Проблемы бионики. 2001. Вып. 54. С. 68-74. ХТУРЭ

УДК 519.7

Д. О. КОЛЕСНИКОВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

Катализатором развития индустрии информационных систем (ИС) является разработка и широкое использование при производстве ИС физико-математического инструментария, направленного на описание информационных процессов. В качестве математической составляющей этого инструментария с большой эффективностью может быть использована такая алгебрологическая система, как алгебра предикатных операций (АПО) [1]. АПО – мощный инструмент описания и исследования информационных процессов. На ее языке может быть описан практически любой информационный процесс или объект [2]. Однако широкому применению АПО при производстве ИС препятствует недостаточный объем информации о ее свойствах, в частности почти совсем не исследованы уравнения этой алгебры. Кроме громоздкого метода полного перебора, мы можем упомянуть лишь такие методы решения некоторых уравнений АПО, которые получаются путем элементарной онтологической редукции методов решения уравнений алгебры конечных предикатов – в большей мере исследованной алгебрологической системы [3]. Понятно, что таким способом мы не определим свойства уравнений АПО, которые заключают в себе характерные особенности именно этой алгебры. Таким образом, актуальной является задача исследования уравнений АПО, под которой следует понимать классификацию и разработку методов их решения. В настоящей статье изложен универсальный метод решения уравнения АПО с неизвестными предикатами. Универсальность предложенного метода состоит в том, что с его помощью можно решить любое уравнение АПО, в котором требуется определить неизвестные предикаты. Однако следует отметить, что для некоторых уравнений применение данного метода не будет давать преимущество по сравнению с методом полного перебора. Условия, когда это будет происходить, также приведены в настоящей статье.

Прежде чем приступить непосредственно к изложению метода, кратко опишем понятие АПО, более подробно эта алгебра описана в работе [1]. Пусть U – некоторое множество предметов; $x_1, ..., x_m$ – предметные переменные. Обозначим через M – множество всех предикатов $P(x_1, ..., x_m)$, заданных на U^m. Множество M называется *универсумом предикатов*. Переменные $X_1, ..., X_n$, заданные на M, называются *предикатными переменными*. Их значениями служат предикаты из M. Любая функция $F(X_1, ..., X_n) = Y$, отображающая множество M^n в множество M, называется *предикатной операцией*. Образуем множество R всех предикатных операций. *Алгеброй предикатных операций* $\mathfrak{R}_{АПО}$ называется любая алгебра, заданная на носителе R. Существует целое множество различных алгебр предикатных операций. Это обусловлено тем, что в приведенном определении фиксирован лишь носитель алгебры, но ничего не говориться о ее сигнатуре. На одном и том же носителе R могут быть заданы различные сигнатуры, которые и определят ту или иную конкретную алгебру предикатных операций.

Введем понятие уравнения алгебры предикатных операций. Под уравнением алгебры $\mathfrak{R}_{АПО}$ с n неизвестными предикатами будем понимать равенство

$$F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, A_1, A_2, \ldots, A_p) = F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n, A_1, A_2, \ldots, A_p) \qquad (1)$$

двух предикатных операций, содержащих подлежащие определению предикаты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и некоторые фиксированные предикаты $A_1, A_2, \ldots, A_p$. *Решением* уравнения (1) называется любой набор предикатов $X_1, X_2, \ldots, X_n$, обращающий левую и правую части уравнения в один и тот же предикат. Уравнение (1) называется *разрешимым*, если оно имеет хотя бы одно решение. *Общее решение* уравнения (1) представляет собой совокупность всех решений уравнения (1). Для сокращения записи условимся в формальной записи уравнений алгебры $\mathfrak{R}_{АПО}$ опускать предикаты, которые считаются известными. В связи с этим, любое уравнение алгебры $\mathfrak{R}_{АПО}$ с n неизвестными предикатами $X_1, X_2, ..., X_n$ можно записать в общем виде следующим образом:

$$F_1(X_1, X_2, ..., X_n) = F_2(X_1, X_2, ..., X_n). \qquad (2)$$

Два уравнения называются *эквивалентными*, если любое решение первого уравнения является решением второго и, обратно, любое решение второго уравнения является решением первого. В случае, когда одна из частей уравнения (2) представляет собой тождественно истинный предикат 1, уравнение называется *каноническим*. Общий вид канонического уравнения с n неизвестными следующий:

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) = 1. \tag{3}$$

Введем следующие определения. Пусть $F(X_1, ..., X_n) = Y$ – предикатная операция, отображающая множество M^t в множество M. *Отрицанием* $\neg F = \bar{F}$ предикатной операции F называется предикатная операция, значение которой определяются по правилу

$$(\neg F)(X_1, ..., X_n) = \neg F(X_1, ..., X_n) \tag{4}$$

для любых $X_1, ..., X_n$ из M. Пусть P и G – предикатные операции, отображающие M^t в M. *Дизъюнкцией* $F \vee G$ предикатных операций F и G называется предикатная операция, значение которой определяются следующим образом:

$$(F \vee G)(X_1, ..., X_n) = F(X_1, ..., X_n) \vee G(X_1, ..., X_n) \tag{5}$$

для любых $X_1, ..., X_n$ из M. *Конъюнкцией* предикатных операций F и G называется предикатная операция, значение которой определяются по правилу

$$(F \wedge G)(X_1, ..., X_n) = F(X_1, ..., X_n) \wedge G(X_1, ..., X_n) \tag{6}$$

для любых $X_1, ..., X_n$ из M. В левых частях равенств (4–6) операции $\vee$, $\wedge$ и $\neg$ применяются к предикатным операциям, в правых – к предикатам. *Булевой сигнатурой* называется сигнатура $\Omega_Б$, состоящая из предикатных операций второго порядка дизъюнкции, коньюнкции и отрицания, то есть операций, определяемых выражениями (4–6). Под записью FG будем понимать $F \wedge G$.

Условимся знаком "~" обозначать бинарную предикатную операцию второго порядка *эквиваленции*, выражаемую булевой сигнатурой следующим образом. Для любых двух предикатных операций $V, W \in M$ $V \sim M = VM \vee \bar{V}\,\bar{M}$. Докажем следующее утверждение: *любое уравнение* (2) *можно записать в виде эквивалентного ему канонического уравнения* (3), *в котором левая часть имеет вид* $F(X_1, X_2, ..., X_n) = F_1(X_1, X_2, ..., X_n) \sim F_2(X_1, X_2, ..., X_n)$. Действительно, если совокупность предикатов $(X_1, X_2, ..., X_n)$ является решением уравнения (2), то из равенства $F_1(X_1, X_2, ..., X_n) = F_2(X_1, X_2, ..., X_n)$ следует, что $F(X_1, X_2, ..., X_n) = F_1(X_1, X_2, ..., X_n) \vee \bar{F}_1(X_1, X_2, ..., X_n) = 1$. Следовательно, набор предикатов $(X_1, X_2, ..., X_n)$ является решением уравнения (3). Обратно, если $(X_1, X_2, ..., X_n)$ – решение уравнения (3), то $F_1(X_1, X_2, ..., X_n) \sim F_2(X_1, X_2, ..., X_n) = 1$. Умножая левую и правую части (2) на левую часть последнего равенства, приходим к тождественному равенству $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)F_2(X_1, X_2, ..., X_n) = F_1(X_1, X_2, ..., X_n)F_2(X_1, X_2, ..., X_n)$. Вследствие этого совокупность предикатов $(X_1, X_2, ..., X_n)$ удовлетворяет уравнению (2). Утверждение доказано.

В силу доказанного утверждения ограничимся рассмотрением канонических уравнений алгебры $\mathfrak{R}_{АПО}$. Нас будет интересовать решение следующих задач. Необходимо установить, при каких условиях уравнение (3) имеет решение и, если эти условия соблюдаются, найти все такие решения, то есть определить $X_1 ... X_n$.

Задача определения критерия разрешимости и в случае разрешимости, нахождения общего решения произвольного уравнения алгебры предикатных операций довольна сложна. Связано это со сложностью самой алгебры. В связи с этим вначале рассмотрим эту задачу применительно к уравнениям более простой алгебры предикатных операций с константами и переменными, а затем покажем, как полученные результаты могут быть применены при решении уравнений алгебры предикатных операций.

Введем следующее определение. Пусть $\mathfrak{R} = \langle K, S \rangle$ – произвольная алгебра. Тогда будем говорить, что множество $L \subseteq K$ *порождает* множество $W \subseteq K$ с помощью сигнатуры S, если результат действия операций из S и их всевозможных суперпозиций на элементы множества L дает в точности элементы множества W. Теперь введем предикатные операции, которые потребуются для определения алгебры предикатных операций с константами и переменными. Эта алгебра будет иметь булеву сигнатуру, но более узкий носитель, порождаемый вводимыми предикатными операциями. Тождественной предикатной операцией по переменной X_j, $j = 1, ..., n$, называется операция со значениями

$$F(X_1, ..., X_n) = X_j \tag{7}$$

при любых $X_1, ..., X_n$ из M. Каждой предикатной переменной X_j взаимно однозначно соответствует своя тождественная предикатная операция (7). Будем обозначать ее символом X_j. Константной предикатной операцией называется любая предикатная операция со значением

$$F(X_1, ..., X_n) = P \tag{8}$$

при любых $X_1, ..., X_n$ из M. Здесь P – фиксированный предикат из M. Будем обозначать эту операцию символом P. Каждому предикату из M соответствует своя константная операция.

Введем понятие алгебры предикатных операций с константами и переменными. Рассмотрим произвольную булеву алгебру предикатных операций $\mathfrak{R}_Б = <R, \Omega_Б>$. Обозначим через $R_{КП}$ множество, порождаемое тождественными и константными предикатными операциями из R. Подалгебра $\mathfrak{R}_{КП} = <R_{КП}, \Omega_Б>$ алгебры $\mathfrak{R}_Б$ называется *алгеброй предикатных операций с константами и переменными*. В работе [1] доказано, что в случае, когда в универсуме U содержится более одного предмета, выполняется строгое включение $R_{КП} \subset R$. Это означает, что при $|U| > 1$ не любую предикатную операцию из R можно записать на языке алгебры $\mathfrak{R}_{КП}$. В этом смысле введенная алгебра беднее в выразительных свойствах алгебры предикатных операций. Но, как будет показано в дальнейшем, решение уравнений алгебры предикатных операций $\mathfrak{R}_{АПО} = <R, \Omega>$ можно свести к решению уравнений алгебры $\mathfrak{R}_{КП} = <R_{КП}, \Omega_Б>$.

Введем некоторые условные обозначения. Пусть $\mathfrak{R}_{АПО} = <R, \Omega>$ – произвольная алгебра предикатных операций. Носитель этой алгебры R представляет собой все возможные предикатные операции, заданные на множестве M m-местных предикатов, определенных на U^m. Носителем алгебры Ω является некоторая совокупность предикатных операций второго порядка. Наряду с алгеброй $\mathfrak{R}_{АПО}$ будем рассматривать алгебру $\mathfrak{R}_{КП} = <R_{КП}, \Omega_Б>$, где множество $R_{КП}$ порождается тождественными и константными предикатными операциями из R с помощью булевой сигнатуры $\Omega_Б$.

Определим связь между алгеброй множеств и алгеброй предикатных операций с константами и переменными. Пусть $\mathfrak{R}_{АМ} = <B(U^m), \Omega_S>$ – алгебра множеств с носителем $B(U^m)$, состоящим из множества всех возможных подмножеств множества U^m и сигнатурой Ω_S, состоящей из теоретико-множественных операций. Рассмотрим произвольную предикатную операцию $F(X_1, \ldots, X_k)$ алгебры $\mathfrak{R}_{КП}$. Исходя из определения алгебры $\mathfrak{R}_{КП}$, можно утверждать, что эта предикатная операция может быть построена с помощью применения операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания непосредственно к предикатам $X_1, \ldots, X_k$ и, быть может, к некоторым другим предикатам из множества M. Таким образом, между преобразованиями алгебры множеств $\mathfrak{R}_{АМ}$ и предикатными операциями алгебры $\mathfrak{R}_{КП}$ может быть установлено взаимно однозначное соответствие, если сопоставить множествам из $B(U^m)$ предикаты из М, объединению – дизъюнкцию, пересечению – конъюнкцию и дополнению – отрицание. Это означает, что все результаты, известные относительно разрешимости и вида общего решения уравнений алгебры множеств [4], соответствующим образом можно перенести на уравнения алгебры предикатных операций с константами и переменными. Сформулируем теорему о критерии разрешимости и нахождении общего решения канонического уравнения алгебры предикатных операций с константами и переменными.

Теорема 1. *Уравнение* (3) *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$\bigvee_{(\Omega_1,\ldots,\Omega_n),\Omega_i\in\{0,1\}} \mathrm{F}(\Omega_1,\ldots,\Omega_n)=1 \tag{9}$$

Если уравнение разрешимо, то компоненты его общего решения $(X_1, \ldots, X_n)$ *выражаются через свободные параметры* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *в виде*

$$P_j = P_j(C_j, \ldots, C_n) = C_j \sim \bigvee_{(\Omega_1,\ldots,\Omega_{j-1}),\Omega_i\in\{0,1\}} F(\Omega_1, \ldots, \Omega_{j-1}, C_j, X_{j+1}, \ldots, X_n). \tag{10}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о критерии разрешимости и общем решении уравнений алгебры множеств, приведенному в работе [5], поэтому приводить его в данной работе не будем.

Введем следующее определение. Предикатная операция $F{:}M\to M$ называется *невырожденной*, если существует такой предикат $P\in M$, называемый *неподвижной точкой* предикатной операции F, что $F(P) = P$. Областью значения предикатной операции F назовем множество $\{F(P)|P\in M\}$. Можно показать, что множество всех неподвижных точек невырожденной предикатной операции алгебры $\mathfrak{R}_{КП}$ совпадает с ее областью значений. Доказательство этого факта выходит за пределы настоящей статьи.

Существует целое множество алгебр предикатных операций [1, 6]. В качестве базовой алгебры предикатных операций для иллюстрации метода решения уравнений алгебры предикатных операций выберем алгебру подстановочных операций, или прикладную алгебру [6]. Введем ряд предикатных операций, которые нам потребуются для определения алгебры подстановочных операций и последующего ее консервативного расширения [7]. Более подробно прикладная алгебра описана в работе [6].

Заменой аргумента x_i на аргумент x_j называется операция

$$x_i/x_j(P)=Q, \tag{11}$$

которая каждому предикату $P(x_1, x_2,..., x_m)$ ставит в соответствие предикат $Q(x_1, x_2,..., x_m)$ по следующему правилу: для любых $a_1, a_2,..., a_m \in U$

$$Q(a_1,\ldots, a_i, \ldots, a_j,\ldots ,a_m) = P(a_1,\ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1},\ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1},\ldots ,a_m).$$

Предикат, получаемый из предиката $P(x_1,..., x_i,..., x_j,..., x_m)$ заменой аргумента x_i на аргумент x_j, будем записывать в виде $P(x_1,..., x_j,..., x_j,..., x_m)$. Например, результатом замены аргумента y на аргумент x в предикате $P(x, y)$ будет предикат $P(x, x)$. Здесь x и y обозначают некоторые из аргументов $x_1, x_2,..., x_m$. Подразумевается, что все остальные аргументы предиката $P(x, y)$ несущественны.

Операция

$$x_i/x_j(P) = Q \tag{12}$$

получения предиката $Q(x_1, x_2,..., x_m)=P(x_1,..., x_j,..., x_i,..., x_m)$ из предиката $P(x_1,..., x_i,..., x_j,..., x_m)$ называется *обращением* предиката P *по аргументам* x_i и x_j или *перестановкой* его аргументов x_i и x_j.

Подстановкой

$$x_i/a(P)=Q \tag{13}$$

значения a на место аргумента x_i называется операция, которая каждому предикату $P(x_1, x_2,..., x_m)$ ставит в соответствие предикат $Q(x_1, x_2,..., x_m)$ по следующему правилу: для любых $a_1, a_2,..., a_m \in U$

$$Q(a_1,..., a_i,..., a_m) = P(a_1,..., a,..., a_m).$$

Предикат, получаемый из предиката $P(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1},..., x_m)$ подстановкой значения a на место аргумента x_i, будем записывать в виде $Q(x_1, x_2,..., x_m)=P(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1},..., x_m)$. Аргумент x_i у предиката Q – несущественный.

Квантор общности определяется следующим образом:

$$\forall x_i(X)= \bigwedge_{a\in U} x_i/a(X). \tag{14}$$

а, *квантор существования* – по правилу:

$$\exists x_i(X)= \bigvee_{a\in U} x_i/a(X). \tag{15}$$

Определим алгебру подстановочных операций. *Алгеброй подстановочных операций* называется алгебра $\mathfrak{R}_{\text{АПО}} = <R, \Omega>$. Носитель R алгебры порождается предикатными операциями равенства вида $D(x_1, x_j)$, $j = 2, \ldots, m$ (они выполняют роль константных предикатных операций) и предикатными переменными X_i, $i = 1, \ldots, n$, представляющими в данном случае тождественные предикатные операции. Сигнатура Ω алгебры состоит из подстановок вида $x_i/a(X)$, $i = 1, \ldots, m$, $a \in U$, а также из операций отрицания и дизъюнкции. В работе [1] доказано, что алгебра $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$ является полной алгеброй, т. е. ее выразительных средств вполне хватает для того, чтобы записать любую возможную предикатную операцию и, следовательно, любое уравнение алгебры предикатных операций (3). Для удобства дальнейшего изложения алгебру $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$ консервативно расширим операциями (11), (12), (14) и (15), а также операцией конъюнкции второго порядка (6).

Установим соответствие между уравнениями алгебры предикатных операций и алгебры предикатных операций с константами и переменными. Введем в рассмотрение понятие ортогональной системы предикатов. Условимся обозначать набор переменных $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Два предиката P и G из M называются *ортогональными*, если ни один из них не является тождественно ложным предикатом и выполняется

$$\exists x\, (P(x)G(x)) = 0. \tag{16}$$

Ортогональные предикаты подобны ортогональным функциям [8]. Совокупность попарно ортогональных предикатов называется *ортогональной системой предикатов*. Будем говорить, что предикат P разложим по ортогональной системе предикатов $P_1, \ldots, P_k$, если

$$P(x) = \bigvee_{j=1}^{k} \alpha_j P_j(x), \tag{17}$$

где $\alpha_j \in \{0, 1\}$ – тождественно ложный или тождественно истинный предикат, $j = 1, \ldots, k$. Система ортогональных предикатов называется *полной*, если любой предикат из M может быть разложен по этой системе. Очевидно, что существует лишь единственная полная ортогональная система предикатов – совокупность всех конституент единиц [3]. Предположим, что некоторый предикат P разложим по ортогональной системе предикатов $P_1, \ldots, P_m$, тогда коэффициенты α_j в разложении (17) определяются следующим образом:

$$\alpha_j = \exists x\,(P(x)P_j(x)). \tag{18}$$

Пусть $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_k)$ – набор переменных, $a = (a_1 \ldots a_k)$ – набор предметов, тогда введем условные сокращения: $\xi^a = \xi_1^{a_1}\xi_2^{a_2}\ldots\xi_k^{a_k}$, $\xi/a\,P = \xi_1/a_1\,\xi_2/a_2 \ldots \xi_k/a_k\,P$. Сформулируем теорему, которая будет играть ключевую роль для разработки метода нахождения общего решения уравнений алгебры $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$.

Теорема 2. *Пусть $P(x)$ – предикат, тогда для любого поднабора ξ набора переменных x существует следующее разложение*:

$$P(x) = \bigvee_{j\in I} \alpha_j(\xi)P_j(\eta), \tag{19}$$

где I – множество индексов, $|I| = |U^k|$; $\{\alpha_j\}_{j\in I}$ – ортогональная система предикатов вида $\alpha_j(\xi) = \xi^{a_j}$, $a_j \in U^k$; $\eta = x\backslash\xi$ – дополнение набора ξ до набора x; предикаты P_j определяются по формулам

$$P_j(\eta) = \exists\xi\,(\alpha_j(\xi)P(x)) = \xi/a_j\,P(x),\ a_j \in U^k, j \in I. \tag{20}$$

Доказательство. Теорема 2 представляет собой обобщение известной теоремы о разложении [3] на случай разложения предиката по произвольному набору переменных, поэтому доказательство теоремы 2 в настоящей работе приводить не будем ввиду его аналогичности доказательству, приведенному, например, в работе [3].

Используя выражение (20), разложение (19) предиката P можно переписать следующим образом

$$P(x) = \bigvee_{a\in U^k} \xi^a\,\xi/a\,P(x). \tag{21}$$

Пусть U – предметное пространство; M – множество всех предикатов, заданных на U^m; R – множество всех предикатных операций, заданных на множестве M. Обозначим алгебру подстановочных операций через $\mathfrak{R}_{\text{АПО}} = \langle R, \Omega_{\text{АПО}}\rangle$. Параллельно с алгеброй $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$ рассмотрим алгебру предикатных операций с константами и переменными $\mathfrak{R}_{\text{КП}} = \langle T, \Omega_{\text{КП}}\rangle$, где множество T порождается множеством всех константных и тождественных предикатных операций из R с помощью сигнатуры $\Omega_{\text{КП}}$. Пусть ξ – поднабор набора переменных x, тогда через T_ξ обозначим совокупность предикатных операций, порождаемых множеством всех константных и тождественных предикатных операций из R, у которых переменные, входящие в набор ξ, являются фиктивными, с помощью сигнатуры $\Omega_{\text{КП}}$. Легко показать, что в T_ξ входят предикатные операции со значениями, имеющими переменные из набора ξ в качестве фиктивных.

Пусть $P(x)$ – предикат из M; ξ – поднабор набора переменных x; $\eta = x\backslash\xi$ – дополнение набора ξ до набора x. Согласно теореме 2, предикат P можно представить в виде логической суммы (19). Для фиксированного набора переменных ξ предикат $P(x)$ однозначно определяет предикаты $P_j(\eta)$, $j\in I$, стоящие в правой части разложения (19), по формулам (20). Обратно, система предикатов $\{P_j(\eta)\}_{j\in I}$ однозначно определяет предикат $P(x)$ по формуле (19). Таким образом, между предикатами $P(x)$ и системами предикатов $\{P_j(\eta)\}_{j\in I}$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Отсюда следует, что решение уравнения с неизвестным предикатом P можно заменить решением уравнения с неизвестными предикатами $P_j(\eta)$, $j\in I$, где система предикатов $\{P_j(\eta)\}_{j\in I}$ взаимно однозначным образом соответствует предикату $P(x)$. Покажем, как это можно сделать. Рассмотрим уравнение алгебры $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$ с одним неизвестным

$$F(P) = 1. \tag{22}$$

Предикатная операция F в левой части уравнения (22) в общем случае имеет вид $F(P, A_1, \ldots, A_k)$, где $A_1, \ldots, A_k$ – некоторые фиксированные предикаты. По определению алгебры предикатных операций предикаты $P, A_1, \ldots, A_k$ m-арные, т. е. заданы на множестве U^m (U – предметное пространство). Но они могут иметь некоторые несущественные переменные, которые в их записи мы будем опускать. Предикатная операция $F{:}M^r \to M$ (M – множество всех предикатов, заданных на множестве U^m) в своей записи может содержать различные суперпозиции операций (11)–(15). Обозначая набор переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, уравнение (22) можно переписать следующим образом:

$$\forall x\, F(P(x)) = 1. \tag{23}$$

Отметим, что в правой части равенства (22) стоит тождественно истинный предикат 1, в правой части равенства (23) стоит логическая константа 1 – "истина". Подставляя разложение (19) предиката P в уравнение (23), получим уравнение

$$\forall\eta\, [\forall\xi\, F(\bigvee_{j\in I} \alpha_j(\xi)P_j(\eta))] = 1 \tag{24}$$

для определения предикатов $P_j(\eta)$, $j\in I$. Предикаты $\alpha_j(\xi)$ известны, раскрывая квантор общности по ξ, уравнение (24) можно переписать в следующем виде:

$$\forall\eta\, F^*(P_1(\eta), P_2(\eta), \ldots, P_{|I|}(\eta)) = 1, \tag{25}$$

$$\text{где } F^*(P_1(\eta), P_2(\eta), \ldots, P_{|I|}(\eta)) = \forall\xi\, F(\bigvee_{j\in I} \alpha_j(\xi)P_j(\eta)). \tag{26}$$

Расширим понятие эквивалентности двух уравнений следующим образом. Уравнения (23) и (25) также назовем *эквивалентными*. Если мы найдем общее решение уравнения (23), то тем самым определим общее решение уравнения (25), верно и обратное утверждение. Поэтому такое расширение понятия эквивалентности уравнений логически допустимо.

Теорема 3. *Для любого уравнения* $\forall x\, F(P(x)) = 1$ *алгебры* $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$ *всегда существует эквивалентное ему уравнение* $\forall\eta\, F^*(P_1(\eta), \ldots, P_{|I|}(\eta)) = 1$ *алгебры* $\mathfrak{R}_{\text{КП}\xi}$, *где* ξ *– некоторый поднабор набора переменных* x; $\eta = x\backslash\xi$ *– дополнение набора* ξ *до набора* x. *Связь между предикатом* $P(x)$ *и системой предикатов* $\{P_j(\eta)\}_{j\in I}$ *определяется формулами* (19) *и* (20), *предикатные операции* F *и* F^* *связаны соотношением* (26).

Доказательство. Возьмем в качестве поднабора ξ весь набор переменных x. В этом случае, используя формулы (24–26), получим уравнение $F^*(P_1, P_2 \ldots P_{|I|}) = 1$, которое будет эквивалентно исходному. Но предикаты P_j, $j\in I$ представляют собой предикаты, у которых все переменные являются фиктивными, т. е. $P_j \in \{0, 1\}$, $j\in I$. В этом случае предикатная операция F^* будет принадлежать множеству $T_\xi = T_x$, Таким образом, уравнение $F^*(P_1, P_2 \ldots P_{|I|}) = 1$ является уравнением алгебры $\mathfrak{R}_{\text{КП}\xi} = \langle T_\xi, \Omega_{\text{КП}}\rangle$. Теорема доказана.

Сформулируем правило решения уравнений вида (23) с одним неизвестным алгебры $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$ путем сведения его к уравнению вида (25) алгебры $\mathfrak{R}_{\text{КП}}$. Для того чтобы решить уравнение (23) алгебры $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$, достаточно подобрать такой набор переменных ξ, чтобы предикатная операция F^*, определяемая выражением (26), являлась элементом множества T_ξ. Только в этом случае уравнение (25), эквивалентное уравнению (23), будет уравнением алгебры $\mathfrak{R}_{\text{КП}\xi}$. Установление последнего факта позволит по формуле (9) определить разрешимость уравнения (25), при этом уравнение (23) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение (25). По формуле (10) в случае разрешимости уравнения (25) находим его общее решение, которое будет представлять собой предикатный вектор

$$P_j(\eta) = P_j(C_j(\eta), \ldots, C_{|I|}(\eta)), j\in I. \tag{27}$$

Общее решение уравнения (23) записываем, используя выражение (19):

$$P(x) = \bigvee_{j\in I} \alpha_j(\xi)P_j(C_j(\eta), \ldots, C_{|I|}(\eta)). \tag{28}$$

Введем следующее определение. Набор переменных ξ называется *разрешающим* для уравнения (23), если получаемое с помощью выражений (19) и (26) уравнение (25) является уравнением алгебры $\mathfrak{R}_{\text{КП}\xi}$ (т. е. $F^*\in T_\xi$). Очевидно, что чем меньшую мощность будет иметь разрешающий набор ξ, тем меньше неизвестных будет иметь уравнение (25) (это видно из разложения (19)) и, соответственно, тем меньше вычислений придется делать по формулам (10) для определения общего решения уравнения (25). Более того, можно показать, что в случае, когда для уравнения (23) существует лишь единственный разрешающий набор $\xi = x$, количество вычислений, которые придется сделать по формулам (10) соизмеримо с вычислительной сложностью метода полного перебора. В этом случае разработанный метод никаких вычислительных преимуществ по сравнению с методом полного перебора не имеет.

Каким образом можно определить наименьший по мощности разрешающий набор? Ответа на этот вопрос мы пока не знаем. Мы можем только сформулировать следующее правило формирования разрешающего набора.

Теорема 4. *Пусть предикатная операция F уравнения* (23) *записана на языке алгебры $\mathfrak{R}_{\text{АПО}}$, консервативно не расширенной никакими операциями. Образуем поднабор ξ набора переменных x следующим образом. Переменная x_j, $j = 1, \ldots, n$ включается в набор ξ, если в записи F встречается предикатная операция вида x_j/a, $a \in U$, в область действия которой входит искомый предикат $P(x)$. Тогда набор ξ является разрешающим для уравнения* (23).

Доказательство. Достаточно заметить, что предикатная операция F^*, определяемая выражением (26), не будет содержать операций подстановок предмета на место переменных, действующих на искомые предикаты P_j. Следовательно, выполняется $F^* \in T_\xi$, т. е. уравнение (25) является уравнением алгебры $\mathfrak{R}_{\text{КП}\xi}$. Теорема доказана.

Рассмотрим пример решения уравнения вида (23). Пусть предметное пространство $U = \{a, b\}$. Уравнение, которое требуется решить, имеет вид

$$\forall x, y, z \;\; x/a(y/b\; P(x, y, z) \vee G(x, y, z)) = 1, \tag{29}$$

где P – искомый предикат; G – некоторый известный предикат.

Преобразуем уравнение (29) в уравнение алгебры $\mathfrak{R}_{\text{КП}\xi}$. Вначале определяем разрешающий набор ξ. Согласно теореме 4, $\xi = \{x, y\}$. По формуле (19) раскладываем неизвестный предикат P в логическую сумму:

$$P(x, y, z) = x^a y^a P_1(z) \vee x^a y^b P_2(z) \vee x^b y^a P_3(z) \vee x^b y^b P_4(z). \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29) и раскрывая квантор общности по переменным x и y, входящим в разрешающий набор ξ, получим уравнение для определения предикатов $P_j(z)$, $j = 1, \ldots, 4$:

$$\forall z\; [P_2(z) \vee G(a, a, z) \vee G(a, b, z)] = 1. \tag{31}$$

Как видно, в записи уравнения (31) присутствует только один предикат $P_2(z)$, тем не менее это уравнение от четырех неизвестных предикатов $P_j(z)$, $j = 1, \ldots, 4$. По формуле (9) определяем, что уравнение (31) разрешимо всегда. По формулам (10) выписываем общее решение: $P_1(z) = C_1(z)$, $P_2(z) = C_2(z) \vee \overline{G(a,a,z)G(a,b,z)}$, $P_3(z) = C_3(z)$, $P_4(z) = C_4(z)$, где $C_j(z) \in M$ ($j = 1, \ldots, n$) – свободные предикатные параметры. Подставляя полученные значения в выражение (30), окончательно получим общее решение исходного уравнения в виде

$$P(x, y, z) = x^a y^a C_1(z) \vee x^a y^b [C_2(z) \vee \overline{G(a,a,z)G(a,b,z)}\,] \vee x^b y^a C_3(z) \vee x^b y^b C_4(z). \tag{32}$$

Список литературы: 1. *Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов–Кушнаренко Ю.П.* О фундаментальной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики. 1998. Вып. 49. С. 68-77. 2. *Баталин А.В., Тевяшев А.Д., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О системном анализе информационных процессов // Радиоэлектроника и информатика. 1998. № 3. С. 34-42. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х.: Вища школа, 1984. 142 с. 4. *О решении уравнений алгебры множеств* // "Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке": Тез. докл. 4 междунар. молодежного форума. Харьков: ХТУРЭ. 2000. С. 378-379. 5. *Колесников Д.О.* О решении уравнений с неизвестным множеством // Радиотехника. 1999. Вып. 112. С. 80-82. 6. *Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О прикладной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики. 1998. Вып. 49. С. 78-87. 7. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392с. 8. *Зельдович Я.Б., Мышкис Д.М.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 648 с.

Поступила в редколлегию 14.11.2001