показаны соответствующие спектры для системы Ресслера.

Полную информацию о вероятностных свойствах хаотического процесса дает функция плотности распределения p(X,t). Предполагая, что процесс X(t) в системе стационарный и эргодический, можно значительно упростить нахождение этой функции. Вследствие стационарности исключается зависимость установившегося распределения вероятностей от времени, а предположение эргодичности дает возможность заменить усреднение по ансамблю усреднением по времени вдоль одной реализации. Плотность распределения p(X) стационарного эргодического процесса может быть вычислена как предел относительного времени пребывания траектории системы в элементах объема фазового пространства, соответствующих некоторому дискретному разбиению [4].

На рис. 5 показана плотность распределения компоненты x(t) системы Лоренца (а) и компоненты $p_1(t)$ вектора безусловных вероятностей возмущенного марковского процесса (б). Функция плотности распределения построена по реализациям длиной 100 временных единиц. Область изменения аргумента была разбита на 80 равных интервалов.

Подводя итоги, можно сказать, что “зашумленные хаосом” безусловные вероятности марковского процесса приобретают топологическую структуру, свойственную данному виду хаотической системы. Используя такие методы как построение фазового портрета, спектра мощности и плотности распределения, можно адекватно установить тип хаотического процесса.

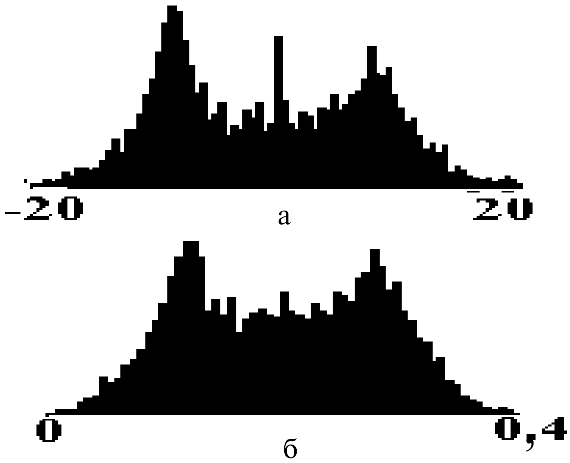

Рис. 5. Плотность распределения системы Лоренца

Литература: 1. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 283 с. 2. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир,1990.- 311 с. 3. *Takens F. Detecting* Strange Attractors in Turbulence// Lect. Notes in Math. Warwick: Springer-Verlag, 1980. Vol .898. P.366-381. 4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука,1990. 311 с. 5. *О.В. Земляный, Л.О. Кириченко* Хаос в нелинейной динамической системе с V- образной переходной характеристикой // Радиоэлектроника и информатика, 1998. №2. С.66-68.

Поступила в редколлегию 12.12.1998

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Буц В.А.

Залесская Евгения Викторовна, студентка ХТУРЭ. Научные интересы: марковские процессы. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.44-68-07.

Кириченко Людмила Олеговна, аспирантка кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: хаотическая динамика и марковские процессы. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.44-68-07.

УДК 007.001.362; 681.327.12.001.362

РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ ЦЕНТРОАФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

ПУТЯТИН Е.П., ЯКОВЛЕВА Е.В., ЛЮБЧЕНКО В.А.

Исследуется проблема разложения матрицы центроаффинного преобразования в суперпозицию простых геометрических преобразований. Полученные разложения могут быть использованы для решения задачи нормализации изображений путем перехода к методам одномерной нормализации, что повышает ее эффективность.

Как известно, основной задачей обработки изображений является их распознавание. Но перед тем, как непосредственно заняться распознаванием, необходимо привести интересующее изображение к удобному для распознавания виду. Так, если существует вероятность того, что изображение было подвергнуто действию групп геометрических преобразований, то сразу же после сегментации следует его нормализовать. Под нормализацией понимается процедура компенсации геометрических преобразований, связывающих эталонные и реальные изображения. Множество геометрических преобразований, формирующих разницу между эталоном и реальным изображением, как правило, образует группы преобразований [1].

Обычно при обработке реального изображения заранее не известно, каким геометрическим преобразованиям оно могло подвергаться. Поскольку все простые геометрические преобразования и их комбинации содержат в себе аффинное преобразование, то будем предполагать, что исследуемое реальное изображение находится под воздействием аффинной группы преобразований G_a. Компенсацию смещений осуществить довольно просто. Например, можно вычислить центр тяжести исследуемого изображения, а затем провести операцию центрирования, совместив центр тяжести изображения с геометрическим центром поля зрения [1]. После центрирования исследуемое изображение будет находиться под действием только центроаффинной группы G_a^c, которая описывается вещественной квадратной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} \neq 0$.

Таким образом, чтобы нормализовать исследуемое изображение, необходимо определить заранее неизвестные параметры центроаффинного преобразования, после чего процедура нормализации будет заключаться в применении обратного центроаффинного отображения, описываемого матрицей A^{-1}.

Для нахождения параметров центроаффинной матрицы предлагается найти разложение матрицы A в произведение матриц простых групп геометрических преобразований, каждая из которых является подгруппой G_a^c. Такое комбинированное преобразование должно удовлетворять следующим требованиям: оно должно быть группой; между параметрами комбинированного преобразования и параметрами $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ должна существовать однозначность, т. е. параметры $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ должны выражаться через параметры комбинированного преобразования, и наоборот.

Как известно, любое отображение, описываемое вещественной квадратной матрицей A, представляет собой комбинацию самосопряженного (в нашем случае – симметрического) и ортогонального отображений [2,5]:

$$A=A_c A_{орт};$$

здесь A_c – матрица симметрического отображения; $A_{орт}$ – матрица ортогонального отображения.

После перехода к базису из собственных векторов матрицы симметрического отображения A_c

$$H^{-1}A_c H=\Lambda,$$

где H – ортогональная матрица, состоящая из собственных векторов матрицы A_c; Λ – вещественная диагональная матрица, получим

$$A_c=H\Lambda H^{-1},$$

откуда

$$A=H\Lambda H^{-1}A_{орт}.$$

Так как матрица H ортогональна и, следовательно, H^{-1} тоже ортогональна, то, обозначив H=K, $H^{-1}A_{орт}=\Lambda$, получим

$$A=K\Lambda L,$$

где Λ – вещественная диагональная матрица, а K, L – ортогональные матрицы.

Рассмотрим случай, когда K, L – матрицы чистого вращения U_1 и U_2, а Λ – матрица неоднородного изменения масштаба. Тогда $A=U_2\,D\,U_1$, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где α – параметр преобразования вращения U_2; β – параметр преобразования вращения U_1; λ, μ – параметры диагонального преобразования D.

Перейдем от матричного соотношения (1) к четырем уравнениям:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda\cos\alpha\cos\beta - \mu\sin\alpha\sin\beta\,, \\ a_{12} &= \lambda\cos\alpha\sin\beta + \mu\sin\alpha\cos\beta\,, \\ a_{21} &= -\lambda\sin\alpha\cos\beta - \mu\cos\alpha\sin\beta\,, \\ a_{22} &= -\lambda\sin\alpha\sin\beta - \mu\cos\alpha\cos\beta\,. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (2) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \lambda\cos\beta &= a_{11}\cos\alpha - a_{21}\sin\alpha\,, \\ \lambda\sin\beta &= a_{12}\cos\alpha - a_{22}\sin\alpha\,, \\ -\mu\sin\beta &= a_{11}\sin\alpha + a_{21}\cos\alpha\,, \\ \mu\cos\beta &= a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha\,. \end{aligned} \quad (3)$$

Разрешая эти уравнения относительно параметров α, β, λ и μ, получаем

$$\begin{aligned} tg2\alpha &= \frac{-2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})}{a_{11}^2+a_{12}^2-a_{21}^2-a_{22}^2}, \\ tg2\beta &= \frac{2(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22})}{a_{11}^2+a_{21}^2-a_{12}^2-a_{22}^2}, \\ \lambda &= \frac{a_{11}\cos\alpha - a_{21}\sin\alpha}{\cos\beta}, \\ \mu &= \frac{a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha}{\cos\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Проверим, что преобразования $U_2\,D\,U_1$ являются группой.

1. Условие ассоциативности будет выполняться на основании свойств матриц, т. е. $(U_{21}D)U_1=U_2(DU_1)$.

2. Единичным преобразованием будет U_2DU_1 с параметрами $\alpha=0$, $\beta=0$, $\lambda=\mu=1$.

3. $(U_2DU_1)^{-1}=U_1^{-1}D^{-1}U_2^{-1}$. Поскольку $\det U_1\neq 0$, $\det D\neq 0$, $\det U_2\neq 0$, то обратный элемент существует.

4. В результате суперпозиции преобразований U_2DU_1 и U_4DU_3 должно получиться преобразование, состоящее из поворота U_1^*, диагонального сдвига D^* и еще одного поворота U_2^*, т. е. преобразование $U_2^*D^*U_1^*$. Можно показать, что параметры результирующего преобразования $\alpha^*, \beta^*, \lambda^*$ и μ^* равны

$$\begin{aligned} tg2\alpha^* &= \frac{-2(a_{11}^*a_{21}^*+a_{12}^*a_{22}^*)}{(a_{11}^*)^2+(a_{12}^*)^2-(a_{21}^*)^2-(a_{22}^*)^2}\,, \\ tg2\beta^* &= \frac{2(a_{11}^*a_{12}^*+a_{21}^*a_{22}^*)}{(a_{11}^*)^2+(a_{21}^*)^2-(a_{12}^*)^2-(a_{22}^*)^2}\,, \\ \lambda^* &= \frac{a_{11}^*\cos\alpha^* - a_{21}^*\sin\alpha^*}{\cos\beta^*}\,, \\ \mu^* &= \frac{a_{12}^*\sin\alpha^* + a_{22}^*\cos\alpha^*}{\cos\beta^*}\,, \end{aligned}$$

где $a_{11}^*, a_{12}^*, a_{21}^*, a_{22}^*$ – параметры матрицы A^*, равной $(U_2D_1U_1)^*(U_4D_2U_3)$, т. е. выражаются через параметры $\alpha_1, \beta_1, \lambda_1, \mu_1$ преобразования $(U_2D_1U_1)$ и параметры $\alpha_2, \beta_2, \lambda_2, \mu_2$ преобразования $(U_4D_2U_3)$.

Так как выполняются все условия, то U_2DU_1 – группа. Поскольку между параметрами $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ и параметрами центроаффинной матрицы $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ существует взаимная однозначность, то комбинированное преобразование U_2DU_1 является центроаффинной группой и, следовательно, содержит в себе все подгруппы центроаффинного преобразования, а также их комбинации.

Но разложение U_2DU_1 оказалось не слишком удобным на практике, так как возникают неоднозначности и неопределенности даже при некоторых простых преобразованиях. Неоднозначность, например, возникает, когда $\lambda=\mu$, т. е. масштаб по всем направлениям одинаковый. В этом случае нет смысла во втором повороте. Следовательно, угол одного из поворотов должен равняться нулю. Но возникает неоднозначность, заключающаяся в том, что нулю может равняться угол как первого поворота, так и второго. К тому же при преобразованиях поворота, однородного масштаба, их комбинации и некоторых других преобразованиях в первых двух формулах (4) возникают неопределенности вида 0/0. Существуют также ограничения на параметры α и β: из первых двух формул (4) α и β не должны равняться $\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}n$ (n=0,1,2), из вторых – $\beta\neq\frac{\pi}{2}n$. Поэтому применение указанного разложения для нормализации вызывает трудности.

Рассмотрим другие разложения.

Предположим, что разложением центроаффинной группы будет комбинированное преобразование DXU, где D – матрица неоднородного масштаба, X– матрица косого сдвига вдоль оси X и U – матрица поворота. Тогда A = DXU, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Из (5) запишем четыре уравнения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda(\cos\alpha - h\sin\alpha), \\ a_{12} &= \lambda(\sin\alpha + h\cos\alpha), \\ a_{21} &= -\mu\sin\alpha, \\ a_{22} &= \mu\cos\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Разрешая эти уравнения относительно $a, h, \lambda, \mu,$ получаем

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-\frac{a_{21}}{a_{22}}),$$

$$\mu = \frac{a_{22}}{cos\alpha} = \frac{a_{22}}{cos(\operatorname{arctg}(-\frac{a_{21}}{a_{22}}))},$$

$$h = \frac{a_{21}a_{11} + a_{22}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$\lambda = \frac{\mu a_{11}}{a_{22} + a_{21}h} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}\cos(\operatorname{arctg}(-\frac{a_{21}}{a_{22}})).$$

Проверив выполнение требований к группе, приходим к выводу, что комбинированное преобразование DXU также является центроаффинной группой. Следовательно, все простые группы, например, преобразования косого сдвига по оси X, по оси Y, преобразования поворота, преобразования неоднородного масштаба, а также их комбинации будут подгруппами разложения DXU, т. е. X=DXU, Y=DXU, U=DXU, D=DXU и т.д. при определенных значениях параметров $\alpha, \eta, \lambda, \mu$.. Так, Y=DXU только когда параметры DXU равны:

$$\mu = \frac{1}{\cos(arctg(-h^*))},$$

$$\alpha = arctg(-h^*),$$

$$h = h^*,$$

$$\lambda = \cos(arctg(-h^*)),$$

где h^* — параметр преобразования косого сдвига вдоль оси Y, матрица преобразования которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h^* & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим далее, что A=YDX, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Перепишем (7) в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda, \\ a_{12} &= \lambda h_2, \\ a_{21} &= \lambda h_1, \\ a_{22} &= \lambda h_1 h_2 + \mu. \end{aligned}$$

Выразим параметры $\lambda, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mu$ через $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$:

$$\begin{aligned} \lambda &= a_{11}, \\ h_1 &= \frac{a_{21}}{a_{11}}, \\ h_2 &= \frac{a_{12}}{a_{11}}, \\ \mu &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}}. \end{aligned} \tag{8}$$

На основании выражений (8) и результатов проверки выполнения требований группы для разложения YDX оказалось, что YDX — тоже разложение матрицы A.

Так как разложения DXU и YDX являются центроаффинными группами, то они эквивалентны между собой, и комбинированное преобразование YDX можно разложить в DXU, и наоборот, т. е. YDX=DXU только при параметрах $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ разложения DXU, равных

$$\alpha = arctg(-\frac{\lambda^* h_1^*}{\lambda^* h_1^* h_2^* + \mu^*}),$$

$$\mu = -\frac{\lambda^* h_1^*}{\sin\alpha},$$

$$\lambda = \frac{\lambda^*}{\cos\alpha - \sin\alpha h},$$

$$h = \frac{h_2^*\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + h_2^*\sin\alpha},$$

где $\lambda^*, \mu^*, h_1^*, h_2^*$-параметры разложения YDX, имеющего вид

$$\begin{pmatrix} \lambda^* & \lambda^* h_2^* \\ \lambda^* h_1^* & \lambda^* h_1^* h_2^* + \mu \end{pmatrix}.$$

A DXU=YDX только тогда, когда параметры $\lambda^*, \mu^*, h^*_1, h^*_2$ разложения YDX будут иметь следующие значения:

$$\lambda^* = \lambda(\cos\alpha - h\sin\alpha),$$

$$h_2^* = \frac{\sin\alpha + h\cos\alpha}{\cos\alpha - h\sin\alpha},$$

$$h_1^* = -\frac{\mu\sin\alpha}{\lambda(\cos\alpha - h\sin\alpha)},$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\cos\alpha - h\sin\alpha}.$$

Здесь α, h, λ, μ — параметры разложения DXU, имеющего вид (5).

Существуют и другие разложения центроаффинной матрицы:

A=DYU, A=XDY, A=DXY, A=DYX,
A=UXD, A=UYD, A=UDY, A=UDX. (9)

Как говорилось в начале, не любая суперпозиция элементарных преобразований D, Y, X, U пригодна для разложения матрицы A. Только суперпозиция, являющаяся группой и содержащая в себе 4 параметра, имеющих взаимно-однозначное соответствие с параметрами $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, может являться разложением центроаффинной матрицы A. Если эти требования не выполняются, то такое комбинированное преобразование не есть разложение матрицы A.

Например, комбинированные преобразования YXU, YUX не являются разложениями матрицы A.

На основе полученных разложений центроаффинной группы можно проводить как последовательную нормализацию изображений (построив соответствующую последовательность нормализаторов, например, при разложении DXU последовательность нормализаторов имеет вид $F_D F_X F_U$), так и параллельную.

Основываясь на разложениях матрицы A и свойствах аффинного преобразования, можно для нахождения параметров простых преобразований, входящих в разложение матрицы А, применить метод одномерной нормализации. Такая нормализация заключается в вычислении параметров для нормализации не всего изображения B(x,y), а только его ограничения b(ξ) на некоторые прямые [1], что намного проще. Вычислив параметры одномерной нормализации и воспользовавшись разложением матрицы А, получим параметры для нормализации всего изображения, т. е. параметры матрицы обратного преобразования A^{-1}.

Мы знаем, что при центроаффинном преобразовании центр тяжести изображения, находящийся в начале координат, остается неподвижным [1]. Так как аффинное преобразование переводит прямую в прямую [3,4], то любая прямая, проходящая через начало координат, при центроаффинном преобразовании переходит в (вообще говоря другую) прямую, проходящую через координаты (0;0). Таким образом, каждой прямой, проходящей через координаты (0;0), соответствует прямая реального изображения, полученного из эталонного центроаффинным преобразованием, проходящая также через точку (0;0). Соответствующие прямые эталонного и реального изображений будут отличаться углом наклона, а ограничения $b_0(\xi)$ эталонного и $b(\xi)$ реального изображений на эти прямые будут различаться масштабом. Для нахождения параметров одномерной нормализации необходимо вычислить угол наклона и коэффициент масштаба между соответствующими прямыми.

Приведем пример использования методов одномерной нормализации и результатов разложений центроаффинной матрицы в суперпозицию простых преобразований для нахождения параметров нормализующей матрицы.

В качестве разложения нормализующей матрицы А выберем DXU и вычислим параметры простых преобразований, входящих в это разложение, применяя методы одномерной нормализации.

На рис.1 показано эталонное изображение, а на рис.2 – изображение, полученное путем воздействия на эталонное каким-либо центроаффинным преобразованием А.

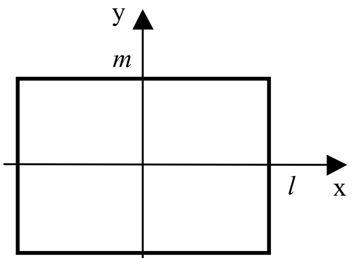

Рис.1. Эталонное изображение

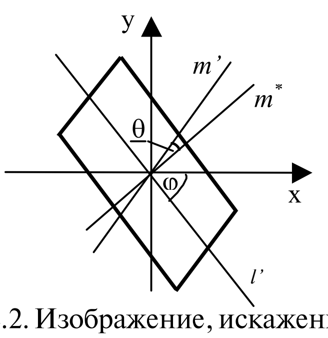

Рис.2. Изображение, искаженное центроаффинным преобразованием А

Выбрав на рис. 1 две перпендикулярные прямые *l* и *m*, например, координатные оси OX и OY, необходимо найти соответствующие им прямые на рис. 2 l' и m' и вычислить следующие 4 параметра: k_1 – коэффициент масштаба между ограничениями на прямые *l* и l'; k_2 – коэффициент масштаба между ограничениями на прямые *m* и m'; φ – угол между старым положением прямой *l*, в нашем случае осью OX, и l' (новым положением прямой *l*); θ – угол между прямой m^*, перпендикулярной к прямой l', и прямой m'.

Используя найденные параметры φ, θ, k_1, k_2, определим параметры простых преобразований α, h, λ, μ в разложении DXU. Если в качестве перпендикулярных прямых *l* и *m* на эталонном изображении были выбраны координатные оси OX и OY, то

$$\begin{aligned} \lambda &= 1/k_1\,, \\ \mu &= 1/(k_2\cos\theta)\,, \\ \alpha &= -\varphi\,, \\ h &= -\mathrm{tg}\theta\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставив (10) в уравнение (6), получим параметры нормализующей матрицы А. Таким образом нормализация будет заключаться в воздействии на изображение полученной матрицей А, т. е. в одновременной компенсации всех преобразований, формирующих разницу между эталонным и реальным изображениями.

Можно также применить последовательную нормализацию, последовательно вычислив параметры λ, μ, α, β и поочередно скомпенсировав преобразования U, X, D.

В заключение отметим, что все разложения (9) матрицы А эквивалентны между собой, но с точки зрения практической реализации они не равноценны. Критерием отбора наиболее подходящих могут быть: простота реализации, ограничения на допустимые значения параметров преобразований, помехозащищенность и т.д.

Литература: 1. *Путятин Е.П.* Обработка изображений в робототехнике. М.: Машиностроение, 1990. 320 с. 2. *Мышкис А.Д.* Математика для втузов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с. 3. *Бакельман И. Я.* Высшая геометрия. М.: Просвещение, 1967. 368 с. 4. *Яглом И.М.* Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. М.: Учпедгиз, 1962. 247 с. 5. *Бекмешев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987. 320 с.

Поступила в редколлегию10.11.98

Рецензент: д-р техн. наук Сироджа И.Б.

Путятин Евгений Петрович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой применения ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: обработка и распознавание изображений. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина,14, тел. 40-94-19.

Яковлева Елена Владимировна, аспирант кафедры применения ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: обработка и распознавание изображений. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина,14, тел. 40-94-19.

Любченко Валентин Анатольевич, студент ХТУРЭ. Научные интересы: компьютерная графика, распознавание образов. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина,14, тел. 40-94-19.