УДК 621.391

И. Н. ПРЕСНЯКОВ, канд. техн. наук, *Ю. В. АФАНАСЬЕВ*

ОБОБЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ КОСВЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Теория и методы оптимальной нелинейной фильтрации марковских процессов подробно рассмотрены в работе [1]. На практике ввиду сложности получения точных оценок широко используются различные приближенные алгоритмы. Вместе с тем при сильных флюктуациях оцениваемого процесса, повышенных шумах наблюдения и в некоторых других случаях качество фильтрации может оказаться недостаточным [2]. Один из способов повышения качества оценивания — переход к косвенному методу нелинейной фильтрации [3]. Суть метода заключается в том, что вместо непосредственной прямой оценки процесса получают оценку его функции, определяемой уравнением наблюдения, а собственно оценка состояния вычисляется как обратная (нелинейная) операция от оцененной функции. Относительно указанной функции, очевидно, уравнение наблюдения всегда линейно, а нелинейным остается лишь уравнение состояния. В работе [3] получен приближенный рекуррентный алгоритм косвенной нелинейной фильтрации, базирующийся на линеаризации этого уравнения.

В статье синтезируется алгоритм оценивания, более полно учитывающий нелинейность модели состояния, который затем применяется для получения ряда приближенных алгоритмов различной точности.

Пусть (X_n, Y_n) — частично наблюдаемый случайный процесс дискретным временем, где $X_n = \{x_i, \ i = \overline{1, n}\}$ — наблюдаемые; $Y_n = \{y_i, \ i = \overline{1, n}\}$ — наблюдаемые одномерные случайные величины, связанные следующими нелинейными уравнениями:

$$x_n = f(x_{n-1}) + \xi_n; \quad y_n = \varphi(x_n) + \eta_n, \tag{1}$$

где $\xi_n \sim N(0, \sigma_1^2)$, $\eta_n \sim N(0, \sigma_2^2)$ — независимые гауссовские шумы с нулевым средним и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2; $f(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ — некоторые аналитические функции. Получим рекуррентную оценку $\hat{x}_n$ величины x_n, оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности.

Перейдем к косвенной модели состояния и наблюдения. Введем обозначение $\varphi_n \triangleq \varphi(x_n)$. Тогда, если $g(\varphi_n)$ — функция, обратная $\varphi(x_n)$, то из (1) следует

$$\varphi_n = \varphi[f(x_{n-1}) + \xi_n]; \quad y_n = \varphi_n + \eta_n; \quad x_n = g(\varphi_n). \tag{2}$$

Текущая апостериорная плотность вероятности марковского процесса с дискретным временем, как известно, может быть записана в виде [1]

$$p(\varphi_n | Y_n) = cp(y_n | \varphi_n)\, p^э(\varphi_n | Y_{n-1}), \tag{3}$$

где $c = p^{-1}(Y_n | Y_{n-1})$ — коэффициент, не зависящий от φ_n;

$$p^{э}(\varphi_n | Y_{n-1}) = \int p(\varphi_{n-1} | Y_{n-1})\, p(\varphi_n | \varphi_{n-1})\, d\varphi_{n-1} \qquad (4)$$

— экстраполированная плотность вероятности значения φ_n при условии Y_{n-1}; $p(\varphi_{n-1} | Y_{n-1})$ и $p(\varphi_n | \varphi_{n-1})$ — апостериорная на предыдущем шаге и переходная плотности вероятности процесса φ. Здесь и далее интегралы берутся по всей области существования этого процесса. Найдем плотности вероятности, входящие в (3). Из первого уравнения системы (1) очевидно, что

$$p(x_n | x_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}[x_n - f(x_{n-1})]}.$$

Поскольку в соответствии с (2) $\varphi_n = \varphi(x_n)$, то с учетом известной формулы для плотности вероятности случайного процесса после нелинейного безынерционного преобразования $p_\varphi(\varphi) = p_x[g(\varphi)] \times g'_\varphi(\varphi)$, получим

$$p(\varphi_n | \varphi_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{dg(\varphi_n)}{d\varphi_n} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\{g(\varphi_n) - f[g(\varphi_{n-1})]\}^2}. \qquad (5)$$

Одношаговая функция правдоподобия $p(y_n | \varphi_n)$ очевидна из второго уравнения системы (2):

$$p(y_n | \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y_n - \varphi_n)^2}. \qquad (6)$$

Кроме того, будем полагать, что плотность вероятности $p(\varphi_{n-1} | Y_{n-1})$ определена на предыдущем $(n-1)$-м шаге.

Искомая оценка $\hat{\varphi}_n$ — корень уравнения

$$\left.\frac{\partial\theta[p(\varphi_n | Y_n)]}{\partial\varphi_n}\right|_{\varphi_n = \hat{\varphi}_n} = 0, \qquad (7)$$

где $\theta[\cdot]$ — в общем случае некоторая монотонная функция, в качестве которой выбираем логарифмическую.

Подстановка (3) с учетом (4) — (6) в (7) приводит к рекуррентному соотношению

$$\hat{\varphi}_n = y_n + g'_\varphi(\hat{\varphi}_n)\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\{F(\hat{\varphi}_n) - g(\hat{\varphi}_n)\} + \sigma_2^2 \frac{g''_\varphi(\hat{\varphi}_n)}{g'_\varphi(\hat{\varphi}_n)}. \qquad (8)$$

Здесь

$$F(\hat{\varphi}_n) = \frac{\int f[g(\varphi_{n-1})]\, p(\varphi_{n-1} | Y_{n-1})\, p(\hat{\varphi}_n | \varphi_{n-1})\, d\varphi_{n-1}}{\int p(\varphi_{n-1} | Y_{n-1})\, p(\hat{\varphi}_n | \varphi_{n-1})\, d\varphi_{n-1}}.$$

Таким образом, для получения искомой оценки $\hat{\varphi}_n$ необходимо на каждом шаге решить трансцендентное уравнение (8). Интегралы, входящие в $F(\cdot)$, для конкретных функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ могут быть вычислены заранее.

Начальные условия можно найти из формулы Байеса

$$p(\varphi_1 \mid y_1) = \frac{p(\varphi_1)\, p(y_1 \mid \varphi_1)}{\int p(\varphi_1)\, p(y_1 \mid \varphi_1)\, d\varphi_1},$$

причем $p(\varphi_1)$ выбирается с учетом имеющихся априорных сведений. В частности, при несобственном равномерном распределении величины φ_1, которое является наименее благоприятным,

$$p(\varphi_1 \mid y_1) = p(y_1 \mid \varphi_1) = N(\varphi_1, \sigma_2^2), \;\; \hat{\varphi}_1 = y_1. \tag{9}$$

Апостериорная дисперсия прямой оценки $\hat{x}_n = g(\hat{\varphi}_n)$ на n-м шаге вычисляется по формуле

$$\sigma_{nx}^2 = \int [x_n - M(x_n)]^2\, p_x(x_n \mid Y_n)\, dx_n =$$
$$= \int g^2(\varphi_n)\, p_\varphi(\varphi_n \mid Y_n)\, d\varphi_n - M^2[g(\varphi_n)]. \tag{10}$$

Здесь $p_x(x) = p_\varphi[\varphi(x)]\,\varphi_x'$, а $p_\varphi(\varphi_n \mid Y_n)$ определяется из (3). Разлагая функцию $g(\varphi_n)$ в ряд Тейлора в точке $\hat{\varphi}_n$ и ограничиваясь двумя членами, для симметричных апостериорных плотностей получаем

$$\sigma_{nx}^2 \approx [g_\varphi'(\hat{\varphi}_n)]^2\, \sigma_{n\varphi}^2, \tag{11}$$

где

$$\sigma_{n\varphi}^2 = \int \varphi_n^2 p_\varphi(\varphi_n \mid Y_n)\, d\varphi_n - \hat{\varphi}_n^2.$$

Аппроксимируя входящую в (8) апостериорную плотность $p(\varphi_{n-1} \mid Y_{n-1})$ той или иной конкретной функцией, а также удерживая в разложении нелинейных функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ то или иное количество членов, находим приближенные алгоритмы различной вычислительной сложности и качества. Рассмотрим некоторые примеры.

Метод гауссовской аппроксимации при косвенной нелинейной фильтрации. Пусть прямые уравнения состояния и наблюдения определяются из (1), а косвенные из (2). В первом уравнении системы (2) разложим функцию $\varphi(\cdot)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $f(x_{n-1})$ и ограничимся линейными членами:

$$\varphi_n \approx \varphi[f(x_{n-1})] + \varphi_f'[f(x_{n-1})]\,\xi_n.$$

Обозначим

$$\psi_{n-1} \triangleq \varphi[f(x_{n-1})] = \varphi\{f[g(\varphi_{n-1})]\}.$$

Раскладывая функцию ψ_{n-1} в ряд Тейлора в окрестности $\hat{\varphi}_{n-1}$ и вновь ограничиваясь линейными членами, имеем линеаризованную модель состояния

$$\varphi_n = \psi_\varphi' \varphi_{n-1} + a_{n-1} + \varphi_f'\,\xi_n; \;\; y_n = \varphi_n + \eta_n, \tag{12}$$

где $a_{n-1} = \psi(\hat{\varphi}_{n-1}) - \psi_\varphi'(\hat{\varphi}_{n-1})\,\hat{\varphi}_{n-1}$.

Из (12) несложно записать все входящие в (8) плотности вероятности, являющиеся в рассматриваемом приближении гауссовскими

$$p(y_n \mid \varphi_n) = N(\varphi_n, \sigma_2^2);$$
$$p(\varphi_n \mid \varphi_{n-1}) = N[\psi(\hat{\varphi}_{n-1}), (\varphi_f')^2 \sigma_1^2]; \quad (13)$$
$$p(\varphi_{n-1} \mid Y_{n-1}) = N(\hat{\varphi}_{n-1}, \sigma^2_{n-1,\varphi}),$$

причем $\sigma^2_{n-1,\varphi}$ предполагается известной с предыдущего $(n-1)$-го шага. Подстановка (13) в (8) с учетом (11) приводит к алгоритму

$$\varphi_n = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_n^2}\psi(\hat{\varphi}_{n-1}) + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_2^2 + \sigma_n^2} y_n; \quad \hat{x}_n = g(\hat{\varphi}_n); \quad \sigma^2_{n\varphi} = \sigma_2^2 \frac{\sigma_n^2}{\sigma_2^2 + \sigma_n^2};$$
$$\sigma^2_{nx} \approx (g'_\varphi)^2 \sigma^2_{n\varphi}. \quad (14)$$

Здесь $\sigma_n^2 = (\varphi_f')^2 \sigma_1^2 + (\psi'_\varphi)^2 \sigma^2_{n-1,\varphi}$.

Согласно (14) новая оценка получается как взвешенная сумма экстраполированного значения процесса $\varphi_n^э = \psi(\hat{\varphi}_{n-1})$ и нового наблюдения y_n, причем пропорции весовых коэффициентов определяются соотношением дисперсий экстраполированной оценки и шума наблюдения. При отсутствии шума наблюдения ($\sigma_2 = 0$) косвенная оценка в точности равна очередному измерению $\hat{\varphi}_n = y_n$. Если шум наблюдения таков, что $\sigma_2^2 \gg \sigma_n^2$, то в качестве наилучшей новой оценки принимается экстраполированное значение процесса $\hat{\varphi}_n = \psi(\hat{\varphi}_{n-1})$.

Алгоритм (14) можно легко привести к виду, полученному в работе [3], иным путем. Там же показано, что в ряде практически важных случаев полученный алгоритм эффективнее, чем алгоритм прямой фильтрации первого порядка (расширенный фильтр Калмана).

Модифицированный метод гауссовской аппроксимации. При выводе предыдущего алгоритма вместо обоих плотностей вероятности $p(\varphi_{n-1} \mid Y_{n-1})$ и $p(\varphi_n \mid \varphi_{n-1})$ применялась упрощенная (гауссовская) модель (13). Обратимся теперь к более общему случаю, подставляя в качестве переходной плотности вероятности распределение (5), соответствующее первому уравнению системы (2). Апостериорную плотность вероятности на предыдущем шаге по-прежнему полагаем нормальной:

$$p(\varphi_{n-1} \mid Y_{n-1}) = N(\varphi_{n-1}, \sigma^2_{n-1}). \quad (15)$$

Заметим, что в данном случае экстраполированная плотность вероятности (4) будет уже негауссовой, т. е. используется более полная информация об оцениваемом процессе.

Подставляя (5) и (15) в (8) и разлагая входящую (5) функцию $z(\varphi_{n-1}) \triangleq f[g(\varphi_{n-1})]$ в ряд Тейлора вблизи точки $\hat{\varphi}_{n-1}$ с сохранением первых двух членов, записываем следующее нелинейное уравнение для искомой оценки $\hat{\varphi}_n$:

$$\hat{\varphi}_n = y_n + g'_\varphi(\hat{\varphi}_n)\frac{\sigma_2^2}{\sigma^2}\{f[g(\hat{\varphi}_{n-1})] - g(\hat{\varphi}_n)\} + \frac{g''_\varphi(\hat{\varphi}_n)}{g'_\varphi(\hat{\varphi}_n)}\sigma_2^2, \quad (16)$$

где $\sigma^2 = \sigma_1^2 + (z_\varphi')^2 \sigma_{n-1,\varphi}^2$. По структуре данный алгоритм полностью совпадает с общим (8), в котором интегральная функция $F(\cdot)$ заменена на экстраполированное значение оцениваемого процесса $x^э = f(x_{n-1}) = f[g(\hat{\varphi}_{n-1})]$. Приближенность такой замены отражена уменьшением веса данного слагаемого в результате изменения в знаменателе σ_1 на $\sigma > \sigma_1$. Новая оценка $\hat{\varphi}_n$ косвенного процесса φ равна новому измерению y_n с поправкой, складывающейся из взвешенной разности экстраполированного значения и новой оценки искомого процесса x, плюс поправка на нелинейность функции $g(\cdot)$, определяемая ее второй производной.

Трансцендентное уравнение (16) может быть сведено к алгебраическому путем разложения входящих в него нелинейных функций в ряд Тейлора с сохранением необходимых членов. Если сохранить только линейные члены ряда, т. е. все производные функции $g(\cdot)$, начиная со второй включительно, считать равными нулю, то, как легко проверить, алгоритм (16) вырождается в (14). Если в последнем слагаемом положим $g_\varphi''(\hat{\varphi}_n) \approx g_\psi''[\psi(\hat{\varphi}_{n-1})] + g_\psi^{(3)}[\psi(\hat{\varphi}_{n-1}) \times \times \{\hat{\varphi}_n - \psi(\hat{\varphi}_{n-1})\}$, получим новый алгоритм, использующий более полную информацию о функции $g(\cdot)$, чем (14):

$$\varphi_n = \frac{\sigma^2}{\bar{\sigma}^2} y_n + (g_\psi')^2 \frac{\sigma_2^2}{\bar{\sigma}^2} \psi_{n-1} + \frac{\sigma_2^2 \sigma^2}{\bar{\sigma}^2} \frac{g_\psi'' - g_\psi^{(3)} \psi_{n-1}}{g_\psi'}. \tag{17}$$

Здесь

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \sigma_2^2 ((g_\psi')^2 - \sigma^2 g_\psi^{(3)} / g_\psi').$$

Очевидно, (17) переходит в (14) при $g_\psi'' = g_\psi^{(3)} = 0$.

Дисперсия оценки, найденной по алгоритмам (16), (17), вычисляется по формуле (11) с подстановкой соответствующих апостериорных плотностей $p(\varphi_n | Y_n)$. Для алгоритма (16)

$$p(\varphi_n | Y_n) = c g_\varphi'(\varphi_n) \exp\left\{-\frac{(y_n - \varphi_n)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2} \frac{[g(\varphi_n) - z(\hat{\varphi}_{n-1})]^2}{\sigma_1^2 + \sigma_{n-1,\varphi}^2 \cdot (z_\varphi')^2}\right\}, \tag{18}$$

где постоянная c определяется из условия нормировки. При этом дисперсия (11) существенно зависит от конкретного вида входящей в (1) функции $\varphi(\cdot)$.

Список литературы: 1. *Тихонов В. И., Кульман Н. К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., 1975. 704 с. 2. *Миронов М. А.* Условия применимости метода гауссовской аппроксимации // Радиотехника и электрон. 1981. Т. 26, № 6. С. 1186—1197. 3. *Шлома А. М.* Косвенный метод нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника и электрон. 1986. Т. 31, № 7. С. 1304—1310.

Поступила в редколлегию 20.10.87