ОПТИМИЗАЦИЯ ОДНОЙ СТРУКТУРЫ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ ПРИ ДВУХ ТИПАХ ОТКАЗОВ

В. А. Добрыдень

Для большинства работ, посвященных оптимальному резервированию, характерны два существенных упрощения: подмена основного для широкого класса систем критерия оптимальности уровня надежности — экономической эффективности ее повышения — частными, более простыми, но менее важными критериями, а также игнорирование возможности различных типов отказов элементов, что приводит к решениям, зачастую далеким от оптимальных.

Настоящая работа содержит аналогичное проведенному в [1] исследование существенно отличной структуры резервирования, результаты которого используются для оптимизации надежности элементов по критерию минимума затрат [2].

Задачи

Рассматривается система, содержащая элемент, подверженный независимым и несовместным отказам двух типов, например, типа обрыв и замыкание. Вероятности отказа первого и второго типов q_1 и q_2 и их условные вероятности (при условии, что отказ наступил) Q_1 и Q_2 удовлетворяют естественным условиям

$$q_1 + q_2 = q_0 \leqslant 1, \quad Q_1 + Q_2 = 1.$$

Здесь q_0 — вероятность отказа любого типа. Отказ элемента приводит к экономическим потерям c_0, причем стоимости отказов различных типов c_1 и c_2 могут быть различны. Известны стоимость элемента s и стоимость его обслуживания в единицу времени s_a (при условии отсутствия отказов, т. е. стоимость ремонта включена в c_0). Через каждый промежуток времени $\tau = T/k$ (здесь T — срок службы системы, k — целое положительное число) элемент приводится в исходное состояние, причем в течение τ возможен только один отказ. Надежность элемента можно повысить, заменяя его последовательным соединением n подсистем, содержащих каждая по m параллельно включенных исходных элементов, отказы которых статистически независимы. Требуется найти значения m и n, минимизирующие затраты, обусловленные наличием в системе рассматриваемого элемента.

Решение

Экономика системы. Поскольку все отрезки времени экономически эквивалентны, достаточно проанализировать характеристики одного такого отрезка. В случае равенства стоимостей отказов различных типов средние потери от отказов за время T составят

$$C = kc_0(1 - P_{op}(\tau)) \tag{1}$$

(здесь $P_{op}(\tau)$ — вероятность безотказной работы резервированного элемента в течение τ), а средние затраты на элемент S за то же время

$$S = mn[s(1 + k(1 - P_{op}(\tau)) + s_a T].$$

Задача сводится к отысканию значений m и n, минимизирующих функцию

$$W = C + S. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что при фиксированном m минимум (1) достигается выбором максимизирующего вероятность $P_{op}(\tau)$ значения $n = n_m$. Второе слагаемое (2) приблизительно линейно зависит от n и дает легко определимую поправку к значению n_m найденному из условия минимизации C, таким образом задача заключается прежде всего в анализе функции $P_{op}(m, n)$ и отыскании n_m.

Максимизация $P_{op}(m, n)$. Согласно принятым условиям, отказ структуры резервирования наступает по первому типу в случае, если хотя бы в одной из n, последовательно соединенных подсистем

все m элементов откажут по первому типу, вероятность чего определится формулой

$$q_{1p} = 1 - (1 - q_1^m)^n.$$

Вероятность отказа структуры по второму типу определяется как вероятность отказа по этому типу хотя бы одного элемента в каждой из n подсистем:

$$q_{2p} = (1 - p_2^m)^n,$$

где $p_2 = 1 - q_2$ — вероятность отсутствия отказа второго типа. Вероятность безотказной работы структуры выразится формулой

$$P_{op} = (1 - q_1^m)^n - (1 - p_2^m)^n, \tag{3}$$

причем, как видно из (1) и (3),

$$0 < q_1 < p_2 < 1. \tag{4}$$

Покажем, что при должном выборе значений m и n можно получить величину P_{op}, сколь угодно близкую к единице. Обозначим

$$a = \frac{\ln q_1 - \ln p_2}{\ln q_1 + \ln p_2}, \quad N = q_1^{-1/(1+a)}.$$

Примем в качестве n_m целую часть N, т. е. $n_m = \text{entier}\,(N)$, тогда (3) запишется в виде

$$P_{op} = (1 - N^{-(1+a)})^{n_m} - (1 - N^{-(1-a)})^{n_m},$$

откуда, вводя обозначение $N^{1+a} = x$, получаем

$$\lim_{m \to \infty} P_{op} = \lim_{x \to \infty} \exp(-x^{-a/(1+a)}) = 1,$$

т. е. максимизация P_{op} имеет смысл лишь при фиксированном значении одного из параметров — m или n.

Теорема 1. При фиксированных m, q_1 и q_2 P_{op} достигает экстремума при

$$n_m = \text{entier}\,(n_0 + 1), \tag{5}$$

где

$$n_0 = \frac{m(\ln p_2 - \ln q_1)}{\ln(1 - q_1^m) - \ln(1 - p_2^m)}, \tag{6}$$

причем, если n_0 — целое число, то и n_0 и $n_0 + 1$ максимизируют P_{op}.

Для доказательства найдем приращение вероятности P_{op}, обусловленное увеличением n на единицу. Согласно (3) имеем:

$$\Delta P_{op} = (1 - q_1^m)^n q_1^m - (1 - p_2^m)^n p_2^m.$$

Рассматривая n как непрерывную переменную и определяя ее значение, при котором $\Delta P_{op} = 0$, получаем формулу (6). Существенно, что для $n < n_0$ оказывается $\Delta P_{op} > 0$, а при $n > n_0$ имеем $\Delta P_{op} < 0$, поскольку, ввиду (4), можно утверждать, что $1 - q_1^m > 1 - p_2^m$.

При таком определении n_0 переход к оптимальному целочисленному значению n_m совершается согласно (5).

Теорема 2. Отношение n_0/m является строго возрастающей функцией m.

Запишем (6) в виде

$$\frac{n_0}{m} = \frac{b}{\ln[(1 - q_1^m)/(1 - p_2^m)]}, \tag{7}$$

где

$$b = \ln p_2 - \ln q_1 = \text{const} > 0. \qquad (8)$$

Рассматривая числитель и знаменатель аргумента логарифма (7) как суммы геометрических прогрессий, деленные на соответствующие константы, можем записать

$$a_m = \frac{(1 + q_1 + q_1^2 + \ldots + q_1^{m-1})(1 - q_1)}{(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{m-1})(1 - p_2)}.$$

Убывание a_m с увеличением m следует из рассмотрения знака разности

$$\operatorname{sign}(a_m - a_{m+1}) = \operatorname{sign}\left(p_2^m \sum_0^{m-1} q_1^l - q_1^m \sum_0^{m-1} p_2^l\right) = 1.$$

Из (7) и (8) видно, что при $m \gg 1$ справедливо утверждение

$$\frac{n_0}{m} \approx \frac{1}{p_2^m} \ln(p_2/q_1),$$

т. е. при $m \to \infty$ отношение n_0/m экспоненциально стремится к бесконечности.

Теорема 3.

$$\left.\begin{aligned} n_0 &< 1, \text{ если } p_2^m + q_1^m > 1, \\ n_0 &= 1, \text{ если } p_2^m + q_1^m = 1, \\ n_0 &> 1, \text{ если } p_2^m + q_1^m < 1. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Из (6) следует, что $n_0 < 1$, если

$$\ln(p_2^m/q_1^m) < \ln[(1 - q_1^m)/(1 - p_2^m)],$$

откуда после преобразований получаем $p_2^m + q_1^m > 1$.

Аналогично доказываются остальные два неравенства (9).

Теорема 4. n_0 является строго возрастающей функцией Q_2.

Принимая во внимание, что согласно определению

$$q_1 = Q_1 q_0, \quad q_2 = Q_2 q_0,$$

запишем (6) в виде

$$n_0 = m \frac{\ln(1 - q_0 Q_2) - \ln(q_0 Q_1)}{\ln[1 - (q_0 Q_1)^m] - \ln[1 - (1 - q_0 Q_2)]}. \qquad (10)$$

Нетрудно показать, что числитель (10) строго возрастает, а знаменатель строго убывает по Q_2 (учитывая, что $Q_1 = 1 - Q_2$), что и доказывает теорему.

Теорема 5.

$$\begin{aligned} n_0 &\to m \text{ при } t \to 0, \\ n_0 &\to (1 - Q_1^m)/Q_1^m \text{ при } t \to \infty. \end{aligned}$$

Согласно смыслу функции $q_0(t)$ имеем:

$$\lim_{t \to 0} q_0(t) = 0; \quad \lim_{t \to \infty} q_0(t) = 1.$$

Рассматривая n_0 как функцию q_0, найдем из (10) с учетом приближений $\ln(1+x) \approx x$; $(1+x) \approx 1 + nx$, $(x \ll 1)$:

$$\lim_{q_0 \to 0} n_0(q_0) = m,$$

Аналогично находим

$$\lim_{q_0 \to 1} n_0(q_0) = (1 - Q_1^m)/Q_1^n.$$

Экономическая оптимизация надежности структуры

В случае, если составляющая S конечной стоимости W является пренебрежимо малой относительно C, оптимизация может быть проведена лишь при задании одного параметра — m или n либо некоторого ограничения, например, налагаемого на число используемых элементов, их общий вес, стоимость, потребление энергии и т. д. Определение экономически оптимальной надежности эквивалентно в этом случае нахождению значений m и n, максимизирующих вероятность безотказной работы согласно результатам § 3.2. В случае различных последствий отказов первого и второго типов величина C может быть вычислена как

$$C = (1 - P_{0p})(Q_{1p}c_1 + Q_{2p}c_2),$$

где

$$Q_{1p} = q_{1p}/(q_{1p} + q_{2p}); \quad Q_{2p} = q_{2p}/(q_{1p} + q_{2p}).$$

В этом случае, а также в случае учета S оптимизацию целесообразно проводить при помощи ЦВМ, причем полученные результаты могут быть использованы для получения первого эффективного приближения к решению.

ВЫВОДЫ

Наиболее целесообразным и универсальным критерием оптимальности уровня надежности элементов управляющих систем является конечная стоимость элементов, подлежащая минимизации.

Оптимизацию надежности необходимо проводить с учетом возможности отказов различных типов; пренебрежение этим обстоятельством может привести к результатам, далеким от оптимальных.

Результаты, изложенные в работе, позволяют решить задачу оптимизации по указанному критерию последовательно параллельной структуры резервирования элементов, подверженных отказам двух типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Barlow, L. C. Hunter, E. Proschan. Optimum checing procedures. «Proc. 7 Nat. Sympos. on RQC in Electron. (Philadelphia, Pa)», 1961, S 1., s. a.

2. Н. Ф. Воллернер. О технико-экономически целесообразном уровне надежности (радиоэлектронных систем). «Радиотехника», т. 20, № 5, 1965.

ЗАДАЧА СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

И. В. Кузьмин, Ф. А. Бекиров

Харьков

Точность — основное требование, предъявляемое к широкому классу систем управления. Система контроля, предназначенная для оценки точности динамической системы, должна характеризоваться некоторым обобщенным критерием качества. Таким критерием является информационный критерий [1].