УДК 621.373.8

В.М. ВАНЦАН, канд. физ.-мат. наук, *А.Г. ПАЩЕНКО*

К РЕШЕНИЮ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ СКОРОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ИНЖЕКЦИОННЫХ ЛАЗЕРОВ

В ранних работах отечественных и зарубежных ученых для расчета параметров и характеристик полупроводниковых инжекционных лазеров использовались упрощенные математические модели, основанные на применении общих положений теории полупроводников и скоростных балансных уравнений, которые оказались наиболее эффективными при рассмотрении многих явлений, протекающих в лазере.

Чтобы проанализировать работу лазера, необходимо как можно полнее промоделировать динамику его возбуждения. При этом уравнение, описывающее изменение концентрации электронов на некотором энергетическом уровне a со временем может быть записано так [1]:

$$\frac{dn_a}{dt} = R_{\text{нак},a} - \gamma_{\text{спонт},a} - ig_{\text{вынужд}} \langle P \rangle_{ab} E^* + \left(\frac{\partial n_a}{\partial t}\right)_{\text{столк}}, \tag{1}$$

где $R_{нак}$ — скорость накачки, $\gamma_{спонт,a}$ —скорость радиационного распада, $g_{вынужд} < P >_{ab} E^{*}$ - член, обусловленный вынужденными переходами (поглощение и вынужденное испускание). Слагаемое $\left(\partial n_a / \partial t\right)_{столк}$ в правой части уравнения (1) соответствует переходам между уровнями вследствие электронных и других столкновений.

Среднее значение электрической поляризации активной среды полупроводникового лазера может быть получено, как известно, из уравнения для недиагональных элементов матрицы плотности

$$\left(-i\omega_{ab} + \Gamma_{ab} + \frac{d}{dt}\right) < P >_{ab} = -ig_{вын\,ужд} E^{*}\left(n_a - n_b\right) \tag{2}$$

где $< P >_{ab}$ — недиагональные матричные элементы оператора дипольного момента, ω_{ab} — частота перехода между двумя состояниями рабочего вещества лазера, n_a, n_b — концентрации электронов на энергетических уровнях a и b, Γ_{ab} — спектральная ширина уровня.

Временная эволюция электромагнитного поля фотонов описывается уравнением типа:

$$\frac{dE}{dt} - i(\omega + i\chi)E = ig_{вын\,ужд} < P >_{ab} \tag{3}$$

где ω— частота генерируемых колебаний, χ— амплитудный коэффициент затухания поля в резонаторе.

С помощью этих уравнений довольно точно могут быть рассчитаны следующие процессы и величины: плотность фотонов, распространяющихся вдоль положительного и отрицательного направлений оси резонатора; статические характеристики инжекционных лазеров; релаксационные колебания и влияние спонтанного излучения; переходные характеристики лазеров; модуляционные характеристики в приближении слабого сигнала; модуляционные характеристики при высокочастотной модуляции сильным сигналом и при импульсной кодовой модуляции.

Однако существует ряд явлений и параметров инжекционных лазеров, которые трудно описать в приближении скоростных уравнений.

Таковыми являются: условия, определяющие частоту генерации; квантовые шумы (амплитудные и фазовые); ширина линии генерации; длина когерентности; конкуренция мод; гистерезис; бистабильность; синхронизация мод.

Некоторые из них можно изучать и в рамках уравнений (1) - (3), однако явления, связанные с флуктуациями электромагнитного поля на квантовом уровне, можно анализировать только с помощью квантовомеханической теории лазеров, включающей квантование поля.

При построении теории полупроводниковых лазеров, основанной на квантовомеханическом описании процессов, электромагнитное поле, излучаемое квантовым ансамблем, должно быть представлено с помощью операторов рождения b и уничтожения b фотонов.

Записывая в уравнениях (1) - (3) физические величины в квантовом представлении, получим следующую систему операторных уравнений относительно концентрации электронов $n_c k_1$, поляризуемости $a^+_{ck1} a_{vk2}$ и оператора фотонов b^+ [2]:

$$\frac{dn_{ck1}}{dt} = \sum_{k}\left(-ibg^*_{k\,k_2} a^+_{ck_1} a_{vk2}\right) + \text{H.C.} - \gamma_{\text{спонт},k_1} - \\ - R_{\text{након},k_1} + \left(\frac{d}{dt}\right)^{a\,ck1}_{\text{столк}} + F_{ck1,ck2} \tag{4}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma_{k_1k_2} - i\omega_{k_1k_2}\right) a^+_{ck_1} a_{vk_2} = -ib^+ g_{k_1k_2}\left(n_{ck_1} - n_{vk_2}\right) + \\ + F_{ck_1,ck_2} \tag{5}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \chi - i\omega\right) b^+ = \sum_{k_1,k_2} g^*_{k_1k_2} a^+_{ck_1} a_{vk_2} + F^+(t), \tag{6}$$

где n_{ck_1} — оператор концентрации электронов в зоне проводимости; n_{vk2} — оператор концентрации электронов в валентной зоне; $a^+_{ck_1}$ —

оператор рождения электронов в зоне проводимости; a_{ck_1} — оператор уничтожения электронов в валентной зоне; b^+ — оператор рождения фотонов; b —оператор уничтожения фотонов; $\omega_{k_1k_2} = \omega_{ck_1} - \omega_{vk_2}$ — частота перехода между состоянием ck_1 с волновым вектором k_1 в зоне проводимости или ее примесном "хвосте" и состоянием vk_2 с волновым вым вектором k_2 в валентной зоне или примесной зоне, обусловленной акцепторами; ω — частота незаполненного открытого резонатора; χ — амплитудный коэффициент затухания поля в резонаторе; $\gamma_{k_1k_2}$ — коэффициент затухания, который определяется всеми процессами нарушения фазы; $g_{k_1k_2}$ — оптический матричный элемент между состояниями с волновым вектором k_1 в зоне проводимости (с) или ее примесном "хвосте" и состоянием vk_2 с волновым вектором k_2 в валентной зоне (v) или примесной зоне, обусловленной акцепторами; $\left(\frac{dn_{ck_1}}{dt}\right)_{\text{столк}}$ — член, связанный с переходами между уровнями при электрон-электронных и других взаимодействиях, здесь $n_{ck_1} = a^+{}_{ck_1} a_{ck_1}$; Н.С. — эрмитовосопряженный член; F_{ck_1, vk_2} — оператор флуктуаций межзонных переходов; F_{ck_1, ck_2} — оператор флуктуаций концентрации носителей, который связан с накачкой и спонтанным излучением. Он описывает важные процессы электрон-электронного рассеяния и зависит от вероятности перехода между состояниями в зоне проводимости и флуктуационных процессов; $\gamma_{\text{спонт}}, k_1$ — скорость спонтанного излучения в континиум всех световых мод за исключением лазерных.

Квантовомеханические скоростные операторные уравнения (5-6) в результате несложных преобразований приводятся к виду:

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{db^+}{dt}\right)b + b^+\left(\frac{db}{dt}\right) = -2\chi S + E_{cv} + GS + F(t), \qquad (7)$$

$$\frac{dn}{dt} = P_{\text{накач}} - R_{\text{спонт}} - GS - E_{cv} + F_c(t), \qquad (8)$$

где S — концентрация фотонов; n — полная концентрация электронов; $2\chi S$ — величина, обратно пропорциональная времени жизни фотона; E_{cv} — скорость спонтанного излучения в лазерную моду; GS — скорость вынужденного излучения; $P_{\text{накач}}$ — полная скорость накачки; $R_{\text{спонт}}$ — полная скорость спонтанного излучения; $F(t), F_c(t)$ — операторы флуктуаций концентрации фотонов и электронов соответственно.

Для решения скоростных уравнений (7) и (8) целесообразно использовать метод линеаризации, предложенный в работе [3]. Суть метода состоит в том, что концентрации фотонов и электронов представляются в виде сумм их равновесных значений и флуктуаций, т.е.

$$\begin{aligned} S(t) &= \overline{S} + \delta S(t), \\ n(t) &= \overline{n} + \delta n(t). \end{aligned} \qquad (9)$$

Для стационарного состояния уравнения (7), (8) перепишутся в виде

$$-2\chi\overline{S} + \overline{E}_{cv} + \overline{GS} + \overline{F}(t) = 0, \qquad (10)$$

$$\overline{P}_{\text{накач}} - \overline{R}_{\text{спонт}} - \overline{GS} - \overline{E}_{cv} + \overline{F}_c(t) = 0. \qquad (11)$$

Полагая в стационарном состоянии $\overline{F}(t) = 0, \overline{F}_c(t) = 0$, получим

$$\overline{E}_{cv} = \overline{S}(2\chi - G), \qquad (12)$$

$$\overline{P}_{\text{накач}} - \overline{R}_{\text{спонт}} = \overline{GS} + \overline{E}_{cv}. \qquad (13)$$

Подставляя в уравнение (13) значение $\overline{E}_{cv}$ из (12), получим

$$\overline{P}_{\text{накач}} - \overline{R}_{\text{спонт}} = \overline{GS} + \overline{S}(2\chi - \overline{G}). \qquad (14)$$

После несложных преобразований (14) имеем

$$\overline{P}_{\text{накач}} - \overline{R}_{\text{спонт}} = 2\chi N \qquad (15)$$

Решение уравнений (12) и (15) приводит к следующим квадратным уравнениям для определения количества фотонов N и положения квазиуровня Ферми ξ в околопороговой области [4]:

$$\xi^2 + 2\xi\left[(R_1 - P - \chi)kT/(R_2) - \xi_{th}\right] = \\ = -\xi_{th}^2 + (kT/R_2)\left[2\chi(2kT - \Delta) - \xi_{th}(P - R_1)\right], \qquad (16)$$

$$4\chi N^2 + 2N(\chi + R_1 - P) = P - R_1 - (R_2/kT)(\xi_{th} + \Delta - 2kT). \qquad (17)$$

Здесь $\Delta = \hbar\Omega - Eg$, Eg — энергия запрещенной зоны.

Решая квадратные уравнения (16) и (17) относительно ξ и N, получим их зависимости от скорости накачки и температуры в виде

$$\xi_{1,2} = \left[(R_1 - P - \chi)kT/R_2 - \xi_{th}\right] \pm \\ \pm\sqrt{\left[(R_1 - P - \chi)kT/R_2 - \xi_{th}\right]^2 + \xi_{th}^2 - (kT/R_2)\left[2\chi(2kT - \Delta) - \xi_{th}(P - R_1)\right]}, \qquad (18)$$

$$N_{1,2} = \frac{1}{4\chi}\left[-(\chi + R_1 - P) \pm \\ \pm\sqrt{(\chi - R_1 - P)^2 - 4\chi\left(R_1 - P + (R_2/kT)(\xi_{th} + \Delta - 2kT)\right)}\right]. \qquad (19)$$

При рассмотрении процессов, протекающих ниже порога, когда $P < R_1$ и N остается малым, уравнение (17) преобразуется к виду

$$N = \left[R_2/(R_1 - P)\right](\xi_{th} - \Delta + 2kT)/(kT) - 1. \qquad (20)$$

Величина ξ может быть получена прямо из (15), если пренебречь $2\chi N$:

$$\xi = \xi_{th} - \left(\frac{kT}{R_2}\right)(R_1 - P). \qquad (21)$$

Выражения (20) и (21) справедливы в том случае, когда N и ξ вычисляются в области немного ниже порога, так как при значительном удалении в область ниже порога условие $(\xi - \xi_{th})/kT < 1$ не выполняется.

При $0{,}5 < P / R_1 < 0{,}98$ выражения (20) и (21) дают хорошую аппроксимацию протекающих процессов.

В области выше порога при $P / R_1 > 1{,}04$ удовлетворительные результаты расчета числа фотонов можно получить из соотношения

$$N = (P - R_1) / 2\chi. \qquad (22)$$

Из уравнения (16) учитывая, что $\xi - \xi_{th} << kT$, находим

$$\xi = \xi_{th} - \left(\frac{\chi}{P - R_1}\right)(2kT - \Delta). \qquad (23)$$

Наибольший интерес при рассмотрении динамики в полупроводниковых инжекционных лазерах представляют процессы, протекающие в пороговой области и немного выше порога, т.е. момент перехода полупроводникового лазера от режима суперлюминесценции к генерации. При этом все переменные величины, характеризующие работу лазера, достигают порогового значения. Определение этих величин представляет существенный интерес для описания режимов генерации и усиления в лазерном диоде.

Известно, что коэффициент усиления G инжекционного лазера прямо пропорционален плотности тока

$$G = \beta j, \qquad (24)$$

где j — плотность тока инжекции; β — коэффициент пропорциональности, зависящий от температуры.

Коэффициент усиления возбуждаемых мод в открытом резонаторе равен:

$$G_r = \alpha_r + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{r_1 r_2}, \qquad (25)$$

где α_r — внутренние потери в резонаторе; L — длина резонатора; r_1, r_2 — коэффициенты отражения зеркал резонатора.

В действующем диоде основной величиной, управляющей его работой, является инжектируемый ток.

Приравнивая усиление (24), коэффициенту усиления (25), получим выражение для пороговой плотности инжектируемого тока

$$j = \frac{G}{\beta} = \frac{1}{\beta}(\alpha_r + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{r_1 r_2}) \qquad (26)$$

Пренебрегая, как и ранее, спонтанным излучением, можно считать, что

$$j_{пор} = 2\chi/\beta. \qquad (27)$$

Для случая стационарного состояния находим

$$G = (2\chi N - E_{cv})/N = 2\chi - E_{cv}/N. \qquad (28)$$

Согласно [2]:

$$E_{cV} = \left[A\Delta^{1/2} f_c(1-f_v)\right]/N. \qquad (29)$$

Тогда (28) можно записать в виде

$$G = 2\chi - \left[A\Delta^{1/2} f_c(1-f_v)\right]/N. \qquad (30)$$

Таким образом

$$j_{пор} = \frac{1}{\beta}\left(2\chi - \frac{A\Delta^{1/2} f_c(1-fv)}{N}\right). \qquad (31)$$

Здесь

$$A = 2\pi\hbar\rho' |g|^2, \tag{32}$$

где ρ' — плотность состояний; $|g|^2$ — квадрат модуля матричного элемента. Величины ρ' и $|g|^2$ определяются так:

$$\rho' = \left[V\left(2m_r^3\right)^{1/2}\right] \Big/ \pi^2\hbar^3, \tag{33}$$

$$|g|^2 = \frac{\pi e^2}{6V\eta^2 m_c} - \frac{(Eg/\hbar\Omega)(Eg+\sigma)}{Eg + 2\sigma/3}, \tag{34}$$

где V — объем активной области; m_r — уменьшенная масса,

$$m_r^{-1} = m_c^{-1} + m_v^{-1}, \tag{35}$$

η — коэффициент преломления активной области; σ — спин-орбитальное расщепление; Ω — лазерная частота, равная $(\Delta - Eg)/\hbar$; f_c, f_v — квазиуровни Ферми для зон проводимости и валентной соответственно

$$f_c = \left(1 + \exp(\Delta - \xi)\alpha^* / kT\right)^{-1},$$

$$f_v = \left(1 + \exp(\xi - \Delta)\beta^* / kT\right)^{-1},$$

здесь $\alpha^* = m_r / m_c$; $\beta^* = m_r / m_v$.

На основании теоретического анализа пороговой плотности тока, проведенного Лашером и Стерном в работе [5], феноменологический коэффициент

$$\beta = \frac{\pi^2\hbar^3 c^2 \eta_i \Gamma}{n^2(\hbar\omega)^2 \Delta(\hbar\omega) e d\gamma}, \tag{36}$$

где $\hbar\omega$ — энергия кванта; n — коэффициент преломления; $\Delta(\hbar\omega)$ — ширина полосы данного лазера; η_i — внутренний квантовый выход; Г — коэффициент оптического ограничения, определяемый молярной долей легирующего материала; d — толщина активного слоя; γ — коэффициент пропорциональности, учитывающий влияние температуры на степень вырождения носителей тока; e — заряд электрона; c — скорость света.

Были разработаны алгоритмы и программы для расчета зависимости количества фотонов N и положения квазиуровня Ферми ξ от скорости накачки и температуры. Этот расчет является базовым для последующих численных оценок коэффициента усиления G, порогового тока, выходной мощности, спектральных и шумовых характеристик и т. д.

Было установлено, что для чистого слаболегированного GaAs полученные зависимости достаточно хорошо совпадают с результатами теоретических и экспериментальных исследований, приведенными в[1,2] и других работах.

Список литературы: 1. *Физика* **полупроводниковых лазеров**: Пер. с япон. / Под ред. Х.Такумы. М.: Мир, 1989. 310 с. 2. *Haug H.*, Phys. Rev., 184, 338, 1969. 3. *Lax M., IEEE J.* Quantum Electron., QE-3, 37, 1967. 4. *Ванцан В.М., Пащенко А.Г.* **Разработка математических моделей для расчета и проектирования инжекционных лазеров. Часть I. Расчет коэффициента усиления и порогового тока.** Деп. в ГНТБ Украины, №15-Ук 96. 5. *Lasher G., Stern F.,* Phys. Rev., 133, 533, 1964.

Поступила в редколлегию 23.12.94