

## СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОЙ ТРОПОСФЕРЕ

### Введение

Для оценки текущих условий распространения УКВ, т.е. краткосрочного прогноза коэффициента ослабления сигнала вблизи радиогоризонта в зоне прямой видимости и в области геометрической тени, необходимы данные о пространственном распределении диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  на трассе распространения радиоволн. В ряде случаев, в частности при распространении радиоволн над морской поверхностью, предполагается, что распределение  $\varepsilon(h)$  зависит только от высоты  $h$  над поверхностью Земли. При этом влияние мелкомасштабных флуктуаций коэффициента преломления на эффективное значение интенсивности поля за радиогоризонтом не учитывается [1, 2]. В работе [3] для приближенной оценки поля УКВ вблизи границы геометрической тени по экспериментально измеренному высотному профилю  $\varepsilon(h)$  в средней части трассы последовательно применяются метод геометрической оптики (МГО) и метод Кирхгофа. Результаты расчета поля этим методом для длин волн  $\lambda = 30\text{ см}$  [3 – 6] показали, что на оценки уровня поля сильно влияет структура поля  $\varepsilon(\mathbf{r})$  в области, непосредственно примыкающей к земной поверхности. Поле диэлектрической проницаемости воздуха в этой части пространства подвержено существенным суточным и сезонным изменениям и в большинстве случаев сильно отличается от общепринятой модели Колмогорова – Обухова для зоны свободной конвекции.

Оценки корреляционных функций электромагнитного поля в точке наблюдения, находящейся вблизи поверхности Земли, выполненные в экспериментальных работах [7, 8], указывают на нестационарность атмосферных процессов и неоднозначность результатов измерений, полученных при разном времени усреднения данных. В этом случае можно рассматривать пространственное распределение  $\varepsilon(\mathbf{r})$  как неоднородное поле со статистически однородными первыми приращениями.

В данной работе путем математического моделирования исследуются структурные функции поля диэлектрической проницаемости воздуха с учетом статистической неоднородности и характерной для приземного слоя атмосферы слоистой структуры.

### Структурные функции поля и их спектральные разложения

Для описания статистических свойств действительных случайных процессов и случайных полей со стационарными первыми приращениями используют структурные функции [9]. По определению, структурная функция  $D$  поля  $f(\mathbf{r})$ , среднее значение которого  $\langle f(\mathbf{r}) \rangle$  постоянно, вычисляется следующим образом:

$$D_f(\rho) = \langle [f(\mathbf{r} + \rho) - f(\mathbf{r})]^2 \rangle,$$

где  $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  – радиус-векторы точек в неоднородной среде, а знак  $\langle \rangle$  обозначает статистическое усреднение.

Для статистически изотропной атмосферы, в соответствии с законом «двух третей» Колмогорова – Обухова, структурная функция пространственных флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  в инерционном интервале турбулентности описывается выражением [9]:

$$D_\varepsilon(r) \approx C_\varepsilon^2 r^{2/3}, \quad L_0 > r > l_0, \quad (1)$$

где  $C_\varepsilon^2$  – структурная постоянная,  $L_0$  и  $l_0$  – соответственно внешний и внутренний масштабы турбулентности.

Трехмерная спектральная плотность, соответствующая структурной функции (1), может быть записана в следующей форме:

$$\Phi_{\varepsilon}(k) \approx 0,033C_{\varepsilon}^2(k^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad (2)$$

где  $k$  – волновое число, а параметр  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$  введен для устранения неопределенности при  $k = 0$ .

Анизотропное однородное поле  $\varepsilon(\mathbf{r})$  в простейшем случае можно характеризовать корреляционной функцией вида

$$R(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = R[\alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) + \gamma(z_1 - z_2)]. \quad (3)$$

Тогда спектральная плотность  $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k})$ , соответствующая (3), зависит от направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ :

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k}) = 0,033C_{\varepsilon}^2(\kappa_0^2 + a_x k_x^2 + a_y k_y^2 + a_z k_z^2)^{-11/6}, \quad (4)$$

причем значения постоянных  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  определяют соотношения между характерными масштабами неоднородностей в направлениях координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Если поле  $\varepsilon(\mathbf{r})$  статистически неоднородно, то описание его с помощью корреляционной функции (3) оказывается неоднозначным. Однако выражение (4) можно рассматривать как спектральную плотность анизотропного поля. В этом случае трехмерная структурная функция  $D(\mathbf{r})$  связана с  $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k})$  следующим образом [9]:

$$D(\mathbf{r}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \int [1 - \cos \mathbf{k}\mathbf{r}] \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k}) d^3 k.$$

Для математического моделирования в данной работе используется спектральная плотность  $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k})$  в следующей форме:

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k}) = 0,033C_{\varepsilon}^2 \left[ \kappa_0^2 + a(k_x^2 + k_z^2) + k_y^2 \left( 1 + \frac{b}{1 + c \cdot k_y^2} \right) \right]^{-11/6}, \quad (5)$$

где постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  выбираются так, чтобы учесть различие характерных размеров неоднородностей в горизонтальной ( $xoy$ ) и вертикальной ( $yoz$ ) плоскостях.

В выражении (5) учтена гипотеза Колмогорова, состоящая в том, что в области малых масштабов (т.е. при больших волновых числах  $k$ ) флуктуации  $\varepsilon$  статистически изотропны. Действительно, с ростом  $k_y$  выражение в круглых скобках стремится к единице, а  $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k})$  приближается к выражению (2), в котором спектральная плотность зависит только от модуля волнового вектора. При  $|\mathbf{k}| \sim 1$  вертикальная составляющая волнового вектора  $k_y$  входит с весом порядка  $(1 + b/c)$ , где  $b/c \gg 1$ . В области малых волновых чисел горизонтальные размеры неоднородностей в среднем значительно превышают вертикальные, но характер убывания спектральной плотности (6) во всех направлениях соответствует структурной функции вида (1).

### Математическое моделирование и результаты расчетов

Отличие внешнего  $L_0$  и внутреннего  $l_0$  масштабов турбулентности в инерционном интервале очень велико, и по данным экспериментальных измерений отношение  $L_0/l_0$  имеет порядок  $10^3 \dots 10^4$  [9]. Поэтому для достаточной детализации выборочных функций  $\varepsilon(\mathbf{r})$  при описании их числовыми последовательностями и расчетах структурных функций

$D_{\varepsilon}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  целесообразно перейти от трехмерной модели структуры  $\varepsilon(\mathbf{r})$  и ее трехмерного спектрального представления (5) к двумерной спектральной плотности  $F(k_y, k_z, x_1 - x_2)$ .

Локально изотропное поле  $\varepsilon(x, y, z)$  и его структурная функция могут быть разложены в двумерный интеграл Фурье в плоскости  $x = const$  [9]:

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(x, 0, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{j(k_y y + k_z z)} - 1 \right] u(dk_y, dk_z, x),$$

где  $u(dk_y, dk_z, x)$  удовлетворяет соотношению

$$\langle u(dk_y, dk_z, x) u^*(dk'_y, dk'_z, x') \rangle = \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z) F(k_y, k_z, x - x') dk_y, dk_z, dk'_y, dk'_z. \quad (6)$$

В выражении (6)  $F(k_y, k_z, x - x')$  – двумерная спектральная плотность, которая связана со структурной функцией  $D_{\varepsilon}(\eta, \zeta, 0)$  в плоскости  $\xi = x - x' = 0$  соотношением

$$D_{\varepsilon}(\eta, \zeta, 0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(k_y \eta + k_z \zeta)] F(k_y, k_z, 0) dk_y, dk_z, \quad (7)$$

где  $\eta = y - y'$ ,  $\zeta = z - z'$ ,  $\xi = x - x'$ , штрихи обозначают координаты точек на плоскости  $x' = const$ , а  $\xi$  – расстояние между параллельными плоскостями  $x = const$  и  $x' = const$ .

В случае статистически изотропного поля двумерная и трехмерная спектральные плотности взаимосвязаны:  $F(k_y, k_z, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k_x \xi) \Phi(k) dk_x$ .

Если поле диэлектрической проницаемости анизотропно, то для его описания с помощью двумерной спектральной плотности (энергетического спектра)  $F(k_y, k_z, \xi)$  нужны дополнительные данные. В нашем случае, в соответствии с (5), дополнительная информация заключается в предположении, что в горизонтальной плоскости  $y = const$  поле статистически изотропно. Тогда корреляционная функция  $R(\xi, \eta, \zeta)$  в плоскости  $y = const$  существует (если нет особенности в нуле) и зависит только от расстояния  $\rho = (\xi^2 + \zeta^2)^{1/2}$ , т.е.  $R(\xi, \eta, \zeta) = R(\eta, \rho)$ .

Трехмерная спектральная плотность (5) принимает конечные значения при  $k \rightarrow 0$  и убывает с ростом  $k$  быстрее  $k^{-3}$ . Поэтому можно вычислить трехмерную корреляционную функцию

$$R(x - x', y - y', z - z') = R(\xi, \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \cos \mathbf{k} \mathbf{r} \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{k}) d^3 k,$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты вектора  $\mathbf{r}$ .

Полагая  $\xi = 0$  и выполняя преобразование Фурье от  $R(0, \eta, \zeta)$ , получим двумерную спектральную плотность флуктуаций в плоскости ( $yoz$ ):

$$F(k_y, k_z, 0) = \text{Re} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int R(0, \eta, \zeta) e^{j(k_y \eta + k_z \zeta)} d\eta d\zeta. \quad (8)$$

Двумерная структурная функция  $D_{\varepsilon}(\eta, \zeta, 0)$  связана с  $F(k_y, k_z, 0)$  соотношением (7).

В ходе математического моделирования формировались выборочные функции (реализации) случайного поля  $\varepsilon(y, z)$ , спектральная плотность которых в среднем соответствовала модели (5). Для этого программно генерировалась двумерная последовательность  $h_i(y, z)$  нормально распределенных случайных чисел с нулевым средним значением и равномерной средней спектральной плотностью. Затем применялась весовая обработка спектра.

Пусть  $G_i(k_y, k_z)$  – комплексное преобразование Фурье случайной числовой последовательности  $h_i(y, z)$ . Тогда модель выборочной функции  $\varepsilon_i(y, z)$  вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon_i(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_i(k_y, k_z) [f(k_y, k_z)]^{\frac{1}{2}} e^{j(k_y y + k_z z)} dk_y dk_z,$$

где  $f(k_y, k_z) = F(k_y, k_z, 0) / F(0, 0, 0)$  – весовая функция.

Спектральная плотность реализации  $\varepsilon_i(y, z)$

$$F_i(k_y, k_z, 0) = C \cdot G_i(k_y, k_z) \cdot G_i^*(k_y, k_z) \cdot f(k_y, k_z),$$

где  $C$  – постоянная, а знак  $*$  обозначает комплексно сопряженную величину.

Усредняя последнее равенство по ансамблю выборочных функций, получим

$$\langle F_i(k_y, k_z, 0) \rangle = C \cdot f(k_y, k_z) \cdot \langle G_i(k_y, k_z) \cdot G_i^*(k_y, k_z) \rangle = f(k_y, k_z) \cdot const.$$

Таким образом, среднее значение двумерной спектральной плотности с точностью до постоянного множителя совпадает с заданной весовой функцией. Иными словами, каждая выборочная функция  $\varepsilon_i(y, z)$  принадлежит случайному полю с заданной спектральной плотностью  $F(k_y, k_z, 0)$ . Характерный вид весовых функций  $f(k_y, k_z)$  для изотропной (а) и анизотропной (б) сред показан на рис. 1, а, б.

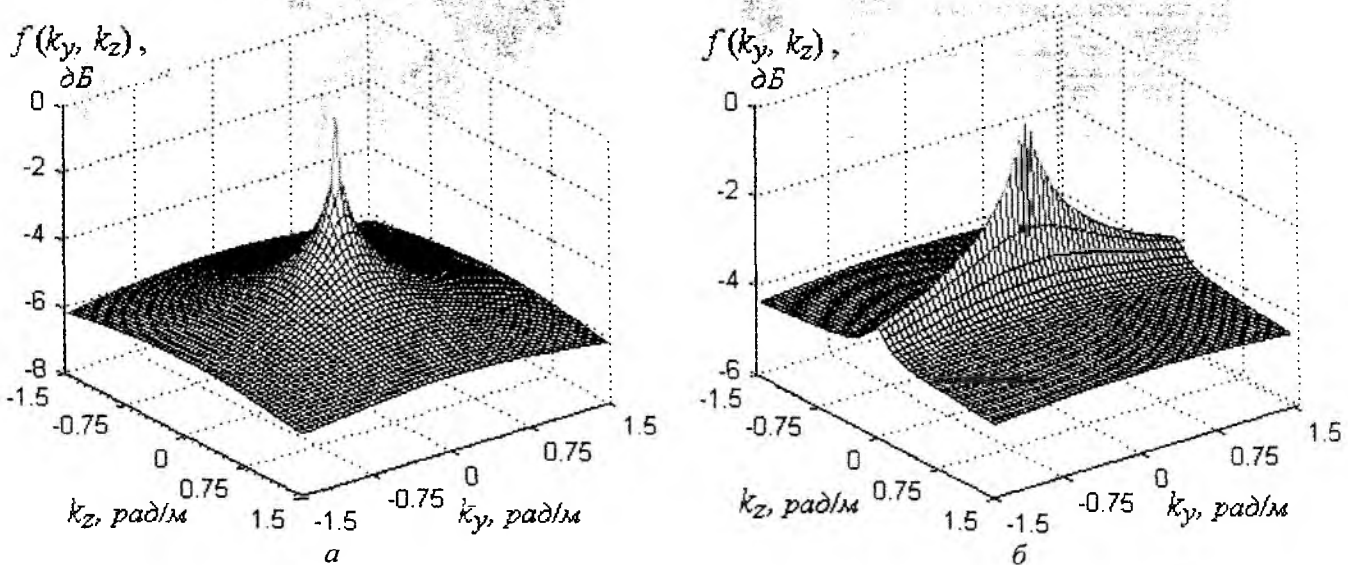


Рис.1

На рис.2 а, б, в приведены фрагменты выборочных функций  $\varepsilon_i(y, z)$ , вычисленных при разных значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  в выражении (5). Шаг дискретизации переменных  $y$  и  $z$  составляет  $0,125m$ . Размерность числового массива  $1024 \times 1024$ . Ось  $y$  ориентирована перпендикулярно земной поверхности. На рис.2, г показан фрагмент изотропной и статистически однородной среды  $\varepsilon(y, z)$ , спектральная плотность которой соответствует выражению (2).

Двумерная структурная функция  $D(\eta, \zeta, 0)$ , рассчитанная для одной из выборочных функций  $\varepsilon_i(y, z)$ , приведена на рис.3, а. На рис. 3, б та же структурная функция изображена в другом масштабе.

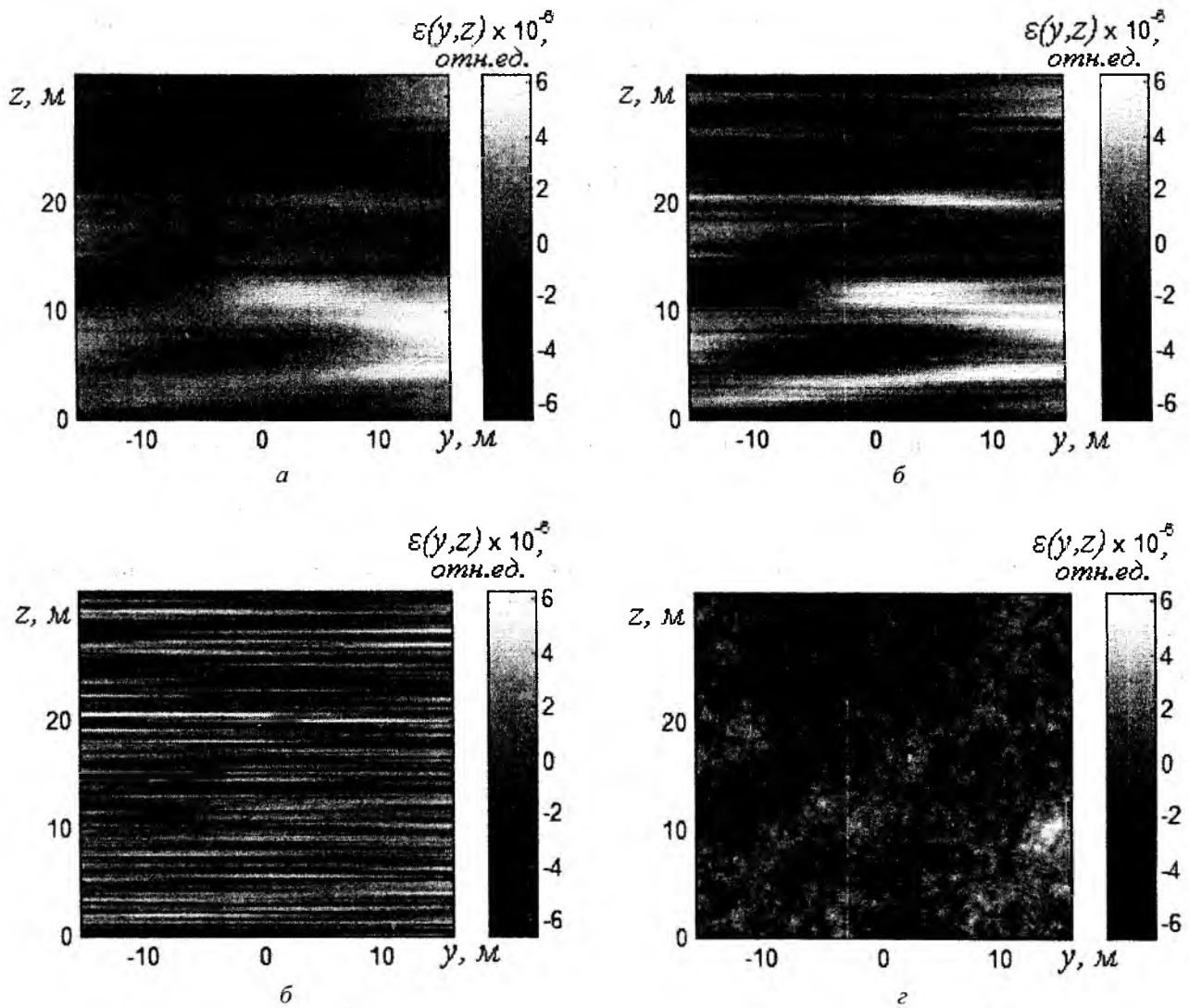


Рис.2

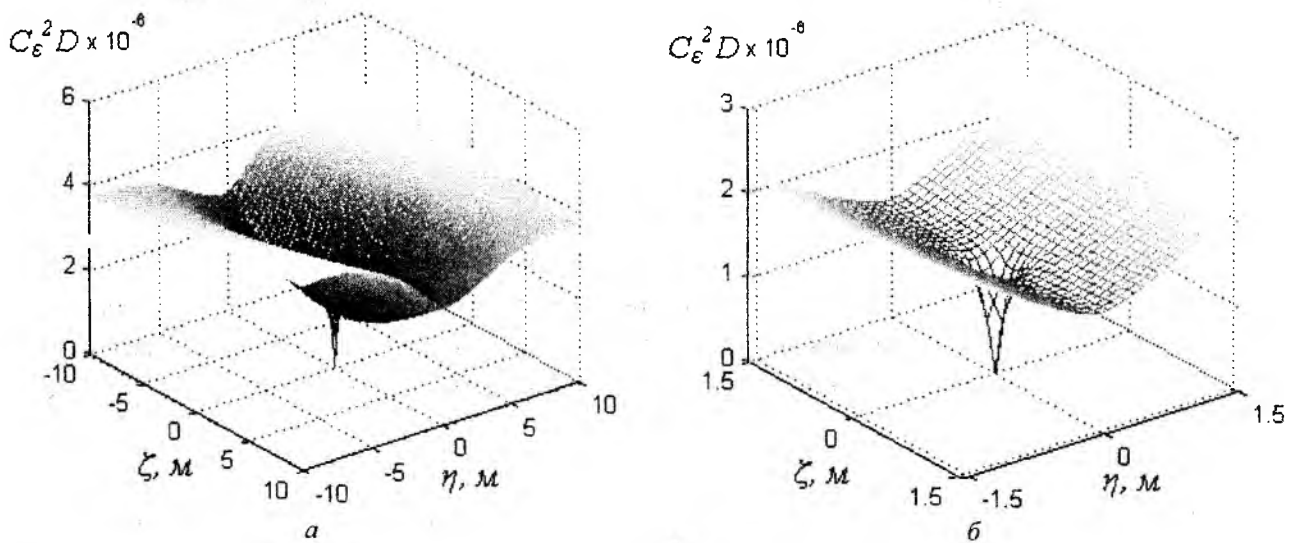


Рис.3

Значения двумерной структурной функции  $D(\eta, \zeta)$  в горизонтальном направлении при  $\eta = 0$  и в вертикальном при  $\zeta = 0$  приведены на рис. 4, а и 4, б соответственно. На рис. 4, в, з те же структурные функции изображены при малых значениях  $|\eta|$  и  $|\zeta|$ . Сплошной жирной линией на всех графиках обозначена структурная функция статистически однородной тропосферы. Штриховой, пунктирной и сплошной линией показаны  $D(\eta, \zeta)$ , рассчитанные для выборочных функций  $\varepsilon_i(y, z)$ , полученных при разных значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  в выражении (5).

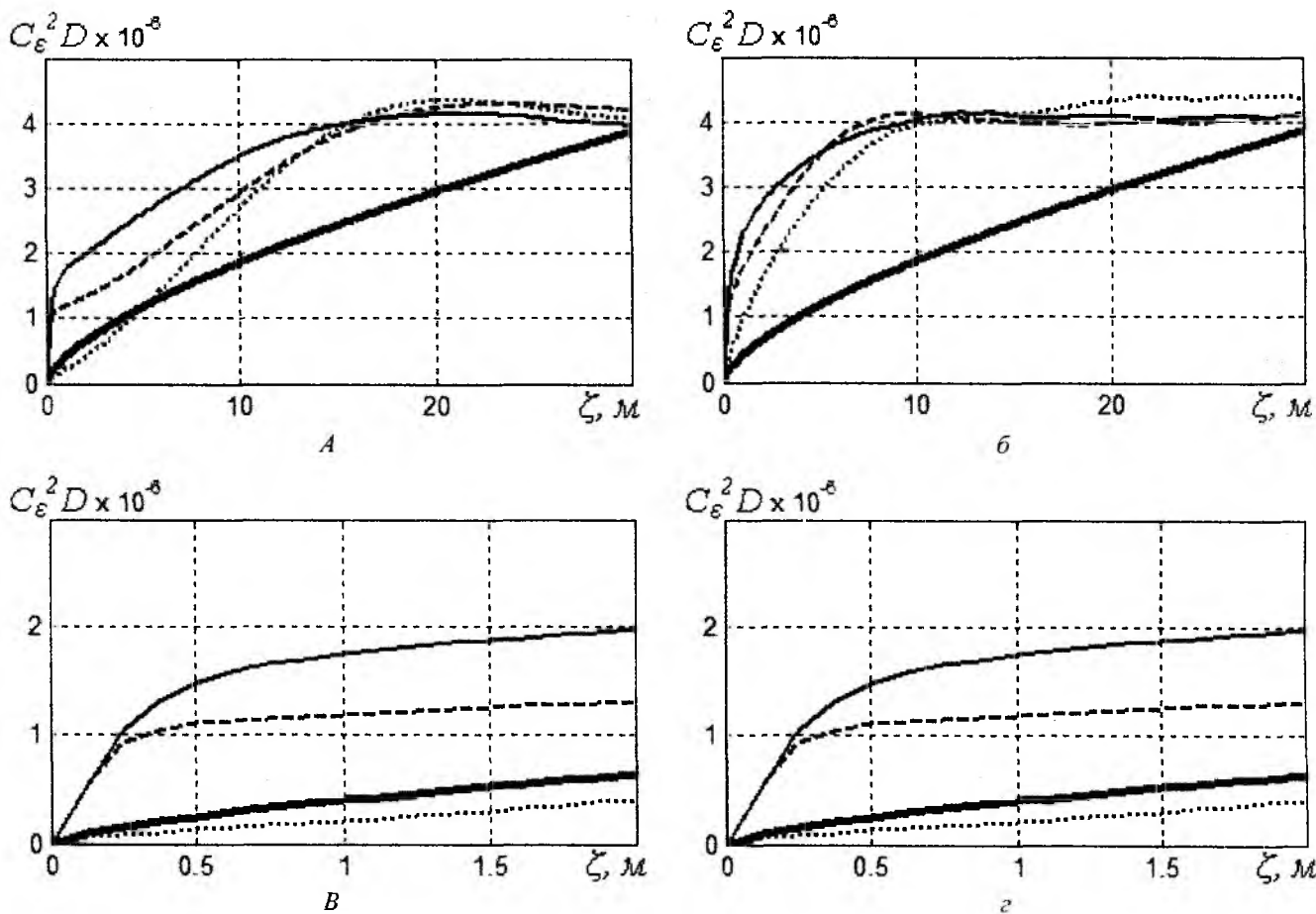


Рис.4

Из рис.4 видно, что существует две области локальной однородности, в пределах которых можно определить интегральные масштабы неоднородностей и радиусы корреляции  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  поля  $\varepsilon(\mathbf{r})$ . В одной области  $\rho_1 \sim 20$  м, в другой –  $\rho_2 \sim 0,3$  м. Радиус корреляции  $\rho_1$  соизмерим с внешним масштабом неоднородностей  $L_0$ ,  $\rho_2$  соответствует изотропным мелкомасштабным флуктуациям  $\varepsilon$ . Таким образом, если слой тропосферы, в котором распространяется пучок радиоволн, ограничен высотой  $H$  над земной поверхностью, то можно выделить, по крайней мере, две области локальной однородности поля  $\varepsilon(\mathbf{r})$ , и в каждой из них вычислить корреляционную функцию. Двумерная корреляционная функция флуктуаций поля оказывается многомасштабной. В области крупномасштабных флуктуаций характерный масштаб соизмерим с внешним масштабом турбулентности, для которого справедлива оценка  $L_0 \approx 0,4 H$  [9]. В области малых масштабов радиус корреляции  $\rho$  и дисперсия флуктуаций зависят от конкретной метеорологической обстановки, но  $\rho \ll L_0$ .

Расчет коэффициента ослабления поля на коротких загоризонтных трассах с применением МГО и метода Кирхгофа [4] предусматривает учет только регулярного распределения

$\varepsilon(h)$ . В дециметровом диапазоне влиянием турбулентных флуктуаций  $\varepsilon$ , как показывает сравнение с экспериментальными данными, можно пренебречь, а при расчете амплитуды эквивалентных источников ограничиться «нулевым» приближением. Амплитуда  $E_Q(y, z)$  в работе [4] рассчитывалась по интерференционным формулам [10].

В сантиметровом диапазоне обнаруживается «чувствительность» метода Кирхгофа к точности вычисления граничного поля  $E_Q$  при переходе от освещенной области к зоне тени. Для расчета среднеквадратического значения амплитуды вблизи границы геометрической тени в этом случае можно применить метод диффузии лучей [11, 12].

Расстояние от передатчика до плоскости  $Q$ , на которой вычисляются эквивалентные источники в работах [3, 4], составляет  $R_0 \sim 10^4 \dots 10^5$  м, интервал высот  $0 < h < 300$  м. При длине волны  $\lambda = 3$  см для этих значений  $R_0$  имеют место неравенства

$$R_0 \gg L_0 \gg \lambda, \quad \sqrt{\lambda R_0} \ll L_0, \quad (9)$$

где  $L_0 \approx 0,4h = 60$  м. В этом случае можно пользоваться лучевыми представлениями и рассматривать распространение луча как случайный процесс без последствия (непрерывную цепь Маркова) [12]. Тогда можно найти вероятность  $w(\theta, x)$  того, что луч, вышедший из начала координат в направлении оси  $x$  и прошедший расстояние  $x$ , отклонится от плоскости  $zox$  на угол  $\theta$ . В нашем случае  $\theta$  не превышает  $0,5^\circ$ . Для таких малых углов функция углового распределения лучей  $w(\theta, x)$  удовлетворяет уравнению Эйнштейна – Фоккера – Колмогорова [12]:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = D \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2},$$

где  $D$  – коэффициент диффузии луча.

Коэффициент диффузии определяется через коэффициент корреляции  $N(x, y, z)$  и дисперсию флуктуаций показателя преломления  $\langle n^2 \rangle$ , вычисленные в пределах интервала локальной однородности:

$$D = - \langle n^2 \rangle \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right]_{y=z=0} dx,$$

причем под интегралом значение второй производной берется при  $y = z = 0$ .

Мелкомасштабные флуктуации, которые можно характеризовать корреляционной функцией, вычисленной в пределах интервала локальной однородности, создают равномерный фон [13]. Этот фон в радиодиапазоне не вносит существенных изменений в результаты расчета коэффициента ослабления.

В оптическом диапазоне для этих флуктуаций удовлетворяются неравенства (9), и их также можно учесть в расчетах методом диффузии лучей.

Нужно отметить, что неравенство  $\sqrt{\lambda R_0} \ll L_0$  ограничивает допустимое значение пройденного волной расстояния  $R_0$ , при которых применимы МГО и метод диффузии лучей. Поэтому метод эквивалентных источников может оказаться эффективным для приближенных оценок поля на загоризонтных трассах малой протяженности (до  $\sim 100$  км).

## Выводы

Вид структурной функции поля диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\mathbf{r})$  в случае анизотропной среды отличается от «закона 2/3», характерного для зоны свободной конвекции,

наличием области локальной однородности мелкомасштабных флуктуаций. В случае слоистой тропосферы в структурной функции можно выделить несколько участков локальной однородности. Эта особенность характерна практически для всех реализаций  $\epsilon(\mathbf{r})$ . Интервал локальной однородности мелкомасштабных флуктуаций для выбранной модели среды составляет 0,2 – 0,3 м. Второй интервал соизмерим с внешним масштабом турбулентности и составляет 15 – 25 м.

При исследовании корреляционных функций мелкомасштабных флуктуаций первый из указанных интервалов можно рассматривать как максимальную протяженность реализации  $\epsilon_i(y, z)$ , при которой оценки выборочных корреляционных функций и радиусов «быстрых» флуктуаций приводят к близким результатам для разных реализаций  $\epsilon_i(y, z)$ . Увеличение объема  $\epsilon_i(y, z)$  выборок приводит к неоднозначным оценкам из-за неоднородности (нестационарности) поля  $\epsilon(y, z)$ .

В пределах интервалов локальной однородности можно найти корреляционные функции и дисперсии мелкомасштабных и крупномасштабных флуктуаций диэлектрической проницаемости. Эти данные позволяют использовать метод диффузии лучей для расчета поля эквивалентных источников на границе геометрической тени.

**Список литературы:** 1. Хитни Г.В., Рихтер, Ю.Х., Папперт, Р.А., Андерсон, К.Д., Баумгартнер, Дж.Б. Распространение радиоволн в тропосфере : Обзор // ТИИЭР. – 1985. – Т.73. – №2. – С.106-128. 2. User's Manual for Advanced Refractive Effects Prediction System [Электронный ресурс] / Space and Naval Warfare Systems Center, Pacific Atmospheric Propagation Branch (5548) San Diego, CA. – 2009. – С. 1–336. Режим доступа: <http://areps.spawar.navy.mil>. 3. Петров, В.А., Ключева, А.Н., Павлова, О.Л. Оценка текущих условий загоризонтного распространения УКВ по заданному пространственному распределению коэффициента преломления воздуха // Радиотехника. – 2011. – Вып.166. – С. 214 – 222. 4. Жуков, Б.В., Ключева, А.Н., Петров, В.А. Оценка дистанционных зависимостей УВЧ радиополя над морем для произвольных высотных профилей коэффициента преломления воздуха // Радиотехника. – 2011. – Вып. 164. – С. 58 – 65. 5. Pavlova, O.L., Petrov, V.A. The Mathematical Modeling of Radiation Patterns of Receiving Antennas on Tropospheric Paths // Antenna Theory and Techniques. – 2011. – P. 282-284. 6. Shilyaeva, O. The Calculation of Azimuthal Distribution of Field on Tropospheric Paths. Fresnel Diffraction // Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer Science. – 2012. – P.109. 7. Экспериментальное исследование дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн / Под ред. Я. С. Шифрина. – Харьков : АРТА, 1964. – 103 с. 8. Шарыгин, Г.С. Статистическая структура поля УКВ за горизонтом. – М. : Радио и связь, 1983. – 140с. 9. Татарский, В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. – М. : Наука, 1967. – 548 с. 10. Калинин, А.И. Распространение радиоволн на трассах наземных и космических радиолиний. – М. : Связь, 1979. 296с. 11. Фейнберг, Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. – М. : АН СССР, 1961. – 546 с. 12. Чернов, Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. – М. : Наука, 1977. – 170с. 13. Лобкова, Л.М. Статистическая теория антенн сверхвысоких и оптических частот. – М. : Связь, 1975. – 176с.

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 11.08.2012