УДК 719.21

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКОТОРЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

АГАПОВА И.С.

Рассматривается технологический процесс, который разбивается на несколько самостоятельных операций. Каждая такая операция исследуется как неоднородный марковский процесс с конечным числом состояний. Используются условия стабилизации неоднородных марковских процессов применительно к технологическим процессам в горном деле.

Рассмотрим некоторый технологический процесс, состоящий из определенного числа операций. Простой какой-либо операции на интервале $[s_0, t_0]$ происходит в случае, когда на этом интервале имеет место один из факторов простоя, характерных для этой операции. Представим работу каждой операции с помощью графа. Каждому состоянию – вершине графа – поставим в соответствие набор нулей и единиц такой, что 0 на *k*-м месте в этом наборе означает, что процесс простаивает из-за наличия *k*-го фактора. Тогда переход из состояния *i* в состояние *j* системы осуществляется за счет появления (с интенсивностью ν_k) или устранения (с интенсивностью μ_k) *k*-го фактора простоя.

Например, переход из состояния (111011) в состояние (101011) происходит с интенсивностью ν_5, если возникает пятый фактор простоя. При этом для каждой конкретной технологической операции имеет смысл учитывать только те переходы, появление которых на практике наиболее вероятно. В этом случае значительно уменьшается количество состояний системы и, соответственно, снижается размерность и разреженность инфинитезимальной матрицы процесса. Известно также, что по имеющемуся графу можно записать систему дифференциальных уравнений, решая которую находим вектор стационарного распределения.

Будем описывать функционирование рассматриваемого технологического процесса с помощью случайного процесса $\xi(t), t \ge 0$ с пространством значений $Z = \{0;1\}$. Здесь $\xi(t) = 1(0)$, если в момент времени *m* технологический процесс функционирует нормально (простаивает).

Пусть $\xi_i(t) = 1(0)$, если в момент времени *t* *i*-я технологическая операция функционирует (не функционирует), $i = 1,...,n$. Технологическая операция функционирует, если и только если выполняется ряд условий, каждое из которых описывается случайным процессом $\xi_{ij}(t)$, $j = 1,...m_i$, $i = 1,...,n$, где m_i – число факторов простоя, характерных для *i*-операции; *n* - количество операций, из которых состоит рассматриваемый технологический процесс. Таким образом, $\xi(t) = 1$, если и только если $\prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{m_i} \xi_{ij}(t) = 1.$

Наша цель – вычислить $P\{\xi(t) = 1\} = p(t), t \ge 0$, т.е. вероятность нормального функционирования процесса.

Обозначим $\vec{\xi_i}(t) = (\xi_{i1}(t), \xi_{i2}(t), ..., \xi_{im_i}(t))$ и примем, что случайные процессы $\vec{\xi_i}(t), (i = 1,...,n)$ независимы в совокупности. Тогда

$$p(t) = \prod_{i=1}^{n} P\left\{\prod_{j=1}^{m_i} (\xi_{ij}(t) = 1)\right\}. \qquad (1)$$

Обработка наблюдений показывает [4], что периоды пребывания $\xi_{ij}(t)$ в состоянии 1(0) имеют экспоненциальное распределение со средними значениями $1 \backslash \nu_k (1 \backslash \mu_k)$. Следовательно, процесс $\xi_{ij}(t)$ является марковским с матрицей интенсивностей перехода Λ. Элементы λ_{ij} матрицы Λ определяются с помощью графа переходов между состояниями соответствующей операции.

Таким образом, если $\xi_{ij}(t)$ – марковский процесс с конечным пространством состояний X и матрицей интенсивностей перехода $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j \in X}$, а $P\{\xi_{ij}(t) = k\} = p_k(t)$, $\sum\limits_{k \in X} p_k(t) = 1, t \ge 0$, то стохастический вектор-строка $\vec{p}(t) = (p_k(t), k \in X)$ удовлетворяет системе прямых дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{p}(t)\Lambda \qquad (2)$$

с начальным условием $\vec{p}(0)$. Марковский процесс независимо от начального распределения имеет стационарное распределение:

$$\vec{p} = \lim_{t \to \infty} p(t), \vec{p} \ge 0, \qquad (3)$$

которое удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений

$$\vec{p}\Lambda = \vec{0},\ \sum_{k \in X} p_k(t) = 1. \qquad (4)$$

Вероятность p_k имеет смысл доли времени пребывания процесса в состоянии $k,\ k \in X$ на интервале $[s_0, t_0]$ при $t_0 \to \infty$ и независимо от состояния процесса в момент s_0.

В отличие от результатов, полученных в [4], предположим, что рассматриваемый процесс — неоднородный марковский процесс с конечным числом состояний и непрерывным временем, который описывается его инфинитезимальной матрицей $\Lambda(t)$. Предположим, что матрица $\Lambda(t)$ непрерывна в некоторой левой полуокрестности Ω точки t_0 и существует такой ее столбец j_0, что все его элементы удовлетворяют условию

$$\left| \int_{s_0}^{t_0} \lambda_{ij_0}(s)ds \right| = \infty, s_0 \in \Omega. .$$

В нашем случае — это первые столбцы инфинитезимальных матриц $\Lambda_i(t)$, элементы которых $\mu_i(t)$ быстро возрастают на временном интервале $[s_0, t_0]$.

Изучим явление фокусировки (см. [3]) для отдельных операций технологического процесса. Пусть существует такая последовательность попарно непересекающихся интервалов

$$\{[s_k, t_k]\}_{k=1}^{\infty}, s_k \le t_k \le s_{k=1}, s_k \to t_0, t_0 \le \infty,$$

и такая последовательность индексов $j_k, k = 1,2,...$ (j_k нумерует состояния), для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_i \left| \int_{s_k}^{t_k} \lambda_{ij_k}(s)ds \right| = \infty\ , \qquad (5)$$

причем на множестве $[s_0, t_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [s_k, t_k)$ норма матрицы $\Lambda(t)$ ограничена одной и той же константой.

Пусть, далее, $\Lambda(t)$ непрерывна на $[s_k, t_k)$ и существует предел

$$\lim_{t \to t_0} \vec{p}(\tau_k) = \vec{p}, \qquad (6)$$

где $\tau_k \in [s_k, t_k)$, $\vec{p}(\tau_k)$ — нулевой собственный вектор матрицы $\Lambda^T(t)$. Тогда для любого j и любого начального распределения вероятностей, заданного в точке $s \in [s_0, t_0)$,

$$\lim_{t \to t_0} p_j(s_0, t_0) = p_j\ , \qquad (7)$$

здесь p_j — j-я компонента вектора $\vec{p}$ из (6).

Построив соответствующую матрицу $\Lambda(t)$ и решив систему дифференциальных уравнений Колмогорова (4) для неоднородного процесса, составленных по имеющемуся графу, найдем стационарные вероятности $p_k, k \in X$.

Если ряд (5) сходится, но его сумма достаточно велика, то t_0 является точкой σ-фокусировки [2].

Рассмотрим функционирование описанной выше модели на примере некоторых технологических процессов в горном деле. Например, процесс отделения горной массы от массива и погрузочно-транспортных операций состоит из следующих этапов [4]:

1) отделение горной массы от массива (ОГ);
2) погрузка горной массы (ПГ);
3) транспортировка горной массы (ТГ).

При выполнении этих операций важное значение имеет влияние случайных воздействий.

Для того чтобы описать математическую модель функционирования операции ОГ, нужно отметить следующую особенность. Простой операции ОГ в интервале $[s_0, t_0]$ происходит в случае, если на этом интервале имеет место один или несколько из следующих факторов:

1) неисправность комбайна;
2) ожидание крепления;
3) ожидание технического персонала (слесарей);
4) неисправность вентилятора;
5) отсутствие электроэнергии;
6) простой по вине персонала.

Необходимо отметить, что при описании математической модели учитываются только такие их совместные сочетания, появление которых на практике наиболее вероятно.

Таким образом, функционирование операции ОГ описывается марковским процессом $\xi_1(t) = (\xi_{11}(t), \xi_{12}(t), ..., \xi_{16}(t))$ над пространством X_1 из 20 вместо 64 состояний:

X_1 ={(111111), (111110), (111101), (111011), (110111), (101111), (011111), (111100), (110110), (111001), (110101), (101101), (110011), (101011), (011011), (010111), (001111), (101110), (011110), (011101)}.

Здесь 0 на i-м месте вектора $k \in X_1$ означает, что процесс $\xi_1(t)$ простаивает из-за наличия i-го фактора, $i = 1,...,6$. Граф переходов процесса $\xi_1(t)$ изображен на рис. 1.

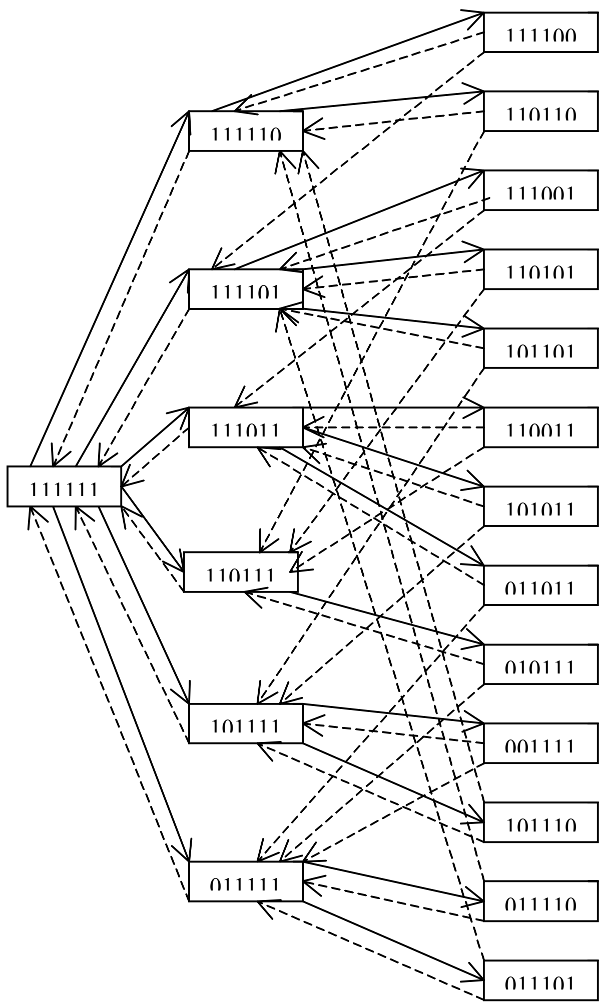

Рис. 1. Граф состояний операции ОГ

Инфинитезимальная матрица определенного таким способом процесса сильно разрежена, поэтому для ее записи будем использовать сокращенную форму. Например, запись $\left[\frac{1}{1-t}\right]_{5,1}$ означает, что плотность перехода из состояния 5 в состояние 1 за один шаг равна $\frac{1}{1-t}$. Не выписанные элементы матрицы равны нулю. Например, первая строка инфинитезимальной матрицы размерности 20х20 для операции ОГ будет иметь вид:

$$[-\sum_{i=1}^{6}\lambda_i]_{1,1},[\lambda_1]_{1,2},[\lambda_2]_{1,3},[\lambda_3]_{1,4},[\lambda_4]_{1,5},[\lambda_5]_{1,6},[\lambda_6]_{1,7}.$$

Аналогичным образом записываются остальные строки.

Построив соответствующую матрицу $\Lambda_1(t)$ и решив систему уравнений (4), найдем стационарные вероятности $p_k^{(1)}, k \in X_1$.

Опишем математическую модель операции ПГ. Здесь простой происходит в случае, если имеет место один или несколько из следующих факторов:

1) неисправность конвейера;
2) неисправность перегрузчика;
3) ожидание разбивки кусков;
4) отсутствие электроэнергии;
5) простой по вине персонала.

Функционирование данной операции описывается неоднородным марковским процессом $\xi_2(t) = (\xi_{21}(t), \xi_{22}(t), ..., \xi_{25}(t))$ над пространством X_2 из 16 вместо 32 состояний:

X_2 = {(11111), (11110), (11101), (11011), (10111), (01111), (11100), (11010), (11001), (10101), (10011), (01011), (00111), (10110), (01110), (01101)}.

С помощью графа переходов процесса $\xi_2(t)$, изображенного на рис. 2, строится матрица $\Lambda_2(t)$, а затем из системы уравнений (4) находятся стационарные вероятности $p_k^{(2)}, k \in X_2$.

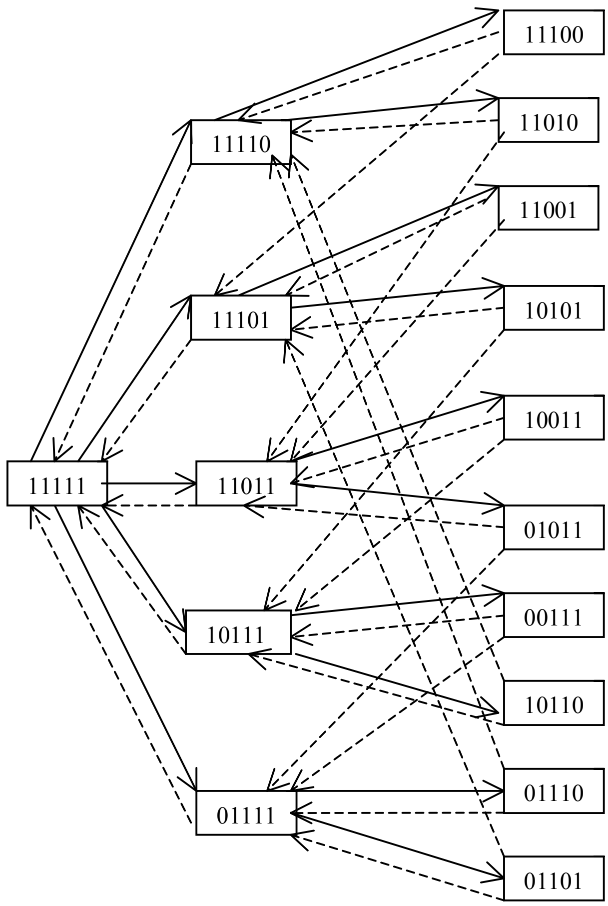

Рис. 2. Граф состояний операции ПГ

Простой операции ТГ происходит в случае, если имеет место один или несколько из следующих факторов:

1) ожидание электровоза;
2) отсутствие порожняка;
3) оборудование погрузочного пункта;
4) отсутствие электроэнергии;
5) простой по вине персонала.

Функционирование операции ТГ описывается неоднородным марковским процессом $\xi_3(t) = (\xi_{31}(t), \xi_{32}(t), ..., \xi_{35}(t))$ над пространством X_3 из 16 вместо 32 состояний:

X_3 = {(11111), (11110), (11101), (11011), (10111), (01111), (11100), (11010), (11001), (10101), (10011), (01011), (00111), (10110), (01110), (01101)}.

Граф переходов между состояниями процесса $\xi_3(t)$, приведенный на рис. 3, позволяет построить матрицу $\Lambda_3(t)$ и с помощью системы уравнений (4) найти стационарные вероятности $p_k^{(3)}, k \in X_3$.

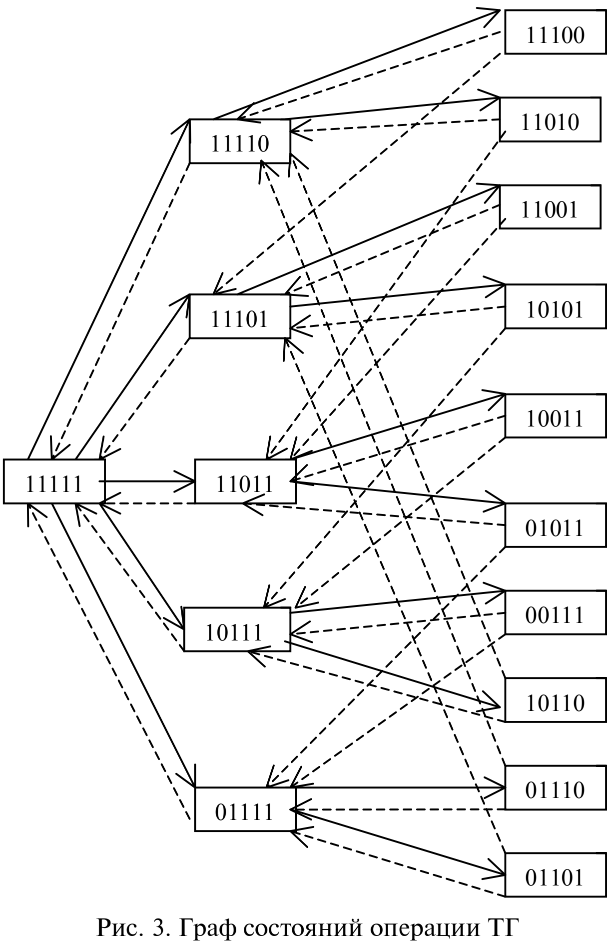

Рис. 3. Граф состояний операции ТГ

Исходными данными для численного анализа являются: средние времена $t_{отк}$ наработки до первого отказа и средние времена $t_в$ восстановления. Тогда $\nu_i = 1/t_{отк}$ – интенсивность возникновения i-го фактора простоя, $i = 1,...,m_i$; $\mu_i(t_в)$ – интенсивность устранения i-го фактора простоя, $i = 1,...,m_i$, где m_i – число факторов простоя, характерных для i-операции.

Таким образом, технологический процесс $\xi(t)$ функционирует нормально, если все составляющие его операции не простаивают.

Рассмотренная в статье задача использует теорию неоднородных марковских процессов для анализа различных технологических процессов на примере горного дела. Выполненная в работе формализация расширяет возможности применения математического аппарата для изучения и последующего повышения эффективности сложных многофакторных технологических процессов.

Литература: 1. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989. 320с. 2. *Дикарев В.А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков: ХТУРЭ, 1995. 11с.–Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95 №526-Ук95. 3. *Дикарев В.А.* Фокусировка распределений марковских процессов // Доп. НАН України. 1999. №11. С. 100-103. 4. *Ананьин Г.П., Башарин Г.П., Верма Р.К., Гупта С.* Анализ вероятностных характеристик некоторых технологических процессов в горном деле // Системы массового обслуживания и информатика: Сб. научн. трудов / Под ред. Г.П.Баршина, И.Л.Толмачева. М.: Изд-во УДН, 1987. 160с.

Поступила в редколлегию 13.04.2001

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Агапова Ирина Степановна, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и математическая статистика. Адрес: Украина, 61093, Харьков, пер. Кульбицкий, 22, кв. 2, тел. (0572) 40-39-13.

УДК 519.71

ЛОГИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

ТУМАНОВА А.В.

Приводится математическое описание модели материальных потоков, построенной на основе методов динамического моделирования. Представляется также краткое аналитическое описание результатов, полученных с помощью описанной модели. Однако эти результаты не совсем полные, поскольку получены без учета финансовых ограничений, которые относятся к модели финансовых потоков.

Рассмотрим модель предприятия, функционирующего на рынке ограниченной емкости в условиях конкуренции между предприятиями, выпускающими одинаковый или аналогичный товар. В такой ситуации производитель не может точно определить количество товара, который будет продан за будущий плановый период.

Зная тенденцию изменения спроса на данном рынке и основываясь на статистике спроса за предыдущие периоды функционирования и маркетинговых исследованиях, производитель может с определенной степенью точности оценивать или прогнозировать эту величину. Однако учитывая то, что действия конкурентов ему неизвестны, реальное значение этой величины не может быть вычислено точно.