

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. И. Коржов, В. В. Шервашидзе

Киев

В работе [1] показано, что переходные и установившиеся процессы в релейных системах описываются уравнением

$$L\{Z(t)\} = W(p)L\{\Phi[f(t) - Z(t)]\}, \quad (1)$$

где $f(t)$ — внешнее воздействие;

Φ — характеристика релейного элемента;

$Z(t)$ — выходная величина системы.

Согласно [1], для вычисления $Z(t)$, т. е. для построения переходного процесса, необходимо предварительно определить временную характеристику линейной части системы и моменты переключения

t'_k и t_k .

t'_k — момент входа в зону нечувствительности;

t_k — момент выхода из зоны нечувствительности.

Вычисление $h(t)$ производится любым способом. Определение моментов переключения t_k и t'_k согласно [1]*, производится только графическим путем. Графическое определение t_k и t'_k при стремлении достаточно точно построить переходный процесс релейной системы требует большого числа вычислений.

Рассмотрим аналитическое построение переходного процесса для устойчивой релейной системы при внешнем воздействии типа единичного скачка (т. е. $f(t) = \text{const}$) при протекании переходного процесса. Такое воздействие широко применяется, когда хотят судить о качестве системы по переходному процессу. К такому же случаю можно отнести переходные процессы в релейных системах при медленно изменяющемся внешнем воздействии.

Исследуем релейную систему, структурная схема которой приведена на рис. 1,

где $F(p)$ — внешнее воздействие;

РЭ — релейный элемент системы;

$Z(p)$ — выходная величина системы;

$X(p)$ — управляющий сигнал;

$Y(p)$ — управляющее воздействие.

В такой структурной схеме может быть приведена любая релейная система автоматического регулирования (САР).

Релейный элемент обладает зоной нечувствительности и гистерезисом. Выражение для $Z(t)$ в общем случае

* Я. З. Цыпкин. Теория релейных систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1955.

$$Z(t) = K_p \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [h(t-t_k) - h(t-t'_{k+1})] + (-1)^n h(t-t_n) \right\} \quad (2)$$

$t_n < t < t'_{n+1}$

$$Z(t) = K_p \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k [h(t-t_k) - h(t-t'_{k+1})] \right\} \quad (3)$$

$t'_{n+1} < t < t_{n+1}$

где K_p — коэффициент усиления релейного элемента;

$h(t)$ — временная характеристика;

t'_k и t_k — моменты переключения.

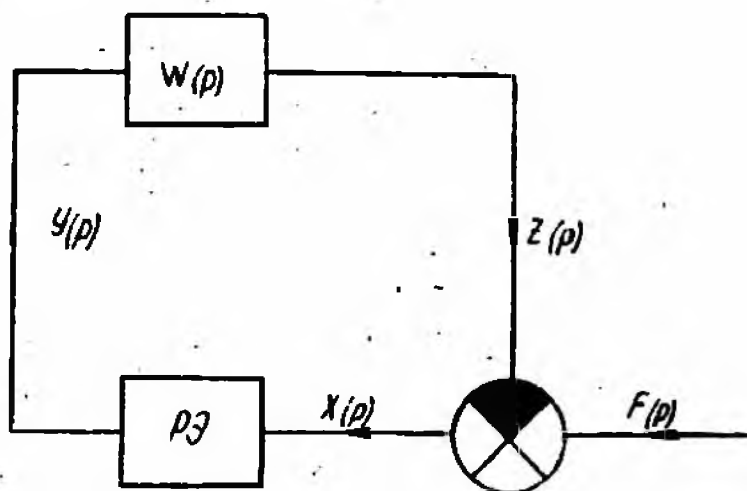


Рис. 1

Выражение (2) определяет переходный процесс в интервале существования управляющего воздействия, а выражение (3) — в интервале отсутствия управляющего воздействия.

Для построения переходного процесса в общем случае при воздействии единичного скачка $f(t)$ изобразим $Z(t)$ на рис. 2, где приведена временная характеристика $K_p h(t)$ и в том же масштабе 4 кривые: кривая 1 $f(t) + \chi_0$, кривая 2 $f(t) - \chi_0$, кривая 3 $f(t) + \lambda \chi_0$, кривая 4 $f(t) - \lambda \chi_0$.

χ_0 — зона нечувствительности релейного элемента;

λ — коэффициент возврата релейного элемента.

Согласно (1) и (2) *, устойчивая релейная система имеет временную характеристику следующего вида:

$$h(t) = C_{00} + C_{01}t + \sum_{v=1}^{n-1} C_{0v} e^{P_v t}, \quad (4)$$

где

$$C_{00} = \frac{d}{dp} \left[\frac{P(p)P}{Q(p)} \right]_{p=0}; \quad C_{01} = \frac{P(0)}{Q'(0)}.$$

Момент переключения t'_1 является решением уравнения

$$K_p(C_{00} + C_{01}t'_1 + \sum_{v=1}^{n-1} C_{0v} e^{P_v t'_1}) = f(t'_1) - \lambda \chi_0. \quad (5)$$

* [2] В. В. Шервашидзе и В. И. Коржов. «К вопросу об устойчивости положения равновесия релейных систем автоматического регулирования», стр. 123 настоящего сборника.

Это уравнение не имеет точного решения; решается оно любым приближенным методом. Покажем, что, определяя одним из приближенных методов t'_k можно аналитически установить последующие моменты пе-

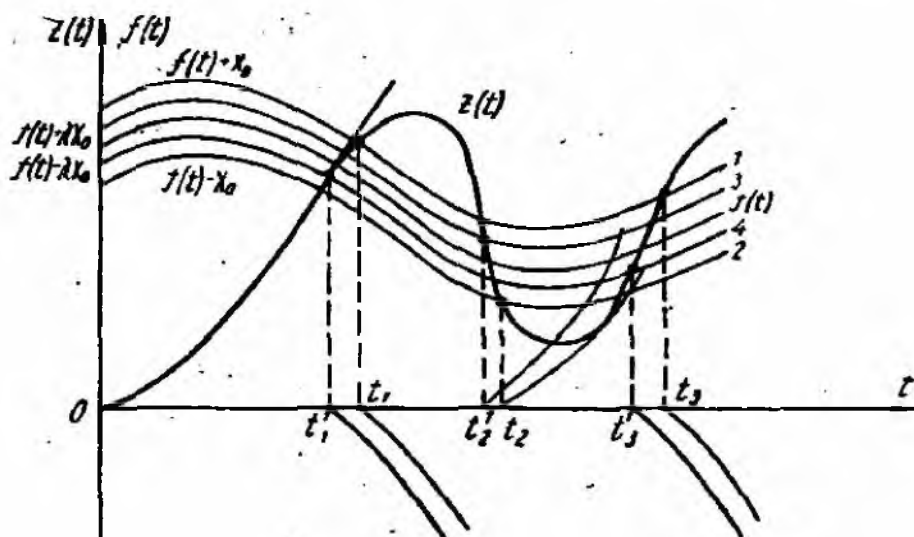


Рис. 2.

реключения t_k , амплитуды колебаний A_m и конечный выбег в зоне нечувствительности при окончании переходного процесса A_n . По этим основным точкам можно судить о переходном процессе релейной САР. Если требуется определить поведение релейной САР в промежуточных точках, то, зная моменты переключения t_k и t'_k можно с требуемой точностью квантовать промежутки времени и, подставляя их в выражение (2) или (3), определить значение $Z(t)$.

Аналитическое определение момента переключения t_{n+1} (момент переключения в интервале отсутствия управляющего воздействия)

Преобразуем выражение (4), заменив $e^{-t} = \frac{1}{e^t} = Y$;

$$h(t) = C_{v0} + C_{01}t + \sum_{v=1}^{n-1} C_v Y^{P_v}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), получим поведение релейной САР в зоне нечувствительности (от точки t'_1 до точки t_1 на рис. 2).

$$Z(t) = K_p \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k [C_{01}(t'_k - t_k) + \sum_{v=1}^{n-1} C_v Y^{P_v} - \sum_{v=1}^{n-1} C_v e^{-P_v t_k} Y^{P_v}] \right\} \quad (7)$$

при $(t'_{n+1} > t < t_{n+1})$.

Момент выхода системы из зоны нечувствительности (точки t_1 ; t_2 ; t_3 на рис. 2) можно определить из равенства (8) при $t = t'_k$

$$K_p \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k [C_{01}(t'_{k+1} - t_k) + \sum_{v=1}^{n-1} C_v Y^{P_v} - \sum_{v=1}^{n-1} C_v e^{P_v t_k} Y^{P_v}] \right\} = f(t_{n+1}) + \tau(Z_0)(-1)^n. \quad (8)$$

Произведя преобразование относительно Y^P , получим

$$K_p \left\{ \left[\sum_{v=1}^{n-1} Y^P \cdot C_v (1 - e^{P \cdot t'_k}) \right] \sum_{k=0}^n (-1)^k \right\} = f(t_{n+1}) + (-1)^n \chi_0 - \\ - K_p \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{01} (t'_{k+1} - t_k) \right]. \quad (9)$$

Перепишем (9) в виде

$$K_p \left\{ \left[\sum_{v=1}^{n-1} Y^P \cdot C_v (1 - e^{P \cdot t'_k}) \right] \sum_{k=0}^n (-1)^k \right\} - C_k = 0, \quad (10)$$

где

$$C_k = f(t_{n+1}) + (-1)^n \chi_0 - K_p \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{01} (t'_{k+1} - t_k) \right]. \quad (11)$$

Выражение (10) есть гиперболическое уравнение, степень которого определяется значением большого из $n-1$ корней характеристического уравнения линейной части по абсолютной величине. Решение этого уравнения и дает момент переключения t_{n+1} .

Рассмотрев выражение (10), видим, что для выполнения условия невыхода системы из зоны нечувствительности после k -го переключения его нужно записать в следующем виде:

$$K_p \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{01} (t'_{k+1} - t_k) \right] \leq f(t_{n+1}) + (-1)^n \chi_0. \quad (12)$$

Последнее мы сделали на основании правила Декарта: правила определения числа положительных корней показательного уравнения, при условии знака постоянства C_{01} .

Определение момента переключения t'_{n+1} (момент переключения в интервале существования управляющего воздействия)

Подставляя равенство (6) в (2), получим выражение движения линейной САР в интервале существования управляющего воздействия (на рис. 2 интервалы времени $t_1 - t'_2$; $t_2 - t'_3$ и т. д.).

$$Z(t) = K_p \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[C_{01} (t'_{k+1} - t_k) + \sum_{v=1}^{n-1} C_v Y^P - \sum_{v=1}^{n-1} C_v e^{P \cdot t'_k} Y^P \right] + \right. \\ \left. + (-1)^n (C_{00} + C_{01} t'_{n+1} - C_{01} t_n + \sum_{v=1}^{n-1} C_v e^{P \cdot t'_n} Y^P) \right\} \quad (13) \\ \text{при } t_k < t < t'_{n+1}.$$

Момент входа системы в зону нечувствительности можно определить из следующего равенства при $t = t'_k$.

$$Z(t'_{n+1}) - [f(t'_{n+1}) + (-1)^n(x_0 - \lambda x_0)] = 0. \quad (14)$$

Решая это уравнение, находим момент входа. Следует отметить, что уравнение решается только приближенно любым из приближенных методов.

Определение амплитуды колебаний релейной САР при протекании переходного процесса

В момент максимального отклонения $Z(t)$ от входной величины $f(t)$, согласно (1), релейная САР имеет скорость движения, равную 0.

Возьмем производную от выражения (2) и приравняем ее к нулю.

$$Z'(t_{\max}) = K_p \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k [h'(t_{\max} - t_k) - h'(t_{\max} - t_{k+1})] + (-1)^n h'(t_{\max} - t_n) \right\} = 0. \quad (15)$$

Это уравнение решается аналогично уравнению (10). Определив время $t_{\max}$ максимального отклонения от входного сигнала и подставив его в выражение (2), получим величину этого отклонения $x_{\max}$.

Определение величины выбега устойчивой релейной системы в зоне нечувствительности

Подставив в уравнение (3) уравнение (4), вычтя $f(t_n)$ и устремив t к ∞ получим величину выбега релейной САР в зоне нечувствительности A_n

$$A_n = K_p \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k [C_{n+1} t'_{k+1} - C_{n+1} t_k] \right\} - f(t_n) + (-1)^n x_0 \quad (16)$$

при

$$t'_{n+1} < t < t_{n+1}.$$

Пример. Построим переходный процесс релейной САР, у которой передаточная функция линейной части

$$W(p)_{л.ч} = \frac{50}{(0,5p+1)p} = \frac{100}{(p+2)p}. \quad (17)$$

Релейный элемент имеет зону нечувствительности $x_{01} + x_{02} = 20 \text{ мин}$ (причем $(x_{01}) = (x_{02}) = 10 \text{ мин}$ и коэффициент возврата $\lambda = 1$; коэффициент передачи релейного элемента $K_p = 1$). Величина рассогласования $f_n(t) = 100 \text{ мин}$.

1. Определим временную характеристику системы $h(t)$.

$$h(t) = \left[L^{-1} \left[W(p)_{л.ч} \frac{1}{p} \right] \right] = L^{-1} \left[\frac{100}{(p+2)p^2} \right], \quad (18)$$

или

$$h(t) = C_{n0} + C_{01}t + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n0} e^{P_i t} = -25 + 50t + 25e^{-2t} \quad (19)$$

2. Зная величину рассогласования $f_n(t) = 100 \sim \text{мин.}$ определим t'_1 из формулы (14), подставляя (19) при $k=1$,

$$h(t'_1) = -25 + 50t'_1 + 25e^{-2t'_1} = 90 \sim \text{мин.} \quad (20)$$

или

$$50t'_1 + 25e^{-2t'_1} - 115 = 0. \quad (21)$$

Решим это уравнение приближенно, т. е. не учитывая члена $25e^{-2t'_1}$, а затем приближенный результат уточним по методу Ньютона.

$$t'_{1\text{прибл}} = 2,3; t'_{1\text{уточн}} = 2,27.$$

3. Определим момент переключения t_1 из формулы (10) подставляя (19) при $k=1$,

$$50t'_1 + 25e^{-2t_1}(1 - e^{2t'_1}) - 110 = 0.$$

Подставляя $t'_1 = 2,27 \text{ сек.}$ получим $t_1 = 3,20 \text{ сек.}$

4. Определим момент переключения t'_2 из формулы (14), подставляя выражения (19) при $k=2$,

$$+25 + 50t'_1 - 50t'_2 + 50t_1 + 25e^{-2t'_2}(1 - e^{2t'_1} - e^{2t_1}) - 110 = 0.$$

5. Подставляя значения $t'_1 = 2,27$ и $t_1 = 3,20$ и решая аналогично (21), получим $t'_2 = 3,60$.

Определим момент переключения t_2 из формулы (10), подставляя (19), и при $k=2$ получим

$$50t'_1 - 50t'_2 + 50t_1 + 25e^{2t_2}(1 - e^{2t'_1} - e^{2t_1} + e^{2t'_2}) - 90 = 0.$$

Подставляя $t'_1 = 2,27$; $t_1 = 3,20$ и $t'_2 = 3,60$, получим $3 + 20000e^{-2t_2} = 0$.

Это уравнение не имеет действительных решений, следовательно, после переключения t'_2 система не выйдет из зоны нечувствительности.

6. Определим выбег системы A_k в зоне нечувствительности.

По формуле (16) получим

$$A_k = \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k [50t'_{k+1} - 50t_k] \right\} - (100 + (-1)^n \chi_0).$$

В интервале времени $t'_{n+1} < t < t_{n+1}$, подставляя числовые значения, получим $A_k = 3 \sim \text{мин.}$ где $n=1$.

7. Определим момент времени $t_{\max_1}$.

Рассматриваемая система имеет одно перерегулирование и, следовательно, $t_1 < t_{\max_1} < t'_2$.

Подставим в (15) выражение для $n(t)$; получим

$$-50 - 50e^{2t_{\max_1}}(1 - e^{2t'_1} - e^{2t_1}) = 0.$$

Подставляя $t'_1 = 2,27$; $t_1 = 3,20$ в (22) и решая его, получим $t_{\max_1} = 3,35$. Подставив $t_{\max_1} = 3,35$ в (2) и вычитая $f_n(t)$, получим величину перерегулирования данной системы $X_{\max_1}$.

$$X_{\max_1} = 25 + 50t'_1 - 50t_{\max_1} + 50t_1 + 25e^{-2t_{\max_1}}(1 - e^{2t'_1} - e^{2t_1}) - t_n(t).$$

Решение этого уравнения дает величину перерегулирования $x_{\max_1} = 12,7 \sim \text{мин.}$

Упрощенный график переходного процесса показан на рис. 3.

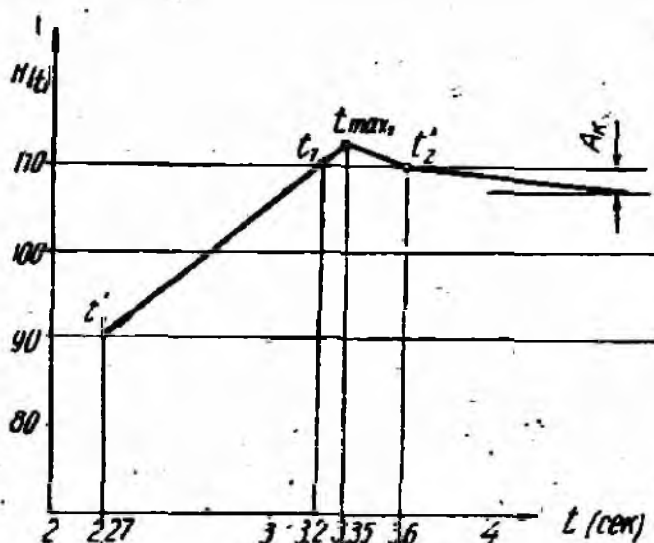


Рис. 3.

При построении переходных процессов релейных САР можно применить предлагаемый аналитический способ определения моментов переключений t_k , величины выбега релейной САР в зоне нечувствительности A_k и величины перерегулирований $x_{\max_k}$.