УДК 681.142.324

Н. И. СЕНЧЕНКО, канд. техн. наук, *Ю. С. ЗАМАЛЕЕВ*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При моделировании биологических, а также сложных динамических систем в реальном масштабе времени и управлении подобными системами с успехом могут быть использованы цифровые интегрирующие машины и аналоговые процессоры, которые объединяются с цифровой вычислительной машиной. Одной из сложностей организации вычислений в таких системах является необходимость масштабирования зависимых переменных. Выбор масштабных соотношений не представляет труда и производится одним из традиционных способов [1, 2] при условии, что известны максимальные значения решений. На сегодняшний день, по-видимому, не существует априорных оценок решений обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 3], удовлетворяющих пользователей.

Цель этой работы — разработка методов построения оценок максимальных значений решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проводимые ниже рассуждения являются небольшой модификацией ставших уже традиционными методов, восходящих к классической теореме Пикара [3]. Однако эти рассуждения приводят нас к удовлетворительным оценкам.

Всякая задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка может быть записана в векторной форме:

$$Y'(x) = F(x), Y(x)), \ x \in [a, b]; \tag{1}$$

$$Y(a) = Y^0.$$

Здесь $Y(x) + \{y_i(x)\}_{i=1}^m$ и $F(x, Y) = \{f_i(x, Y)\}_{i=1}^m$.

Предполагаем, что функция $F(x, Y)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial F}{\partial y_i}$ $(i = \overline{1, m})$ в некотором $(m+1)$-мерном параллелепипеде $G = [a, b] \times D$, где $D = \{Y \in R_m: |Y_i - Y_i^0| \leqslant d\}$ — m-мерный куб. Будем также предполагать, что в m-мерном пространстве R_m введена следующая норма $\|A\| = \max\limits_{1 < x \leqslant m} |a_i|$, $A = \{a_i\}_{i=1}^m \in R_m$. Вектор-функции $Y(x)$, $Y'(x)$ будем трактовать как элементы пространства $C = C([a, b], R_m)$ -непрерывных на интервале $[a, b]$ функций со значениями bR_m, а функцию $F(x, Y)$ — как, вообще говоря, нелинейный оператор, отображающий пространство C в себя. Норма в пространстве C вводится естественным образом $\|Y(x)\|_C = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \|Y(x)\|_{R_m} = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |y_i(x)|$.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \max_{Y\in D} \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|; \qquad \psi(x) = \int_a^x \|F(t, Y^0)\|\, dt;$$

$$\eta(x) = \psi(x) \exp\left(\int_a^x \varphi(t)\, dt\right).$$

Заметим, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\eta(x)$, $(a\leqslant x\leqslant b)$ неотрицательны, а функции $\psi(x)$ и $\eta(x)$ являются монотонно возрастающими. Используя формулу Лагранжа, для всех $i=\overline{1, m}$ и произвольных Y^1, $Y^2\in D$ получаем

$$|f_i(x, Y^1) - f_i(x, Y^2)| = \left|\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, Y^{\text{пр}})\right| |y_j^1 - y_j^2| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, Y^{\text{пр}})\right|\right)$$

$$\max_{1\leqslant x\leqslant m} |y_j^1 - y_j^2| \leqslant \varphi(x)\|Y^1 - Y^2\|.$$

Отсюда следует, что для любых точек (x, Y^1), $(x, Y^2)\in G$ выполняется неравенство

$$\|F(x, Y^1) - F(x, Y^2)\| \leqslant \varphi(x)\, \|Y^1 - Y^2\|. \tag{2}$$

Функции, обладающие таким свойством, называются локально липшицевыми. Величина $K = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \varphi(x)$ представляет собой не что иное, как константу Липшица функции $F(x, Y)$ в области G. Пусть, далее, h — корень уравнения

$$\eta(a+h) = d.$$

Поскольку функция $\eta(x)$ положительна, монотонно растет и $\eta(0)=0$, то это уравнение всегда имеет единственное решение. Обозначим $H=\min\{b-a, h\}$. Известно [3], что если функция $F(x, Y)$ удовлетворяет условию Липшица в указанном параллелепипеде, то на интервале $[a, a+h]$ задача (1) имеет единственное решение $y^*(x)$, для которого верна оценка

$$\|y^*(x)\|_C \leqslant \|y^0\|_{R_m} + M/K\,(e^{Kh} - 1) = P_1, \tag{3}$$

где $M=\max\| F(x, y)\|_{R_m}$.

Ясно, что задача (1) эквивалентна следующему уравнению Вольтерра:

$$Y(x) = Y^0 + \int_a^x F(t, Y(t))\, dt, \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{4}$$

Покажем, что при сделанных предположениях формальные последовательные приближения Пикара

$$Y^{(n)}(x) = Y^0 + \int\limits_a^x F(t, Y^{(n-1)}(t))dt \; (Y^0(x) \equiv Y^0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

корректно определены на интервале $[a, a+H]$ и на этом интервале сходятся к точному решению $Y^*(x)$ задачи (4) в метрике пространства C. Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для любого натурального n и всех $x \in [a, b]$*

$$\int\limits_a^x \varphi(t) \Big(\int\limits_a^t \varphi(\tau)\, d\tau\Big)^n dt = \frac{1}{n+1} \Big(\int\limits_a^x \varphi(t)\, dt\Big)^{n+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = \int\limits_a^x \varphi(t) \Big(\int\limits_a^t \varphi(\tau)\, d\tau\Big)^n dt - \frac{1}{n+1} \Big(\int\limits_a^x \varphi(t)\, dt\Big)^{n+1}, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Ее производная

$$f'(x) = \varphi(x) \Big(\int\limits_a^x \varphi(\tau)\, d\tau\Big)^n - \Big(\int\limits_a^x \varphi(t) dt\Big)^n \cdot \varphi(x) \equiv 0$$

и, значит, $f(x) = \mathrm{const}$. Поскольку, очевидно, $f(a) = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Вернемся к построению оценок решения уравнения (4). Заметим, что для любого $x \in [a, a+H]$

$$\|Y^{(1)}(x) - Y^0\| \leqslant \int\limits_a^x \|F(t, Y^0)\|\, dt = \psi(x) \leqslant \eta(x) \leqslant d, \tag{5}$$

т. е. $Y^{(1)}(x) \in D$ для любого $x \in [a, a+H]$, а значит, корректно определено следующее приближение $Y^{(2)}(x)$. Кроме того, для произвольного $x \in [a, a+H]$ из условий (2) и (5) имеем

$$\|Y^{(2)}(x) - Y^{(1)}(x)\| \leqslant \int\limits_a^x \|F(t, Y^{(1)}(t)) - F(t, Y^0)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^x \varphi(t) \|Y^{(1)}(t) - Y^0\|\, dt \leqslant \int\limits_a^x \varphi(t)\, \psi(t)\, dt \leqslant \psi(x) \int\limits_a^x \varphi(t) dt. \tag{6}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неотрицательны и функция $\psi(x)$ монотонно растет.

Следовательно,

$$\|Y^{(2)}(x) - Y^0\| \leqslant \|Y^{(2)}(x) - Y^{(1)}(x)\| + \|Y^{(1)}(x) - Y^0\| \leqslant \psi(x) \times$$

$$\times \int_a^x \varphi(t)dt + \psi(x) = \psi(x)\left(1 + \int_a^x \varphi(t)dt\right) \leqslant \psi(x)\exp\left(\int_a^x \varphi(t)\,dt\right) =$$

$$= \eta(x) \leqslant d$$

для всех $x \in [a, a+H]$, т. е. $Y^{(2)}(x) \in D$ для всех $x \in [a, a+H]$ и, значит, корректно определено приближение $Y^{(3)}(x)$. Из условий (2), (5), (6) и леммы имеем

$$\|Y^{(3)}(x) - Y^{(2)}(x)\| \leqslant \int_a^x \|F(t, Y^{(2)}(t)) - F(t, Y^{(1)}(t))\|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x \varphi(t)\|Y^{(2)}(t) - Y^{(1)}(t)\|\,dt \leqslant \int_a^x \varphi(t)\,\psi(t)\left(\int_a^t \varphi(\tau)d\tau\right)dt \leqslant \psi(x) \times$$

$$\times \int_a^x \varphi(t)\left(\int_a^t \varphi(\tau)d\tau\right)dt = \frac{1}{2}\psi(x)\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)^2 \text{ для всех } x \in [a, a+H]$$

Следовательно,

$$\|Y^{(3)}(x) - Y^0\| \leqslant \|Y^{(3)}(x) - Y^{(2)}(x)\| + \|Y^{(2)}(x) - Y^{(1)}(x)\| + \|Y^{(1)}(x) - Y^0\| \leqslant$$

$$\leqslant \psi(x)\left(1 + \int_a^x \varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\left(\int_a^x \varphi(t)\,dt\right)^2\right) \leqslant \psi(x)\exp\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right) =$$

$= \eta(x) \leqslant d$ для любого $x \in [a, a+H]$. Значит, $Y^{(3)}(x) \in D$, если $x \in [a, a+H]$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим, что все последовательные приближения $Y^{(n)}(x)$ определены корректно на интервале $[a, a+H]$ и для них справедливы следующие оценки:

$$\|Y^{(n)}(x) - Y^{(n-1)}(x)\| \leqslant \psi(x)\frac{1}{(n-1)!}\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)^{n-1}; \tag{7}$$

$$\|Y^{(n)}(x) - Y^0\| \leqslant \psi(x)\sum_{K=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right)^{n-1} \leqslant \psi(x)\exp\left(\int_a^x \varphi(t)\,dt\right). \tag{8}$$

Из неравенства (7) следует, что $\|Y^{(n)}(x) - Y^{(n-1)}(x)\|_C \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, последовательность $\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ сходится в метрике пространства C к некоторой функции $Y^*(x) \in C$. Эта функция как предел в пространстве C соответствующей последовательности определяется однозначно и

$$\|Y^*(x) - Y^0 - \int_a^x F(t, Y^*(t))dt\|_C \leqslant \|Y^*(x) - Y^{(n)}(x)\|_C + \|Y^{(n)}(x) -$$

$$- Y^0 - \int_a^x F(t, Y^*(t))dt\|_C \leqslant \|Y^*(x) - Y^{(n)}(x)\|_C + \|\int_a^x F(t, Y^{(n-1)} \times$$

$$\times (t))\, dt - \int_a^x F(t, Y^*(t))dt\|_C \leqslant \|Y^*(x) - Y^{(n)}(x)\|_C(1 + \int_a^{a+H} \varphi(t)dt) \to$$

$$\to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, $Y^*(x) = Y^0 + \int_a^x F(t, Y^*(t))dt$, $x \in [a, a+H]$ и и тем самым $Y^*(x)$ — единственное решение уравнения (4) на интервале $[a, a+H]$. Поскольку последовательные приближения $Y^{(n)}(x)$ сходятся к $Y^*(x)$ в метрике пространства C, то из неравенства (8) имеем следующую оценку:

$$\|Y^*(x) - Y^0\|_C = \max_{a \leqslant x \leqslant a+H} \psi(x) \exp\left(\int_a^{a+H} \varphi(t)dt\right) = \psi(a+H) \times$$

$$\times \exp\left(\int_a^{a+H} \varphi(t)\, dt\right).$$

Отсюда на интервале $[a, a+H]$ (там, где решение $Y^*(x)$ уравнения (4) существует) получаем оценку для максимальных значений решения задачи (1)

$$\max_{a \leqslant x \leqslant a+H} \max_{1 < i < m} |y_i^*(x)| \leqslant \max_{1 < i < m} |y_i^0| + \int_a^{a+H} \max_{1 < i < m} |f_i(t, Y^0)| dt \times$$

$$\times \exp\left(\int_a^{a+H} \varphi(t)dt\right). \qquad (9)$$

Заметим, что если при решении задачи (1) мы «завысили» интервал существования решения (т. е. в действительности решение существует не на всем интервале $[a, b]$, а лишь на некоторой его части $[a, a+H]$), то, как это следует из условий (2) и (9), о решении ничего более, кроме априорной оценки $\|Y^*(x) -$

$-Y^0\|_C \leqslant d$, сказать нельзя. В случае, если мы верно указали интервал существования решения задачи (1) $h \geqslant b-a$ и функция $\varphi(x)$ достаточно быстро убывает $\varphi(x) \leqslant \alpha/x$, то оценка (9) значительно точнее априорной

$$\|Y^*(x)\|_C \leqslant \|Y^0\| + \psi(b)\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}.$$

Далее, если известно, что функция $F(x, Y)$ определена по переменной Y на всем пространстве R_m и локально липшицева на интервале $[a, b]$ (т. е. удовлетворяет условию (2)), то трудностей с корректностью определения последовательных приближений $Y^{(n)}(x)$ не возникает. В этом случае решение задачи (1) существует на всем интервале $[a, b]$ и неравенство (9) дает оценку максимальных значений решения этой задачи значительно точнее оценки P_1.

В случае линейной системы дифференциальных уравнений

$$f_i(x, y) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x)\, y_j + g_i(x)$$

функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в оценку (9), как легко видеть, вычисляются так:

$$\varphi(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}(x)|, \qquad \psi(x) = \int_a^x \|F(t, Y^0)\|\, dt =$$

$$= \int_a^x \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left|\sum a_{ij}(t)\, y_j^0 + g_i(t)\right| dt.$$

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка

$$\begin{gathered} y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}); \\ y(a) = y_1^0,\ y'(a) = y_2^0, \ldots, y^{(m-1)}(a) = y_m^0,\quad a \leqslant x \leqslant b \end{gathered} \tag{10}$$

может быть сведена к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_i' = y_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, m-1;$$

$$y_m' = f(x, y_1, \ldots, y_m);$$

$$y_i(a) = y_i^0,$$

где $y_1(x) = y(x)$. Запись этой задачи в векторной форме приводит нас к задаче (1), где функция $F(x, Y)$ имеет вид

$$F(x, Y) = (y_2, y_3, \ldots, y_m, f(x, y_1, \ldots, y_m)).$$

В этом случае функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в оценку (9), вычисляются так:

$$\varphi(x) = \max\left\{1, \max_{y\in D}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|\right\};$$

$$\psi(x) = \int_a \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|y_2^0|,\ldots,|y_m^0|, |f(t, y_1^0,\ldots,y_m^0)|\} \leqslant \max\{(x-a)\times$$

$$\times\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_1^0|, \int_a^x |f(t, y_1^0,\ldots,y_m^0)|dt\}.$$

Тогда неравенство (9) дает оценку максимальных значений решения задачи (10) и его производных.

Проиллюстрируем на примерах применимость изложенного метода.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = x^2(y+1),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y(0)=0.$$

Здесь $f(x, y) = x^2(y+1)$. Тогда, согласно (9), $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|y(x)| =$

$$= 0 + \int_0^1 |x^2(y^0+1)|\,dx\, e^{\int_0^1\varphi(x)dx} = 0 + \int_0^1 x^2\,dx\, e^{\int_0^1 x^2dx} = 0 +$$

$$+\frac{1}{3}e^{1/3}\approx 0{,}460.$$

Точное решение задачи есть функция $y^*(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} - 1$ и $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|y^*(x)| = 0{,}39$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$y_1' = 2y_1 - y_2;$$

$$y_2' = y_1 + 2e^x;\ y_1(0)=4,\ y_2(0)=3,\ 0\leqslant x\leqslant 0{,}1.$$

Здесь $f_1(x, y) = 2y_1 - y_2$, $f_2(x, y) = y_1 + 21^x$. Тогда, согласно (9), имеем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 0{,}1}\max_{i=1,2}|y_i^*(x)| \leqslant 4 + \int_0^x|4+2e^t|\,dt\cdot\exp\left(\int_0^x 3dt\right) = 4 + (4\cdot 0{,}1 +$$

$$+2e^{0{,}1} - 2)\,e^{0{,}3} = 4{,}8.$$

Аналитическое решение задачи Коши для данной системы уравнений имеет вид

$$y_1(x) = e^x(-x^2 + x + 4),\ y_2(x) = e^x(-x^2 + 3x + 3).$$

Тогда

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 0,1}\ \max_{i=1,2} |y_i(x)| = \max\{|e^{0,1}(-0,01 + 0,1 + 4)|,\ |e^{0,1}(-0,01 + 0,3 + 3)|\} = 4,04\cdot e^{0,1} = 4,499.$$

Список литературы: 1. *Каляев А. В.* Теория цифровых интегрирующих машин и структур. — М.: Сов. радио, 1970. — 472 с. 2. *Левин Л.* Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин. — М.: Мир, 1966. — 416 с. 3. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. — М.: Иностр. лит., 1962. — 351 с.

Поступила в редколлегию 24.03.83

УДК 658.012.011