\alpha_1^{(2)}\right)k\left(x+\alpha_1^{(1)}\right)=\pi\left(\alpha_1^{(2)}\right)\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right)k(x).$$

Следовательно,

$$\pi\left(\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}\right)=\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right)\pi\left(\alpha_1^{(2)}\right).$$

Тождество доказано.

Следствие теоремы 1. Если $F: B_0(x-\alpha_1,\ y)\to B_0(x,\ y)$ — оператор нормализации конечного ранга, функции $k_1, \ldots k_r$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\frac{dk_1(x)}{dx}&=a_{11}k_1+\ldots+a_{1r}k_r;\\
\frac{dk_2(x)}{dx}&=a_{21}k_1+\ldots+a_{2r}k_r;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dk_r(x)}{dx}&=a_{r1}k_1+\ldots+a_{rr}k_r.
\end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Продифференцируем обе части равенства (16) по $\alpha_1^{(2)}$; в точке $\alpha_1^{(2)}=0$

$$\left.\frac{d\pi\left(\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}\right)}{d\alpha_1^{(2)}}\right|_{\alpha_1^{(2)}=0}=\frac{d\pi\left(\alpha_1^{(2)}\right)}{d\alpha_1^{(2)}}\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right).$$

Матрицу $\left.\frac{d\pi\left(\alpha_1^{(2)}\right)}{d\alpha_1^{(2)}}\right|_{\alpha_1^{(2)}=0}$ обозначим A. Тогда

$$\frac{d\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right)}{d\alpha_1^{(2)}}=A\pi\left(\alpha_1^{(1)}\right).$$

Следовательно,

$$\pi(\alpha_1) = e^{A\alpha_1} \text{ и } k(x+\alpha_1) = e^{A\alpha_1} k(x);$$

в последнем выражении при $x \to 0$ и $\alpha_1 \to x$ получим $k(x) = e^{Ax} k(0)$.

Следовательно,

$$\frac{dk(x)}{dx} = Ak(x). \tag{18}$$

Следствие теоремы 1 доказано.

Получим уравнение для ψ. Согласно условию (2) имеем:

$$\psi[t_1(B(x, y)), \ldots, t_r(B(x, y))] + \alpha_1 = \\ = \psi[t_1(B(x-\alpha_1, y)), \ldots, t_r(B(x-\alpha_1, y))]. \tag{19}$$

Продифференцируем уравнение (19) по α_1. Используя дифференциальные уравнения (17) для k, получим

$$\sum_i \frac{\partial\psi}{\partial t_i} \sum_j a_{ij} \quad t_j = 1, \tag{20}$$

где

$$t_i = \iint_D B(x, y) k_i(x)\, dxdy; \quad t_j = \iint_D B(x, y) k_j(x)\, dxdy;$$

a_{ij} — коэффициенты разложения матрицы A.

В полученной системе уравнений начальные условия для ψ и k определяются выбором соответствующих значений $\Phi(B_0)$. Результаты позволяют сформулировать метод построения операторов нормализации конечного ранга для центрирования изображений, который состоит в следующем. Выбираются две матрицы A_1 и A_2 соответственно порядка r и s. Определяются семейства функций $k_1, \ldots, k_r$; $k_1, \ldots, k_s$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (18). Определяются функции ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (20). Выбором $\Phi_1(B_0)$ и $\Phi_2(B_0)$ из условий (2), (3) задаются начальные условия для ψ и k. После этого оператор нормализации строится по формуле (8).

Пример 1. Построим оператор нормализации для смещений ранга $r+s$. Пусть $r = s = 1$, тогда $A_1 = a_1$; $A_2 = a_2$. Уравнения (17) запишутся следующим образом:

$$\frac{dk(x)}{dx} = a_1 k(x); \quad \frac{dk(y)}{dy} = a_2 k(y).$$

Итак,

$$k(x) = c_1 e^{a_1 x}, \quad k(y) = c_2 e^{a_2 y}.$$

Функции $\psi(t_1, \ldots, t_r)$ и $\psi(\tau_1, \ldots, \tau_s)$ должны удовлетворять уравнениям (20):

$$\frac{d\psi}{dt} a_1 t = 1; \quad \frac{d\psi}{d\tau} a_2 \tau = 1.$$

Следовательно,

$$\psi(t) = \frac{1}{a_1} \ln t + c_3; \quad \psi(\tau) = \frac{1}{a_2} \ln \tau + c_4.$$

Зададим начальные условия: $\Phi_1(B_0) = \Phi_2(B_0) = 0$. Тогда

$$\frac{1}{a_1} \ln c_1 \iint\limits_D B_0(x, y) e^{a_1 x} dxdy + c_3 = 0;$$

$$\frac{1}{a_2} \ln c_2 \iint\limits_D B_0(x, y) e^{a_2 y} dxdy + c_4 = 0.$$

Так как $\Phi(B_0) = 0$, можно считать $c_3 = 0$, $c_4 = 0$. Тогда

$$c_1 = \frac{1}{\iint\limits_D B_0(x, y) e^{a_1 x} dxdy}, \quad c_2 = \frac{1}{\iint\limits_D B_0(x, y) e^{a_2 y} dxdy}.$$

Если $c_1 = c_2 = 1$ и $a = 1$, приходим к известной формуле логарифмического центра, приведенной в работе [2]:

$$F: B \to B\left(x + \ln \iint\limits_D B(x, y) e^x dxdy, \quad y + \ln \iint\limits_D B(x, y) e^y dxdy\right).$$

Пример 2. Пусть $r = 2$, $A = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}$. Выполнив вычисления, аналогичные сделанным в примере 1, легко показать, что в этом случае

$$\Phi(B) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\iint\limits_D B(x, y) \sin ax dxdy}{\iint\limits_D B(x, y) \cos ax dxdy},$$

и оператор имеет вид

$$F: B \to B\left(x + \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{\iint\limits_D B(x, y) \sin ax dxdy}{\iint\limits_D B(x, y) \cos ax dxdy}, \; y\right).$$

Этот оператор ранее известен не был. Приведенными примерами далеко не исчерпываются возможные виды операторов нормализации смещений, которые могут быть получены в результате применения данного метода.

В заключение отметим, что предложенный метод представляет несомненный интерес для разработки новых видов операторов и их всестороннего исследования с целью повысить помехозащищенность, обеспечить простоту технической реализации и инвариантность неосновным преобразованиям изображений.

Список литературы: 1. *Путятин Е. П.* Теоретические предпосылки нормализации изображений.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1973, вып. 10, с. 82—89. 2. К вопросу о моделировании механизмов нормализации зрительных образов /*Е. П. Путятин, И. В. Шульгин, В. П. Юрченко, О. М. Абрамов.*— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1971, вып. 5, с. 102—106. 3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976. 544 с. 4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., Наука, 1976. 352 с.

Поступила 26 марта 1979 г.