УДК 681.3

В. П. КОЛЬЦОВ, канд. техн. наук, *В. Н. УДОВИЧЕНКО*, канд. техн. наук

ПОГРЕШНОСТИ «АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ» ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Работа [1] — одна из первых, посвященных разбору особенностей дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и вычислительному алгоритму быстрого преобразования Фурье (БПФ), изданных в СССР. Приведенные в ней сведения о погрешностях «амплитудной модуляции» ДПФ носят преимущественно качественный характер. Представляется целесообразным более обстоятельно рассмотреть описанные ранее и исследовать некоторые не рассмотренные погрешности, присущие ДПФ. При решении различных задач теории и практики ДПФ встречаются следующие формы записи нормированного прямого и обратного ДПФ [1, с. 53 соотношения (3), (4)]:

$$X(k) = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N); \qquad (1)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N), \qquad (2)$$

$$k = \overline{0, (N-1)}; \; n = \overline{0, (N-1)}.$$

В (1), (2) изменены лишь индексы суммирования и индексы при x и X в соответствии с обозначениями, принятыми в работе [2, с. 63—64, соотношения (2.132), (2.136)], где та же пара ДПФ представлена в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi kn/N); \qquad (3)$$

$$x(n) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(j2\pi kn/N), \qquad (4)$$

$$k = \overline{0, (N-1)}; \; n = \overline{0, (N-1)}.$$

В записи для (3) и (4) по сравнению с оригиналом опущен индекс p для x_n и X_k, назначение которого — подчеркнуть периодичность последовательностей x_n и $X(k)$. Не снижая общности полученных ниже результатов, отдадим предпочтение соотношениям (1), (2). Эффект паразитной амплитудной модуляции спектра [1, с. 29], проявляется тогда, когда частота гармонического сигнала $g(t)$, представленного в виде дискретной последовательности $x(n) = g(n\Delta t)$, не совпадает с бинами ДПФ. Рассмотрим следующие два случая.

Пусть входная последовательность $x(n)$ является последовательностью вида

$$x(n) \to x(n, p, r, \varphi) = \exp\{j[2\pi n(p + v)/N + \varphi]\}, \qquad (5)$$

$$n = 0, \; (N-1); \; p = 0, \; (N-1); \; -0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \; -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \qquad (6)$$

Полагая $2\pi/N = \alpha$ и подставляя (5), (6) в (1), получаем

$$X(k, p, r, \varphi) = \exp(-j\varphi)/N \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j\alpha n(p + r - k)], \qquad (7)$$

$$p = \overline{0, (N-1)}; \; n = \overline{0, (N-1)}; \; k = \overline{0, (N-1)};$$
$$-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \; -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Положим $p = k$ — комплексная экспонента (5) с частотой p в полосе пропускания k-го бина. Из (7) находим

$$X(r, \varphi) = [\exp(j\varphi)/N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\alpha nr). \qquad (8)$$

Из (8) следует, что для входной последовательности $x(k, n, r, \varphi)$, сформированной из комплексной экспоненты, выходная последовательность $X(r, \varphi)$ прямого ДПФ инвариантна относительно k. Пусть величина N, определяющая количество элементов входной последовательности $x(n)$, выбирается из соотношения $N = 2^m$ (9), где $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$, как это принято в алгоритме БПФ по основанию 2, что не снижает общности получаемых выводов, но упрощает изложение.

Преобразуя (8) с учетом (9), имеем

$$X(m, r, \varphi) = \exp\{j[(1 - 2^{-m})\pi r + \varphi] \prod_{l=1}^{m} \cos[(2^{l-m-1})\pi r], \quad (10)$$
$$-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \; -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Из (10) запишем выражение для модуля

$$X(m, r)| = \prod_{l=1}^{m} \cos[(2^{l-m-1})\pi r], \quad (11)$$
$$-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

и аргумента

$$\arg X(m, r, \varphi) = (1 - 2^{-m})\pi r + \varphi, \quad (12$$
$$-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \; -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Относительная погрешность модуля κ-го элемента последовательности дает количественную оценку эффекта паразитной амплитудной модуляции ДПФ (при входном сигнале в виде последовательности комплексной экспоненты

$$\delta(m, r) = \prod_{l=1}^{m} \cos[(2^{l-m-1})\pi r] - 1, \quad (13)$$
$$-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5.$$

Отметим, что в (13) не вошли в качестве аргументов κ и φ, т. е. закон изменения относительной погрешности модуля выходного сигнала в окрестности $-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5$ k-го бина ДПФ при входном сигнале в виде последовательности комплексной экспоненты не зависит от бина ДПФ k и от начальной фазы φ, а зависит только от порядка ДПФ m и величины r.

Абсолютную погрешность аргумента для k-го элемента выходной последовательности, сформированной из комплексной экспоненты, с k-м биномом ДПФ представим как

$$\lambda(m, r, \varphi) = \arg X(m, r, \varphi) - \varphi; \; \lambda(m, r) = (1 - 2^{-m})\pi r. \quad (14)$$

Из (14) следует, что абсолютная погрешность по фазе k-го элемента выходной последовательности ДПФ инвариантна к значению бина k, к начальной фазе φ и зависит только от r величины смещения по частоте в пределах k-го бина, m — порядка ДПФ.

Приведенную погрешность аргумента (в процентах) k-го элемента выходной последовательности ДПФ при указанных условиях

$$\theta_\varphi(m, r) = [\lambda(m, r)/\pi] \cdot 50 \quad (15)$$

или с учетом (12), (14) из (15) получим

$$\theta_\varphi(m, r) = 50(1 - 2^{-m}) \cdot r, \quad -0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5. \qquad (16)$$

Из (13) можно вычислить максимальную погрешность модуля k-го элемента последовательности $X(k)$, которая возникает при $r=0{,}5$, т. е. между двумя соседними бинами ДПФ, и составляет 36,3 %, начиная с $m=5$. С уменьшением m эта величина изменяется довольно медленно и составляет 34,67 % для $m=2$. Полученные таким способом значения относительной погрешности модуля k-го элемента последовательности $X(k)$ находятся в полном соответствии с результатами, приведенными в [1, с. 63], где отмечено, что в наихудшем случае, когда частота входного сигнала попадает точно в середину между рассчитываемыми гармониками, амплитуда выходного сигнала падает до уровня 0,637. Однако автор умалчивает о том, что данные количественные оценки получены для последовательности $x(n)$, сформированной из комплексной экспоненты.

Пусть входная последовательность является действительной последовательностью гармонического сигнала.

В этом случае можно записать

$$x(n) = \cos[\alpha n(p + r) + \varphi],$$
$$n = \overline{0, (N-1)}; \quad -0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi. \qquad (17)$$

Подставив (17) в (11) и перейдя к комплексным величинам, определим

$$X(k, p, r, \varphi) = [\exp(j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j\alpha n(p + r - k)] +$$
$$+ [\exp(-j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp[j\alpha n(p + r + k)], \qquad (18)$$
$$k = \overline{0, (N-1)}; \quad -0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5; \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Пусть $k=p$, т. е. рассмотрим случай, когда частота входного сигнала находится в полосе пропускания k-го бина ДПФ. В этом случае из (18) следует

$$X(k, r, \varphi) = [\exp(j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\alpha rn) +$$
$$+ [\exp(-j\varphi)/2N] \sum_{n=0}^{N-1} \exp[-j\alpha(2k + r)n]. \qquad (19)$$

Положим $N = 2^m$. Тогда из (19) получим

$$X(k, r, m, \varphi) = A\exp(j\mu) + B\exp(-j\xi); \qquad (20)$$

$$A = 1/2 \sum_{l=1}^{m} \cos[(2^{l-m-1})\pi r]; \qquad (21)$$

$$B = 1/2 \sum_{l=1}^{m} \cos[(2^{l-m-1})\pi(2k + r)]; \qquad (22)$$

$$\mu = (1 - N^{-1})\pi r + \varphi; \qquad (23)$$

$$\xi = (1 - N^{-1})\pi(2k + r) + \varphi. \qquad (24)$$

Из (20)—(24) находим модуль $X(k)$:

$$|X(k, m, r, \varphi)| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\mu + \xi)}, \tag{25}$$
$$k = \overline{0, (N-1)};\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi;\ -0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5,$$

и аргумент $X(k)$:

$$\arg X(k, m, r, \varphi) = \operatorname{arctg}[(A\sin\mu - B\sin\xi)/(A\cos\mu + B\cos\xi)]. \tag{26}$$

Выражение для относительной погрешности модуля $X(k)$ для действительной входной последовательности $x(n)$, сформированной из гармонического сигнала, получим из (25)

$$\gamma(k, m, r, \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2A\cdot B\cos(\mu + \xi)} - 1, \tag{27}$$

для $k = \overline{0, (N-1)}$; $-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5$; $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, где A, B, μ и ξ определяются из (21)—(24).

Выражение для абсолютной погрешности аргумента (при тех же ограничениях) запишется таким образом:

$$\lambda(k, m, r, \varphi) = \arg X(k, m, r, \varphi) - \varphi. \tag{28}$$

Выражение для приведенной погрешности аргумента $X(k)$ (в %) найдем из [2, (2.48)]:

$$\theta_\varphi(k, m, r, \varphi) = 50\lambda(k, m, r, \varphi)/\pi. \tag{29}$$

Из (27) следует, что относительная погрешность модуля $X(k)$ при действительной входной последовательности $x(n)$, сформированной из гармонического сигнала, существенно зависит от начальной фазы φ и от бина ДПФ k. Представляет интерес оценка математического ожидания $\gamma(k, m, r, \varphi)$ для случая, когда начальная фаза φ — случайная величина. Во многих приложениях спектральных измерений выполняется условие, когда в момент времени t_0, соответствующему началу измерения, начальная фаза φ с одинаковой вероятностью может иметь любое значение из интервала $(-\pi, \pi)$ [3].

Численным моделированием установлено, что оценкой математического ожидания $\gamma(k, m, r, \varphi)$ при равномерном законе изменения случайной величины φ является соотношение

$$M[\gamma(k, m, r, \varphi)] = \prod_{l=1}^{m}\cos[(2^{l-m-1})\pi r] - 1,\ -0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5, \tag{30}$$

т. е. величина математического ожидания относительной погрешности модуля $X(k)$ ДПФ в интервале $-0{,}5 \leqslant r \leqslant 0{,}5$ инвариантна к бину ДПФ k.

Список литературы: *Бергланд Г. Д.* Руководство к быстрому преобразованию Фурье / Зарубеж. радиоэлектроника. 1971. № 3. С. 52—72. 2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. М., 1978. 848 с. 3. *Тихонов В. И.* Нелинейные преобразования случайных процессов. М., 1986. 295 с.

Поступила в редколлегию 09.07.87