УДК 519.21

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЕГО ФРАГМЕНТОВ

ГЕРАСИН С.Н., ЛОБАС А.Н.

Приводятся условия стабилизации марковских процессов, стабилизация которых достигается путем возмущений отдельных элементов стохастической матрицы процесса, приводящих к локальной фокусировке вероятностей в этих состояниях. Исследуются случаи, в которых стабилизация процесса не может быть достигнута за счет таких возмущений. Определяется достаточное условие, выполнение которого приводит к стабилизации марковского процесса при помощи локальных возмущений для более широкого класса систем фрагментов.

Введение. Проблеме стабилизации распределений марковских процессов по фрагментам посвящено большое число работ [1-4, 6, 7]. В [1] получены условия, которые в совокупности являются достаточными для стабилизации процесса по фрагментам. Эти условия накладывают излишние ограничения на систему фрагментов, в некоторых случаях не позволяя определить, имеет ли место сходимость вектора распределений вероятностей при локальных фокусировках фрагментов. В данной работе рассмотрен контрпример, показывающий, что условия из статьи [1] не являются необходимыми. Также получено необходимое условие фокусировки процесса, которое в совокупности с условиями из [3] образует достаточное условие фокусировки при возмущениях такого рода.

Постановка задачи. Рассмотрим марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний, для которого задана система фрагментов. Предположим, что локальные возмущения его фрагментов удовлетворяют условиям:

а) Любой момент τ_k фокусировки произвольного фрагмента Δ_i (а значит, и возмущение, которое его порождает) не зависит от эволюции процесса до τ_k.
б) Существует последовательность интервалов

$$\{[s_k, s_{k+1})\}_{k=0}^{\infty}, \quad \bigcup_{k=0}^{\infty}[s_k, s_{k+1}) = [s_0, \infty), \qquad (1)$$

такая, что любой фрагмент Δ_i ($i = 1, ..., N$) в моменты $\tau_k \in [s_k, s_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, ...$, фокусирует с вероятностью $p_i(\tau_k)$:

$$0 < p_0 \le p_i(\tau_k) \le p_i < 1 . \qquad (2)$$

в) Всякий фрагмент, подвергаясь очередному возмущению, фокусирует на одно и то же распределение $\vec{\pi}_i$.

Известно [3], что для того, чтобы описанный выше процесс фокусировал распределение вероятностей на финальное распределение, достаточно выполнения еще двух условий: условия согласования и условия существования такой нумерации фрагментов, при которой диагональные элементы $P(s,t)$, принадлежащие разности $\Delta_i \setminus \Delta_{i,\, i+1}$, лежат левее диагональных элементов $P(s,t)$ из разности $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i,\, i+1}$. Эти условия не являются необходимыми для выполнения фокусировки, более того, выполнение второго условия накладывает очень сильные ограничения на систему фрагментов. При достаточно большом количестве фрагментов могут возникать их циклические пересечения, которые не позволяют занумеровать фрагменты указанным выше способом. Тем не менее, фокусировка для этих систем может иметь место. В частности, такие системы фрагментов возникают при рассмотрении задач синтеза стохастических матриц. Их возникновение связано с тем, что одним из условий синтеза является требование существования для любых двух состояний *i* и *j* такого фрагмента с множеством индексов I_r, для которого $i, j \in I_r$, т.е. $\forall\, i, j \in I_\Sigma\ \exists\, r : i, j \in I_r, 1 \le r \le m$.

Обеспечив выполнение этого условия, мы не сможем занумеровать фрагменты указанным выше способом. Следовательно, в данном случае не может быть применено утверждение из [3] о фокусировке процесса.

Рассмотрим систему, для которой требование существования определенной нумерации фрагментов не выполняется. Предположим, что система состоит из 3-х фрагментов: Δ_1, Δ_2 и Δ_3, которые циклически связаны. Каждому фрагменту будет соответствовать множество индексов I_1, I_2, I_3 соответственно. Пусть наша система может находиться в 3-х состояниях, т.е. множество индексов $I = \{1,2,3\}$, а множества, соответствующие фрагментам, равны

$$I_1 = \{1,2\}, \ I_2 = \{2,3\}, \ I_3 = \{1,3\}. \qquad (3)$$

Для данной системы не существует такой нумерации фрагментов, чтобы диагональные элементы $P(s,t)$, принадлежащие разности $\Delta_i \setminus \Delta_{i,\, i+1}$, лежали левее диагональных элементов $P(s,t)$ из разности $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i,\, i+1}$. Как бы мы не нумеровали строки матрицы, мы не сможем получить такую нумерацию.

Для данной конфигурации фрагментов можно привести примеры, когда фокусировка выполняться не будет, что доказывает недостаточность двух оставшихся условий. Но, изменив некоторым образом элементы стохастической матрицы, можно добиться фокусировки, а это показывает, что условие о нумерации фрагментов не является необходимыми.

Например, для фрагментов, которые фокусируют на векторы:

$$\vec{\pi}_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \ \vec{\pi}_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \vec{\pi}_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

фокусировка не выполняется.

А в системе фрагментов, которые фокусируют на векторы

$$\vec{\pi}_1 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \ \vec{\pi}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}, \ \vec{\pi}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

наблюдается стабилизация общего вектора распределения на финальный вектор распределения вероятностей:

$$\vec{\pi}^* = \begin{pmatrix} 2/9 \\ 1/3 \\ 4/9 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Хотя для обоих приведенных примеров выполняется условие согласования, в одном случае наблюдалась фокусировка, а в другом – нет. Выясним, почему так происходит. Для этого введем дополнительное условие вместо условия о нумерации фрагментов, которое бы являлось в совокупности с условием о согласовании необходимым и достаточным для фокусировки. Будем рассматривать процессы, которые удовлетворяют (1), (2) и условию согласования. Обозначим через $S^*_{i,j}$ сумму элементов в векторе $\vec{\pi}_{ij}$, а через $S^*_{j,i}$ – сумму в векторе $\vec{\pi}_{j,i}$.

Построим граф G, вершины которого соответствуют фрагментам Δ_i (рис. 1). Между i и j вершиной проведем ребро в том случае и только в том, когда $\Delta_{ij} \neq \varnothing$, где $\Delta_{ij} = \Delta_i \cap \Delta_j$.

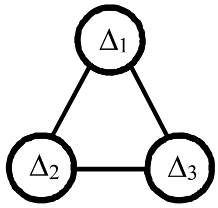

Рис. 1. Граф взаимодействия фрагментов

Утверждение 1. Если построенный указанным выше способом граф G не содержит циклов, то для данной системы фрагментов выполняется фокусировка, т.е. $\vec{\pi}^*_n \to \vec{\pi}^*$ ($n \to \infty$).

Данное утверждение верно потому, что в графе без циклов мы всегда сможем занумеровать фрагменты таким способом, что диагональные элементы $P(s,t)$, принадлежащие разности $\Delta_i \setminus \Delta_{i,\,i+1}$, будут лежать левее диагональных элементов $P(s,t)$ из разности $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i,\,i+1}$.

Если граф G содержит циклы, то выделим в нем дерево G^*, содержащее все вершины графа G. Дуги графа, не принадлежащие дереву, будем называть хордами, которые образуют множество G^-. Для каждой дуги графа G произвольным способом выберем ее направление. И каждой дуге k графа G, идущей из вершины Δ_i в Δ_j, поставим в соответствие число $\mu_k = \frac{S^*_{i,j}}{S^*_{j,i}}$, где $S^*_{i,j}$ – сумма элементов вектора $\vec{\pi}_{i,j}$, а $S^*_{j,i}$ – сумма элементов вектора $\vec{\pi}_{j,i}$.

Построим для графа G и дерева G^* цикломатическую матрицу B [5] (рис. 2). Каждой строке этой матрицы соответствует хорда, а каждый столбец – ребру графа G. При добавлении в граф i-й хорды возникает цикл. Выберем элементы матрицы B так, чтобы они удовлетворяли следующим условиям. Если при обходе этого цикла по направлению, совпадающему с направлением хорды, j-е ребро проходится вдоль направления, то $b_{i,j} = 1$. Если против направления, то $b_{i,j} = -1$, иначе, если ребро не принадлежит образовавшемуся циклу, то $b_{i,j} = 0$.

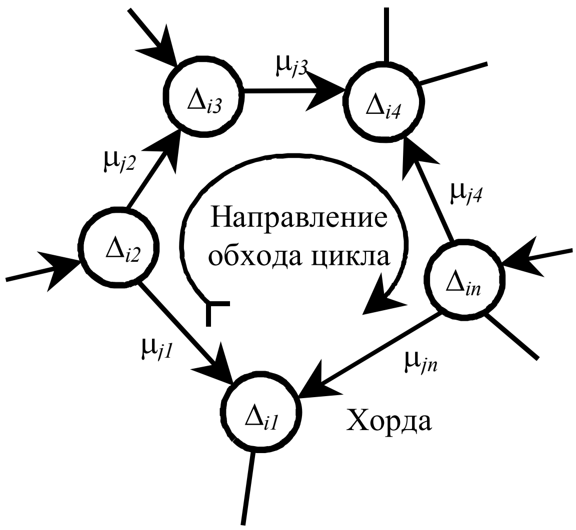

Рис. 2. Цикл графа взаимодействия фрагментов

Утверждение 2. Для того чтобы система фрагментов, которой соответствует граф G, фокусировала на распределение $\vec{\pi}^*$, необходимо, чтобы для любой хорды r выполнялось следующее условие:

$$\forall r \in (1,\ldots,M) : \sum_{i=1}^{N} b_{r,i} \cdot \log \mu_i = 0, \qquad (7)$$

где M – количество хорд; N – количество ребер в графе G.

Более того, при замене условия о нумерации фрагментов условием (7) доказательство достаточности совокупности условий для фокусировки по фрагментам остается верным.

Фрагменты систем, граф G которых не содержит циклов, всегда можно занумеровать так, чтобы диагональные элементы $P(s,t)$, принадлежащие разности $\Delta_i \setminus \Delta_{i,\,i+1}$, лежали левее диагональных элементов $P(s,t)$ из разности $\Delta_{i+1} \setminus \Delta_{i,\,i+1}$. В случае отсутствия хорд (граф без циклов) условие (7) отбрасывается и остается только требование о согласовании векторов $\vec{\pi}_{i,j}$ и $\vec{\pi}_{j,i}$.

Доказательство утверждения 2. Для системы фрагментов, граф которой содержит циклы, предположим обратное, а именно, что существует цикл, для которого выражение, стоящее в левой части равенства (7), отлично от нуля:

$$\exists r \in (1,...,M) : \sum_{i=1}^{N} b_{i,j} \cdot \log \mu_i = \log(1+C) \neq 0 . \quad (8)$$

Но, тем не менее, система фрагментов фокусирует распределение вероятностей на финальное распределение $\vec{\pi}^*$. Обозначим номера фрагментов, соответствующих вершинам в этом цикле, через i_1, i_2, i_3, ..., i_n. А индексы ребер – через j_1, j_2, j_3, ..., j_n. (Нумерация производится в порядке обхода цикла в направлении, совпадающем с направлением хорды, порождающей этот цикл). Из условий, приведенных в работах [1,3], следует, что вероятность того, что цепочка $\{\Delta_{i_1}, \Delta_{i_2}, ..., \Delta_{i_{n-1}}, \Delta_{i_n}\}$ сфокусирует бесконечное количество раз на интервале $[0, +\infty)$, равна 1. Покажем, что всякий раз, когда фрагменты фокусируют в такой последовательности, будут возникать отклонения в сумме некоторых элементов вектора распределения на константу C, отличную от нуля.

Обозначим через $S_{i,j}(t_k)$ сумму элементов в векторе распределения вероятностей, соответствующих пересечению i и j фрагментов в момент времени t_k. Так как по предположению распределение сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k : \forall l \in N, \left| S_{i,j}(t_k) - S_{i,j}(t_{k+1}) \right| < \varepsilon . \quad (9)$$

Допустим, в момент времени t_k возмущение получит первый фрагмент цепочки Δ_{i_1}, в момент t_{k+1} – Δ_{i_2}, и так далее. Момент времени t_k достаточно большой, что для заданного ε верно:

$$\forall l \in N : S_{i,j}(t_k) - \varepsilon < S_{i,j} S_{i,j}(t_{k+1}) < S_{i,j}(t_k) + \varepsilon . (10)$$

Будем считать, что

$$S_{i_1,i_n}(t_k) = w > 0 , \quad (11)$$

если это не так, то мы всегда сможем перенумеровать фрагменты таким образом, чтобы выполнялось это неравенство.

Тогда будут верны следующие равенства:

$$S^*_{i_1,i_n} \cdot S_{i_1,i_2}(t_k) = S^*_{i_1,i_2} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) ,$$
$$S^*_{i_2,i_1} \cdot S_{i_2,i_3}(t_{k+1}) = S^*_{i_2,i_3} \cdot S_{i_2,i_1}(t_{k+1}) , (12)$$
$$S^*_{i_n,i_{n-1}} \cdot S_{i_n,i_1}(t_{k+n}) = S^*_{i_n,i_1} \cdot S_{i_n,i_{n-1}}(t_{k+n}) .$$

Используя выражение $\mu_k = \dfrac{S^*_{i,j}}{S^*_{j,i}}$ из (12), получаем:

$$S_{i_1,i_2}(t_k) = (\mu_{j_1})^{b_{r,j_1}} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) ,$$
$$S_{i_2,i_3}(t_{k+1}) = (\mu_{j_2})^{b_{r,j_2}} \cdot S_{i_2,i_1}(t_{k+1}) , \quad (13)$$
$$S_{i_n,i_1}(t_{k+n}) = (\mu_{j_n})^{b_{r,j_n}} \cdot S_{i_n,i_{n-1}}(t_{k+n}) ,$$

где $b_{r,j}$ – элемент цикломатической матрицы, соответствующий хорде r и ребру j. Из неравенства (10) и системы равенств (13) следует:

$$(\mu_{j_n})^{b_{r,j_n}} \cdot (....(\mu_{j_2})^{b_{r,j_2}} \cdot ((\mu_{j_1})^{b_{r,j_1}} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) - \varepsilon)... - \varepsilon) <$$
$$< S_{i_1,i_n}(t_{k+n}),$$

$$S_{i_1,i_n}(t_{k+n}) <$$
$$< (\mu_{j_n})^{b_{r,j_n}} \cdot (....(\mu_{j_2})^{b_{r,j_2}} \cdot ((\mu_{j_1})^{b_{r,j_1}} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) + \varepsilon)... + \varepsilon) \quad (14)$$

или

$$\prod_{p=1}^{n} (\mu_{j_p})^{b_{r,j_p}} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) - \varepsilon \cdot M < S_{i_1,i_n}(t_{k+n}) <$$
$$< \prod_{p=1}^{n} (\mu_{j_p})^{b_{r,j_p}} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) + \varepsilon \cdot M . \quad (15)$$

Это неравенство может быть верно для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ только в том случае, если

$$\prod_{p=1}^{n} (\mu_{j_p})^{b_{r,j_p}} \cdot S_{i_1,i_n}(t_k) = S_{i_1,i_n}(t_{k+n}) ,$$

$$\prod_{p=1}^{n} (\mu_{j_p})^{b_{r,j_p}} - 1 = \frac{S_{i_1,i_n}(t_{k+n}) - S_{i_1,i_n}(t_k)}{S_{i_1,i_n}(t_k)} .$$

Воспользуемся предположением (8) и неравенством (10), получим

$$|C| \leq \left| S_{i_1,i_n}(t_{k+n}) - S_{i_1,i_n}(t_k) \right| , \quad (16)$$

где C – константа, отличная от нуля. Следовательно, стабилизация процесса не может иметь место, так как сумма некоторых элементов вектора распределения с вероятностью 1 в некоторые моменты времени будет изменяться на константу C.

Заменив требование о нумерации фрагментов условием (7), мы получили достаточное условие для фокусировки системы по ее фрагментам, которому удовлетворяет более широкий класс систем. Это следует из того, что для любой системы, удовлетворяющей условию о нумерации фрагментов, соответствующий граф G не содержит циклов, а для таких графов условие (7) всегда выполняется. Таким образом, из выполнения условия о нумерации фрагментов следует выполнение условия (7). Обратное утверждение не верно.

Выводы. Из предыдущих работ, посвященных стабилизации распределений марковских процессов по фрагментам, известны достаточные условия стабилизации систем. Однако при рассмотрении задач синтеза стохастических матриц по системе фрагментов часто возникают системы, содержащие циклические пересечения фрагментов, в которых невозможно занумеровать фрагменты указанным в этих условиях способом. Существующие достаточные условия не могут быть применены к таким системам, хотя фокусировка для них может иметь место.

В этой статье получено достаточное условие стабилизации, которое расширяет существующие условия на более широкий класс систем фрагментов и позволяет сделать вывод о сходимости процесса для систем, имеющих циклические пересечения фрагментов.

Литература: 1. *Дикарев В.А.* Локальные возмущения и фокусировка распределений марковских процессов // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №4(9). С.37-39. **2.** *Дикарев В.А.* Стабилизация распределений марковского процесса при возмущениях его континуальных компонент // Дев'ята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Киев, 16–19 мая 2002). С.424. **3.** *Дикарев В.А., Герасин С.Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его параметров // Доповіді НАН України. 2000. №8. С.90-93. **4.** *Кириченко Л.О., Сидоров М.В., Стороженко А.В.* Влияние хаотических возмущений на эргодичность неоднородных марковских процессов // АСУ и приборы автоматики. 2002. Вып. 121. С.102-105. **5.** *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с. **6.** *Родзинский А.А.* Стабилизация распределений процессов, возникающих при случайных блужданиях // Радиоэлектроника и информатика. 1999. № 1(6). С.43-45. **7.** *Dikarev V.A.* Stabilization of distributions of markov process with continual set of states in case of local perturbances of its components // Международная конференция, посвященная 90-летию академика Б.В. Гнеденко. 2002. С.218.

Поступила в редколлегию 17.01.2003

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Герасин Сергей Николаевич канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения, теория процессов Маркова. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина 14, e-mail: sgerasin@mail.ru, тел: (0572) 40-93-72 (раб.), (057)772-12-38 (дом.).

Лобас Александр Николаевич аспирант кафедры высшей математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория массового обслуживания, теория вероятностей и ее приложения. Адрес: Украина, 61172, Харьков, ул. Грицевца, 24-14, e-mail: alexanderlobas@ukr.net, тел: (0572) 99-59-37 (дом.).

УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ РЕФЛЕКТОМЕТРИИ

МИРОШНИЧЕНКО А.В.

Предлагается подход, состоящий в том, что степень пористости порошковой массы определяется методом рефлектометрии.

1. Актуальность исследования

В последние десятилетия пористые материалы все более широко примененяются во многих областях техники. Их используют, в частности, в химической и фармакологической промышленности и на производствах, связанных с обогатительными процессами. Пористые порошковые материалы применяют также в гидравлических и тормозных устройствах [1].

Пористость представляет собой одну из важнейших характеристик порошковых материалов. Добавка пористых частиц в жидкости, которые используют в этих устройствах, улучшает качество их работы. Многие полезные с точки зрения их применения свойства порошков зависят от степени их пористости. В этой статье предложен подход, позволяющий определить степень пористости порошковой массы по результатам рефлектометрии. Этот подход состоит в пропускании через исследуемый материал серии импульсов, являющихся на входе единичными скачками. На выходе эти скачки из-за пористости порошковой массы выглаживаются. Анализ данных измерений проводится с использованием методов дисперсионного анализа.

2. Постановка задачи

Рассмотри задачу определения степени пористости порошковых материалов посредством метода рефлектометрии. Степень пористости является важной характеристикой порошков [2].

Пористостью называют долю общего объёма порошка, приходящегося на поры. Таким образом, пористость может быть вычислена по формуле

$$m = \frac{V_n}{V_{об}}.$$

Здесь V_n – объем пор; $V_{об}$ – общий объём, занимаемый порошком.

3. Сущность проблемы

Для определения некоторых характеристик порошковых материалов предложен подход, основанный на зондировании порошковых тел электрическими импульсами. Как показали проведенные измерения и их статистическая обработка, наличие пор в частицах порошка вызывает трансформацию формы фронтов импульсов, распространяющихся в порошковой массе. Фронт импульса, в начальный момент времени представляющий собой скачок (который может быть описан единичной функцией), при движении в порошковой массе, заключённой в круговой цилиндр, трансформируется (выглаживается). По степени размытия фронта импульса можно судить о степени пористости порошковой массы. Для изучения этого явления к исследуемой порошковой массе, заключённой в цилиндр, добавляют металлический порошок, который равномерно распределён среди частиц порошка, подвергающегося зондированию электрическими импульсами. Такая добавка обеспечивает проводимость