ДК 510.62

П. П. ТАРАСОВ, С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Сле-ующая теорема свидетельствует о том, что при $n<m$ дальнейшее меньшение числа указанных выше характеристических свойств инейного предиката невозможно.

Теорема 1. *При $n<m$ системы характеристических свойств ли-ейного предиката E, фигурирующие в теоремах 2 и 3 работы* [1], *есократимы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточ-о установить независимость каждого свойства от совокупности ос-альных свойств этих двух систем. Независимость доказываем пу-эм введения на декартовом квадрате какого-нибудь m-мерного екторного пространства M над некоторым полем G такого преди-ата E, для которого данное свойство не выполняется, а остальные — выполняются. В роли векторного пространства M используем арифметическое пространство R^m. Любой вектор x в R^m имеет вид набора $x=(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$, составленного из m вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$, принимаемых в качестве координат вектора. Обратно, любой набор, составленный из m вещественных чисел, является вектором арифметического пространства R^m. Коэффициентами служат произвольные вещественные числа. В роли поля используется множество R^1. В арифметическом пространстве в роли операций сложения и умножения коэффициентов используются сложение и умножение вещественных чисел. В R^m произведение векторов обладает всеми свойствами произведения векторов. Арифметическое пространство R^m является разновидностью m-мерного векторного пространства M над полем G, для него выполняются все аксиомы векторного пространства. Будем считать, что в R^m введен базис $(p_1, p_2, ..., p_m)$, где $p_1=(1, 0, 0, ..., 0, 0)$, $p_2=(0, 1, 0, ..., 0, 0)$, ..., $p_m=(0, 0, 0, ..., 0, 1)$. Оставшаяся часть доказательства теоремы состоит из пяти частей.

1. Докажем, что из рефлексивности, симметричности, транзитивности, аддитивности и однородности не следует n-мерность предиката E. Выберем предикат E следующим образом: $E(x, y)=D(x, y)$. Здесь D — предикат равенства, заданный на $R^m \times R^m$. Рефлексивность, симметричность транзитивность, аддитивность и однородность предиката E очевидны. Однако n-мерностью предикат E не обладает. Для того чтобы убедиться в этом, выберем произвольным образом вектор $l_1, l_2, ..., l_n \in R^m$ и образуем их линейную оболочку L. Возьмем какой-нибудь вектор $x \in R^m$ вне L. Поскольку $n<m$, такой вектор всегда существует. Для любого вектора y, принадлежащего L, имеем $y \neq x$, следовательно $E(x, y)=D(x, y)=0$. Вместе с тем вектор y, как принадлежащий линейной оболочке L, выражается через $l_1, l_2, ..., l_n$ при подходящем наборе коэффициентов $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$. Иными словами:

$$Y=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i.$$

Таким образом,

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i\right)=0.$$

Следовательно, не существует такого набора векторов $(l_1, l_2, ..., l_n)$, при котором равенство

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i\right)=1$$

выполнялось для каждого $x \in R^m$ хотя бы при каком-нибудь наборе коэффициентов $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. А это как раз и означает, что предикат E не n-мерен.

2. Докажем, что из рефлексивности симметричности, транзи-
ности, однородности и n-мерности не следует аддитивность пре-
ката E. Выберем предикат E следующим образом:

$$(x, y) = D\left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\right), \left(F_1(y), F_2(y), \ldots, F_n(y)\right). \quad (1)$$

есь $F_i : R^m \to R^1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — это функции, определенные сле-
ющим образом:

$$F_i(x) = \begin{cases} \xi_i, & \xi_{n+1} = 0 \\ 2\xi_i, & \xi_{n+1} \neq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

мволом D обозначен предикат равенства, заданный на $R^n \times R^n$.
евидно, предикат E рефлексивен, симметричен и транзитивен.
также однороден. Действительно, пусть α выбрано произволь-
. Если вектор x выбран так, что его координата $\xi_{n+1}=0$, то со-
асно (2) $F_i(\alpha x) = \alpha\xi_i = \alpha F_i(x)$. Если же x выбран так, что для
го $\xi_{n+1} \neq 0$, то $F_i(\alpha x) = 2\alpha\xi_i = \alpha \cdot 2 \cdot \xi_i = \alpha F_i(x)$. Следовательно,
нкции $F_i(x)$ однородны. Из только что полученного результата
определения (1) предиката E выведем, что для любых x, y и α
условия $E(x, y) = 1$ следует $E(\alpha x, \alpha y) = 1$.

Докажем n-мерность предиката E. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) p_k = F_1(x) p_1 + F_2(x) p_2 + \ldots + F_n(x) p_n + 0 \cdot p_{n+1} + \\ + \ldots + 0 + p_m.$$

писанный вектор представим в виде набора его координат

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) p_k = \left(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), 0, \ldots, 0\right).$$

этого вектора $n+1$-я координата равна нулю. Таким образом,
гласно (2), находим

$$F_i\left(\sum_{k=1}^{n} F_k(x) p_k\right) = F_i(x)$$

ля любого $i = 1, 2, \ldots, n$. С помощью определения (1) предиката E
з только что полученной системы равенств выведем

$$E\left(x, \sum_{k=1}^{n} F_k(x) p_k\right) = 1. \qquad (3)$$

оэффициенты $F_k(x)$ при векторах p_k в (3) однозначно определя-
тся выбором вектора x. Следовательно, существует набор векто-
ов $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ такой, что равенство (3) выполняется для каж-
ого x при единственном наборе коэффициентов $(F_1(x), F_2(x), \ldots,$
$_n(x))$. Вместе с тем предикат E не аддитивен. Действительно,
усть $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$, причем $\xi_i \neq$
$\neq 0 (i \in \{1, 2, \ldots, n\})$, $\xi_{n+1} = 0$, $\eta_{n+1} \neq 0$. Тогда согласно (2) $F_i(x+y) =$
$= 2(\xi_i + \eta_i)$, $F_i(x) + F_i(y) = \xi_i + 2\eta_i$. Следовательно, для так
ыбранных x и y $F_i(x+y) \neq F_i(x) + F_i(y)$.

3. Докажем, что из рефлексивности, симметричности, транзити ности, аддитивности и n-мерности не следует однородность пред ката E. Выберем предикат E следующим образом:

$$E(x, y) = D\,(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)), (F_1(y), F_2(y), \dots, F_n(y))$$

Здесь функции $F_i\ (i=1, 2, \dots, n)$ для любого $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ пр нимают значения

$$F_i(x) = \xi_i + f(\xi_{n+1}). \qquad ($$

В роли функции f используем какую-нибудь аддитивную, но н однородную вещественную функцию вещественного аргумента.

Для вектора

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\, p_k$$

коэффициент $F_i(x)$ играет роль i-й его координаты, а $n+1$-я коо дината этого вектора равна нулю. Следовательно, согласно (имеем

$$F_i\left(\sum_{k=1}^{n} F_k(x)\, p_k\right) = F_i(x) + f(0).$$

Для любой аддитивной функции $f(0)=0$, поэтому

$$F_i\left(\sum_{k=1}^{n} F_k(x) p_k\right) = F_i(x).$$

По определению (4) предиката E последняя система равенс означает, что

$$E\left(x, \sum_{k=1}^{n} F_k(x) p_k\right) = 1.$$

Отсюда непосредственно следует, что предикат E n-мерен, кром того, рефлексивен, симметричен и транзитивен. Координаты $\xi_i(x$ $(i=1, 2, \dots, n)$ вектора x являются аддитивными функциями арг мента x. Поэтому функции $F_k(x)$ $(k=1, 2, \dots, n)$, согласно опре делению (5), аддитивны. Вместе с ними аддитивен и предикат E определяемый равенством (4). Однако в силу неоднородност функции f неоднородны также и функции $F_k(x)$. Следовательно неоднороден и предикат E.

4. Докажем, что из транзитивности, аддитивности, однородно сти и n-мерности предиката E не вытекает его симметричност Выберем предикат E следующим образом:

$$E(x, y) = D\,((\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0), (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \eta_{n+1})). \qquad (6$$

Возьмем x и y такие, что $\xi_i=\eta_i\ (i=1, 2, \dots, n)$, $\xi_{n+1}\neq 0$, $\eta_{n+1}=0$ Тогда $E(x, y)=1$, тем не менее $E(y, x)=0$. Отсюда следует, что предикат E несимметричен. Вместе с тем предикат E транзитивен Действительно, пусть $E(x, y)=E(y, z)=1$. Тогда $\xi_i=\eta_i=\zeta_i\ (i= =1, 2, \dots, n)$, $\eta_{n+1}=\zeta_{n+1}=0$. Следовательно, $E(x, z)=1$. Преди кат E аддитивен. Действительно, пусть x, x', y, y' таковы, что

$x, y) = E(x', y') = 1$. Тогда $\xi_i = \eta_i$, $\xi'_i = \eta'_i$, $\xi_i + \xi'_i = \eta_i + \eta'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\eta_{n+1} = \eta_{n+1} = 0$, $\eta_{n+1} + \eta'_{n+1} = 0$. Следовательно, $E(x + x', y + y') = 1$.

Для доказательства однородности предиката E произвольно выберем x и y так, чтобы $E(x, y) = 1$. Тогда $\xi_i = \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\eta_{n+1} = 0$. При любом α имеем $\alpha\xi_i = \alpha\eta_i$, $\alpha\eta_{n+1} = 0$. Отсюда вытекает, что $E(\alpha x, \alpha y) = 1$. Докажем, что предикат E n-мерен. Для любого x принимаем $F_i(x) = \xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, p_i = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, \ldots . 0).$$

Следовательно, согласно (6), имеем

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, p_i\right) = 1,$$

причем при любом другом наборе коэффициентов, стоящих при p_i, последнее равенство не выполняется.

5. Докажем, что из симметричности, аддитивности, однородности и n-мерности не следует транзитивность предиката E. Выберем предикат E следующим образом:

$$E(x, y) = D((\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)(-\eta_1, -\eta_2, \ldots, -\eta_n)). \tag{7}$$

Очевидно, что этот предикат симметричен, аддитивен и однороден. Он также n-мерен. Действительно, примем для любого $xF_i(x) = -\xi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n} F_i(x) p_i\right) = 1,$$

причем ни при каком другом наборе коэффициентов при векторах p_i это равенство не выполняется. Вместе с тем предикат E не транзитивен. В самом деле, пусть x, y, z таковы, что $E(x, y) = E(y, z) = 1$, причем $x \neq 0$. Тогда $\xi_i = -\eta_i, \eta_i = -\xi_i$, $\xi_i = \zeta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Согласно определению (7) предиката E имеем $E(x, z) = 0$.

На этом доказательство теоремы 1 заканчивается. Из только что доказанных пяти утверждений непосредственно вытекает, что из свойств рефлексивности, симметричности, транзитивности однородности и n-мерности другие несократимые системы характеристических свойств линейного предиката, кроме тех, которые указаны в теоремах 2 и 3, образовать невозможно.

Остался нерассмотренным вопрос о несократимых системах характеристических свойств линейного предиката в случае, когда $n = m$. На него дают ответ теоремы $2 \div 4$.

Теорема 2. *Для того, чтобы при $n = m$ предикат E был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами рефлексивности и n-мерности.*

Доказательство. При $n=m$ любые векторы x и y выра-жаются через линейно независимые векторы $l_1, l_2, \dots, l_n$:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i\,, \quad y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i l_i\,.$$

Предположим, что $E(x, y)=1$. Тогда

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\beta_i l_i\right)=1.$$

В силу рефлексивности предиката E для любого x имеем $E(x, x)==1$, иначе говоря

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i\right)=1.$$

Согласно свойству n-мерности $\alpha_i=\beta_i$ при любом $i=1, 2, \dots, n$. Это означает, что $x=y$. Очевидно также, что из $x=y$ вытекает $E(x, y)==1$. Следовательно, E — это предикат равенства: $E(x, y)=D(x, y)$. Он обладает свойствами симметричности, транзитивности, аддитивности и однородности. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы при $n=m$ предикат E был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами симметричности, транзитивности и n-мерности.*

Доказательство. Согласно доказанному в теореме 2, рефлексивность вытекает из симметричности, транзитивности и n-мерности предиката E. По теореме 2 устанавливаем линейность предиката E. Теорема доказана.

Теорема 4. *При $n=m$ системы характеристических свойств линейного предиката E, фигурирующие в теоремах 2, 3, несократимы.*

Доказательство. Будем, как и в теореме 1, в роли векторного пространства M использовать арифметическое пространство $R^m (m\geqslant 1)$. Покажем, что рефлексивность предиката E не следует из его n-мерности. Пусть $E(x, y)=D(x, y)$. Очевидно, что этот предикат n-мерен, но не рефлексивен. Покажем, далее, что n-мерность предиката E не следует из его рефлективности. В роли предиката E принимаем предикат $E(x, y)$, равный единице при любых x и y. Предикат E в этом случае, очевидно, рефлективен. Однако он не n-мерен, поскольку при любом наборе векторов $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ существует бесконечно много вещественных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ таких, что

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i\right)=1.$$

Докажем, что симметричность предиката E не следует из его транзитивности и n-мерности. Положим

$$E(x, y)=\begin{cases}1, & \text{если } y=0\\ 0, & \text{если } y\neq 0.\end{cases}$$

Предикат E транзитивен, если $E(x, y)=E(y, z)=1$, т. е. $z=0$, следовательно $E(x, z)=1$. Он также n-мерен. Действительно, при любом x $E(x, y)=1$ только при $y\neq 0$. Вместе с тем вектор 0 выражается в любом базисе $(l_1, l_2, ..., l_n)$ по формуле

$$0=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i l_i$$

с помощью единственно возможного набора коэффициентов $\alpha_i=0$ $(i=1, 2, ..., n)$. Следовательно, равенство

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\, l_i\right)=1,$$

для любого x выполняется при единственном наборе коэффициентов $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x))$. Однако предикат E несимметричен, поскольку при $a\neq 0$ $E(a, 0)=1$, но $E(0, a)=0$. Докажем, что транзитивность предиката E не следует из его симметричности и n-мерности. Положим $E(x, y)=D(x, -y)$. Очевидно, что такой предикат симметричен, n-мерен, но не транзитивен. Наконец, установим, что n-мерность предиката E не следует из его симметричности и транзитивности. Положим $E(x, y)=1$. Этот предикат симметричен и транзитивен, но не n-мерен, так как существует бесконечно много наборов $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_n(x))$ таких, что

$$E\left(x, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\, l_i\right)=1,$$

где $(l_1, l_2, ..., l_n)$ — какой-нибудь базис. Теорема доказана.

Можно ли утверждать, что системы характеристических свойств линейного предиката теперь упрощены до предела? Нет, поскольку не были использованы возможности упрощения каждого из свойств, входящих в эти системы. О том, что такие возможности имеются, свидетельствует следующая ниже теорема 3.8. Пусть E — предикат, заданный на $M\times M$, где M — какое-нибудь векторное пространство над некоторым полем G с базисом $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Предикат E назовем примитивно рефлексивным, если для любого $k=1, 2, ..., m$ справедливо равенство $E(p_k, p_k)=1$. Предикат E назовем примитивно n-мерным, если существует набор векторов $(l_1, l_2, ..., l_n)$ такой, что равенства

$$E\left(p_k, \sum_{i=1}^{n} H_i(p_k)\, l_i\right)=1 \tag{8}$$

выполняются для каждого $k=1, 2, ..., m$ при единственном наборе коэффициентов $(H_1(p_k), H_2(p_k), ..., H_n(p_k))$. Здесь $H_1, H_2, ..., H_n$ — это некоторые функции, заданные на множестве $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ со значениями в множестве G.

Теорема 5. *Для того чтобы предикат E был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами примитивной* *рефлективности, аддитивности, однородности и примитивной n-мерности.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно из свойств, перечисленных в теореме, вывести рефлексивность и n-мерность предиката E, а затем сослаться на теорему 3 [1]. Выведем рефлексивность. Возьмем произвольный вектор x и выразим его в виде

$$x = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_m p_m.$$

Здесь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ — координаты вектора x. Из ограниченной рефлексивности и аддитивности предиката E выводим

$$E(\xi_1 p_1, \xi_1 p_1) = E(\xi_2 p_2, \xi_2 p_2) = \ldots = E(\xi_m p_m, \xi_m p_m) = 1.$$

Применяя $m-1$ раз к полученным равенствам свойство аддитивности предиката E, получаем

$$E(\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_m p_m, \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_m p_m) = 1,$$

т. е. $E(x, x) = 1$.

Выведем n-мерность. Рассмотрим уравнение

$$E\left(0, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i l_i\right) = 1 \tag{9}$$

относительно неизвестного набора коэффициентов $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ Здесь $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — фиксированный набор векторов, фигурирующий в условии примитивной n-мерности предиката E. Докажем что уравнению (9) удовлетворяет единственный набор коэффициентов $(0, 0, \ldots, 0)$. Действительно, пользуясь свойством аддитивности предиката E, из (8) и (9) выводим

$$E\left(p_k, \sum_{i=1}^{n} (H_i(p_k) + \gamma_i) l_i\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Сравнивая полученные равенства с равенствами (8), с учетом единственности коэффициентов при векторах l_i получаем по условию примитивной n-мерности: $H_i(p_k) = H_i(p_k) + \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда следует $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$.

Пусть x — произвольный вектор с координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ Обозначим

$$F_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k H_i(p_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и докажем, что при таком выборе функций $F_1, F_2, \ldots, F_n$ имеет место равенство (26) [2]. Действительно, из однородности и ограниченной n-мерности предиката E выведем

$$E\left(\xi_k p_k, \sum_{i=1}^{n} \xi_k H_i(p_k) l_i\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Применение свойства аддитивности предиката $\tilde{E}$ к только что полученной системе равенств дает

$$E\left(\sum_{k=1}^{m}\xi_k p_k,\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\xi_k H_i(p_k)\,l_i\right)=1,$$

$$E\left(x,\sum_{i=1}^{m}l_i\sum_{k=1}^{m}\xi_k\,H_i(p_k)\right)=1.$$

Подставляя $F_i(x)$ по (10) в последнее равенство, приходим к равенству (26) [2]. Это означает, что набор коэффициентов $(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$, фигурирующий в законе n-мерности, существует.

Осталось доказать единственность этого набора. Предположим, что имеются два набора $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, для которых выполняются равенства

$$E\left(x,\sum_{i=1}^{n}\mu_i l_i\right)=1,\quad E\left(x,\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i l_i\right)=1.$$

Из предпоследнего равенства с помощью свойства однородности предиката E выведем

$$E\left(-x,\sum_{i=1}^{n}(-\mu_i l_i)\right)=1.$$

Применим к двум последним равенствам свойство аддитивности предиката E:

$$E\left(0,\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\mu_i)\,l_1\right)=1.$$

По доказанному ранее имеем $\varepsilon_i-\mu_i=0$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует равенство наборов $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. Итак, набор коэффициентов $(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$, фигурирующий в равенстве (26) работы [2], существует и единственен, т. е. свойство n-мерности предиката E выполняется. Теорема доказана.

Поступила в редколлегию 30.12.88

Список литературы: 1. *Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнаренко С. Ю.* Об условиях существования субъективной метрики//Пробл. бионики. 1989. Вып. 42. С. 3—9. 2. *Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнаренко С. Ю.* О линейных предикатах//Пробл. бионики. 1989. Вып. 43. С. 3—7.

Поступила в редколлегию 08.08.88