

О КОНЕЧНОМЕРНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ
СИЛЬНО СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

А. А. Волков

Харьков

Линейные графы G обычно [1] задаются множествами X вершин и их многозначными отображениями Γ в эти же множества $G = G(X, \Gamma)$ или множествами X вершин и множествами V дуг этих графов

$$G = G(X, V). \quad (1)$$

В ряде случаев сильно связанные графы удобнее задавать некоторыми линейными операторами, полностью отображающими их топологическую структуру и позволяющими использовать методы линейной алгебры для исследования их свойств. Возможность такого задания графов основывается на их представлении в виде конечномерных пространств с определенными в них подпространствами, отображающими топологическую структуру графов.

Ниже рассматривается метод представления сильно связанного графа как конечномерного пространства V^m , порождаемого множеством V дуг графа с определенными в нем подпространствами Y^a и Θ^a подмножеств дуг, образующих узлы и циклы этого графа соответственно.

Рассмотрим сильно связной ориентированный мультиграф G , образованный множеством X его вершин $x_j, j \in N, |N| = n + 1$ и множеством V ориентированных дуг $v_i, i \in M, |M| = m$.

Рассмотрим семейство Y узловых подмножеств $Y_j \in Y, j \in N$ дуг графа,

Между множеством X вершин и семейством Y узловых подмножеств Y_j дуг существует такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждой вершине $x_j \in X, j \in N$ ставится в соответствующее узловое подмножество $Y_j, j \in N$ дуг графа, т. е.

$$x_j \longleftrightarrow Y_j, j \in N. \quad (2)$$

Определим [2] ориентированную дугу v_i графа как линию, ограниченную двумя полюсами v_i^a, v_i^k , один из которых v_i^a называется ее началом, а другой v_i^k — ее концом; при этом полюса рассматриваются как петли или единичные дуги, начало и конец которых совпадают. Тогда ориентированную дугу можно вводить через пару ее полюсов $v_i = (v_i^a, v_i^k)$ а узловые подмножества Y_j дуг графа рассматривать как узловые подмножества полюсов. Семейство Y узловых подмножеств Y_j при этом определим выражением

$$Y_j = \{v_i | i \in I_j\}, i \in M, j \in N, \quad (3)$$

где I_j — подмножество индексов дуг, инцидентных вершин x_j .

Учитывая (1) и (2), граф можно определить в виде

$$G = G(Y, V). \quad (4)$$

Пара (Y, V) образует пространство графа, выраженное узловыми подмножествами его дуг. Это пространство можно представить в виде такого линейного преобразования, где каждому узловому подмножеству Y_j дуг графа поставлен в соответствие некоторый вектор — узел y_j , а семейству Y — вектор y .

Связь между узловыми подмножествами Y_j семейства Y и элементами $v_i, i \in M$ множества V дуг графа можно выразить линейным преобразованием

$$y_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} v_i \quad (j = 1, \dots, n+1), \quad (5)$$

соответствующим выражению (3).

Коэффициенты преобразования (5) принадлежат числовому полю Φ и принимают значения 0, +1 и -1 в такой зависимости:

$$a_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i \notin Y_j, \\ 1, & \text{если } v_i^+ \in Y_j, \\ -1, & \text{если } v_i^- \in Y_j, \end{cases} \quad (6)$$

Линейное преобразование (5) можно представить в виде

$$\bar{y} = \phi_x \bar{v},$$

где

$$\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n+1}); \quad \bar{v} = (v_1, \dots, v_m); \quad (7)$$

ϕ_x — линейный оператор узловых подмножеств дуг графа, отображающий m -мерное пространство V^m дуг графа в подпространство Y^n семейства узловых подмножеств дуг.

Этому оператору отвечает прямоугольная матрица $A_x^{(10)} = \|a_{ji}\|$ ($j = 1, \dots, n+1$; $i = 1, \dots, m$), которая представляет собой матрицу инцидентий [1] графа.

Можно показать, что ранг r линейного оператора ϕ_x равен n , если число вершин графа $|N| = n+1$. Произвольный вектор y_j преобразования (5) в качестве которого без нарушения общности можно считать вектор y_{n+1} является линейной комбинацией остальных векторов y_j ($j = 1, \dots, n$) преобразования.

Таким образом, максимальной линейно независимой подсистемой преобразования (5) является

$$y_j = \sum_{i=1}^m a_{ji} v_i \quad (j = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Соотношению (8) отвечает матричное уравнение

$$y = A_x v, \quad (9)$$

где $A_x = \|a_{ji}\|$ ($j = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$) — матрица, получаемая из $A_x^{(10)}$ вычеркиваем произвольной строки.

Базисом оператора ϕ_x является множество N дуг одного из деревьев графа, соответствующее линейно независимым столбцам

матрицы A_x . Матрицу A_x ранга n назовем упорядоченной, если она содержит неособую подматрицу A_{x_1} треугольного вида ранга n , столбцы которой соответствуют дугам дерева графа. Справедлива

Теорема 1. Вершины x_j , $j \in N$, $|N| = n + 1$ и дуги v_i , $i \in M$, $|M| = m$ сильно связного графа G всегда можно пронумеровать таким образом, чтобы оператору ϕ_x узловых подмножеств дуг графа соответствовала бы упорядоченная матрица $A_x = (A_{x_1}, A_{x_2})$.

Данная теорема дает возможность выделить базис оператора ϕ_x , являющегося некоторым деревом H графа G . Метод выделения этого базиса фактически сводится к перестановке и перенумерации столбцов матрицы A_x произвольного вида и легко реализуется на ЦВМ.

Узловые подмножества Y_j дуг графа и соответствующие им векторы y_j , $j \in N$ не являются линейно независимыми, так как они в общем случае могут содержать более одной дуги базиса (дерева) графа. Независимые обобщенные узловые подмножества Y_{0j} , $j \in N$ дуг графа содержат только по одной ветви дерева и поэтому образуют n -мерное подпространство Y_0^n независимых обобщенных узлов графа.

Линейное преобразование m -мерного пространства V^m дуг графа в n -мерное подпространство Y_0^n имеет вид

$$\bar{y}_0 = \phi v, \quad (10)$$

где $\bar{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})$ — n -мерный независимый вектор — обобщенный узел;

ϕ — линейный оператор преобразования.

Оператору ϕ соответствует матрица независимых обобщенных узлов $A = (A_1, A_2)$ где $A_1 = E^n$ — единичная подматрица n -того порядка.

Справедливы соотношения

$$\phi = \xi \phi_x, \quad (11)$$

где ξ — линейный оператор, отображающий подпространство Y^m в подпространство Y_0^n .

Выражению (10) соответствует матричное уравнение

$$A = T A_x, \quad (12)$$

где $T = \|t_{k,j}\|$ ($k, j = 1, \dots, n$) — прямоугольная матрица, соответствующая оператору ξ ,

$$t_{k,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } y_j \in y_{0k} \\ 0, & \text{если } y_j \notin y_{0k} \end{cases}.$$

Справедливо соотношение $\bar{y}_0 = \xi \bar{y}$; или в матричном виде

$$y_0 = T y. \quad (13)$$

Теорема 2. Матрицу A , соответствующую оператору ϕ линейного преобразования пространства V^m дуг графа в подпространство Y_0^n его независимых обобщенных узлов, всегда можно получить путем элементарных преобразований матрицы инцидентий A_x^0 или эквивалентной ей матрицы, A_x , соответствующих оператору ϕ_x линейного преобразования пространства V^m в подпространство Y^n узловых подмножеств дуг этого графа.

Матрица A может быть получена из A_x^0 или из ее эквивалента — семейства узловых подмножеств дуг графа — также и другими методами, например, при помощи алгоритма Жордана-Гаусса. Все эти методы хорошо реализуются на ЦВМ [3].

Линейное преобразование пространства V^m в подпространство Y_0^n определяется канонической системой линейных уравнений вида

$$y_{0j} = v_j + \sum_{i=n+1}^m a_{ji} v_i, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (14)$$

Системе (14) соответствуют матричные уравнения

$$y_0 = Av = A_1 v_1 + A_2 v_{II} = v_1 + A_2 v_{II}, \quad (15)$$

где $A_1 = E^n$ — единичная подматрица n -того порядка;

A_2 — прямоугольная подматрица порядка $n \times s$;

$v_1 = (v_1, \dots, v_n)'$ — матрица-столбец, соответствующая дугам дерева графа;

$v_{II} = (v_{n+1}, \dots, v_m)'$ — матрица-столбец, соответствующая дугам анти-дерева графа.

Из (15) следует, что топология графа сети полностью определяется подматрицей

$$A_2 = \|a_{ji}\|, \quad (j = n+1, \dots, m; i = 1, \dots, n), \quad (16)$$

которую в соответствии с теоремой 2 получаем из матрицы инцидентий или ее эквивалентов.

Сильно связный граф G может быть определен также в пространстве (Θ, V) , образованном семейством Θ независимых циклов и множеством V дуг графа, т. е.

$$G = G(\Theta, V).$$

Независимым циклом графа назовем такое подмножество Θ_k , $k \in S$ его дуг, образующее замкнутый контур (цикл), которое содержит только одну дугу антидерева (одну связь) графа. Число независимых циклов определяется [1] цикломатическим циклом $|S| = m - n = s$. Линейное преобразование пространства V^m дуг графа в s -мерное подпространство Θ^s независимых циклов графа определяется соотношением

$$\bar{\Theta} = \varphi \cdot \bar{v}, \quad (17)$$

где φ — линейный оператор преобразования, которому при некотором базисе соответствует матрица независимых циклов графа.

Вполне очевидно, что циклы Θ_k , $k \in S$ и дуги v_i , $i \in M$ сильно связного графа G всегда можно пронумеровать таким образом, чтобы матрица B инцидентий дуг v_i и циклов Θ_k графа представляла собой упорядоченную матрицу $B = (B_1, B_2)$, где $B_2 = E^s$ — единичная матрица порядка s .

Выражению (17) при некотором базисе соответствует матричное уравнение

$$\bar{\Theta} = Bv = B_1 v_1 + B_2 v_{II} = B_1 v_1 + v_{II}, \quad (18)$$

где B_1 — матрица порядка $s \times n$, полностью определяющая топологию графа.

Выражению (18) соответствует система линейных уравнений

$$\theta_k = \sum_{j=1}^n b_{kj} \cdot v_j + v_{n+k} \quad (k = 1, \dots, s). \quad (19)$$

где

$$b_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если } v_j \notin \Theta_k; \\ 1, & \text{если } v_j \in \Theta_k \text{ и ориентации } v_j \text{ и } \Theta_k \text{ совпадают;} \\ -1, & \text{если } v_j \in \Theta_k \text{ и ориентации } v_j \text{ и } \Theta_k \text{ не совпадают.} \end{cases}$$

Таким образом, в m -мерном пространстве V^m дуг сильно связного мультиграфа определено два подпространства: n -мерное подпространство узловых подмножеств Y^n дуг графа и подпространство Θ^s циклов графа. Связь между этими подпространствами устанавливает

Теорема 3. Подпространство Y_0^n , порождаемое векторами y_{0j} , $j \in N$ независимых обобщенных узлов сильно связного графа G , и подпространство Θ^s , порождаемое независимыми векторами — циклами Θ_k , $k \in S$, этого графа, являются взаимно ортогональными.

Из этой теоремы следуют известные соотношения

$$AB' = BA' = 0; \quad (20)$$

$$B_1 = -A_2'; \quad A_1 = -B_1'. \quad (21)$$

где штрих символизирует транспонирование матриц.

Учитывая (21) матричное уравнение, (15) и (18) можно представить в виде

$$y = v_1 - B_1' v_{11}; \quad (22)$$

$$\Theta = -A_2' v_1 = v_{11}. \quad (23)$$

Таким образом, достаточно знать только подматрицу A_2 или только подматрицу B_2 , чтобы полностью определить топологию графа. Эти подматрицы имеют минимально возможные размеры $n \times (m-n)$ и могут быть определены автоматически при помощи ЦВМ по начальной информации в виде матрицы инцидентий графа или ее эквивалентов. Такого рода программы для ЦВМ М-20 и «Урал-2» разработаны в Харьковском институте радиоэлектроники [3]. Они успешно применяются для топологического анализа сложных сетевых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применение. Изд-во «Иностран. лит-ры», 1962.
2. Г. Кенниг и В. Блекуэл. Теория электромеханических систем. Изд-во «Энергия», М.—Л., 1965.
3. А. А. Волков, А. Г. Евдокимов, Р. Т. Волколупова. «Топологический анализ шахтных вентиляционных сетей». Изв. вузов, Горный журнал, № 1, 1967.