УДК 510.62

*Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО,* д-р техн. наук

# ЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Пусть $G$ — непустое множество, называемое *логическим полем* (кратко — просто *полем*). Элементы множества $G$ будем называть *логическими скалярами* (кратко — просто *скалярами*). Скаляры будем обозначать строчными греческими буквами. На множестве $G\times G$ определена операция $\alpha\vee\beta$ со значениями в множестве $G$, называемая *дизъюнкцией* или *логическим сложением* (кратко — просто *сложением*) скаляров $\alpha$ и $\beta$. Для сложения скаляров выполняются следующие аксиомы: *закон идемпотентности* — для любого $\alpha\in G$

$$\alpha\vee\alpha=\alpha, \tag{1}$$

*закон коммутативности* — для любых $\alpha,\ \beta\in G$

$$\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha, \tag{2}$$

*закон ассоциативности* — для любых $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in G$

$$\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma, \tag{3}$$

*закон нуля* — существует *единственный элемент* $0\in G$, такой, что для любого $\alpha\in G$

$$0\vee\alpha=\alpha, \tag{4}$$

*закон единицы* — существует единственный элемент $1\in G$, такой, что для любого $\alpha\in G$

$$1\vee\alpha=1. \tag{5}$$

Скаляр 0 называется *нулевым скаляром* или *нулем* поля $G$, скаляр 1 — *единичным скаляром* или *единицей* поля $G$. Из того, что нулевой скаляр, удовлетворяющий условию (4), существует, и из закона коммутативности (2) следует, что он единственный. В самом деле, пусть существуют два нулевых скаляра $0'$ и $0''$, так что для любого $\alpha\in G$ имеем $0'\vee\alpha=\alpha$ и $0''\vee\alpha=\alpha$. В частности, $0'\vee 0''=0''$ и $0''\vee 0'=0'$. В силу (2) отсюда вытекает $0'=0''$, что и требовалось доказать. Таким образом, требование единственности можно исключить из закона нуля без уменьшения логической силы системы аксиом (2), (4). Из того, что единичный скаляр, удовлетворяющий условию (5), существует, и из закона коммутативности (2) следует, что он единственный. В самом деле, пусть существуют два единичных скаляра $1'$ и $1''$, так что для любого $\alpha\in G$ имеем $1'\vee\alpha=1'$ и $1''\vee\alpha=1''$. В частности, $1'\vee 1''=1'$ и $1''\vee 1'=1''$. В силу (2) отсюда вытекает $1'=1''$, что и требовалось доказать. Таким образом, требование единственности можно исключить из закона единицы без уменьшения логической силы системы аксиом (2), (5).

На множестве $G \times G$ определена операция $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$ со значениями в множестве $G$, называемая *конъюнкцией* или *логическим умножением* (кратко — просто *умножением*) *скаляров* $\alpha$ и $\beta$. Для умножения скаляров выполняются следующие аксиомы:
*закон идемпотентности* — для любого $\alpha \in G$

$$\alpha\alpha = \alpha, \tag{6}$$

*закон коммутативности* — для любых $\alpha,\ \beta \in G$

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \tag{7}$$

*закон ассоциативности* — для любых $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in G$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma, \tag{8}$$

*закон нуля* — для любого $\alpha \in G$

$$0 \cdot \alpha = 0, \tag{9}$$

закон *единицы* — для любого $\alpha \in G$ $1 \cdot \alpha = \alpha$ **(10)**.

Следующие аксиомы связывают сложение и умножение скаляров:
*законы дистрибутивности* — для любых $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in G$

$$\alpha(\beta \vee \gamma) = \alpha\beta \vee \alpha\gamma \quad \textbf{(11)}, \quad \alpha \vee \beta\gamma = (\alpha \vee \beta)(\alpha \vee \gamma) \quad \textbf{(12)},$$

*законы элиминации* — для любых $\alpha,\ \beta \in G$

$$\alpha \vee \alpha\beta = \alpha \quad \textbf{(13)}, \quad \alpha(\alpha \vee \beta) = \alpha \quad \textbf{(14)}.$$

На множестве $G$ определена одноместная операция $\bar{\alpha}$ со значениями в множестве $G$, называемая *отрицанием скаляра* $\alpha$. Для отрицания скаляра выполняются следующие аксиомы:

*закон двойного отрицания* — для любого $\alpha \in G$ $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ **(15)**, *закон отрицания нуля* — $\bar{0} = 1$ **(16)**, *закон отрицания единицы* — $\bar{1} = 0$ **(17)**.

Следующие аксиомы связывают отрицание со сложением и умножением скаляров:
*закон исключенного третьего* — для любого $\alpha \in G$ $\alpha \vee \bar{\alpha} = 1$ **(18)**,
*закон противоречия* — для любого $\alpha \in G$ $\alpha\bar{\alpha} = 0$ **(19)**,
*законы де Моргана* — для любых $\alpha,\ \beta \in G$

$$\overline{\alpha \vee \beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \quad \textbf{(20)}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \vee \bar{\beta} \quad \textbf{(21)}.$$

Законы (1)—(21) будем называть *аксиомами поля*. Рассматривая логическое поле как абстрактную алгебраическую систему, его можно отождествить с *булевой алгеброй* [1, с. 19]. Не все аксиомы поля логически независимы друг от друга. Оставив только шесть аксиом (1)—(3), (11), (15), (20) и присовокупив к ним еще одну аксиому — для любых $\alpha,\ \beta \in G$ $(\alpha \vee \bar{\alpha})\beta = \beta$ **(21а)**, получаем более экономную систему аксиом, равносильную исходной [2, с. 135]. Отметим, что привлечение операции умножения скаляров при определении понятия логического поля необязательно, поскольку эту операцию можно выразить через операции дизъюнкции и отрицания посредством равенства $\alpha\beta=\overline{\bar\alpha\vee\bar\beta}$ **(21 б)**, вытекающего из (21) и (15). Реализуя эту возможность, можно определить логическое поле как множество $G$, на котором заданы операции $\vee$ и —, удовлетворяющие аксиомам (1) — (3), (11), (15) и (21, *а*). Тождество (20) в перечень аксиом можно не включать, поскольку оно вытекает из определения (21 *б*) и аксиомы (15). Из аксиом (11) и (21 *а*) нужно исключить знак конъюнкции с помощью равенства (21 *б*). Сделав это, аксиому (11) переписываем в виде $\alpha\vee\overline{\bar\beta\vee\bar\gamma}=\overline{\overline{\alpha\vee\beta}\vee\overline{\alpha\vee\gamma}}$ **(21 в)**, а аксиому (21 *а*) — в виде $\overline{\alpha\vee\bar\alpha}\vee\beta=\beta$ **(21 г)**.

Примером поля является *алгебра логики* [3, с. 7], представляющая собой множество $\{0, 1\}$ с заданными на нем операциями дизъюнкции $0\vee0=0$, $0\vee1=1$, $1\vee0=1$, $1\vee1=1$, конъюнкции $0\cdot0=0$, $0\cdot1=0$, $1\cdot0=0$, $1\cdot1=1$ и отрицания $\bar0=1$, $\bar1=0$. Нетрудно убедиться, что все аксиомы поля в алгебре логики выполняются. Другим примером поля может служить *алгебра конечных предикатов* [4, с. 15]. В ней в роли множества $G$ выступает система всех предикатов, заданных на каком-нибудь множестве букв. В роли операций $\vee$, $\wedge$ и $^-$ выступают дизъюнкция, конъюнкция и отрицание предикатов. Еще одним примером поля может служить *алгебра множеств* [5, с. 28]. В ней роль множества $G$ выполняет система всех подмножеств универсального множества. В роли операции сложения скаляров выступает объединение множеств, в роли операции умножения — пересечение множеств, в роли операции отрицания — дополнение множества.

Пусть $M$ — непустое множество, называемое *логическим векторным пространством* над полем $G$ (кратко — *векторное пространство, логическое пространство* или просто *пространство*). Элементы множества $M$ будем называть логическими векторами (кратко — просто *векторами*). Векторы будем обозначать строчными латинскими буквами. На множестве $M\times M$ определена операция $a\vee b$ со значениями в множестве $M$, называемая *дизъюнкцией* или *логическим сложением* (кратко — просто *сложением*) *векторов* $a$ и $b$. Для сложения векторов выполняются следующие аксиомы:

*закон идемпотентности* — для любого $a\in M$

$$a\vee a=a, \tag{22}$$

*закон коммутативности* — для любых $a, b\in M$

$$a\vee b=b\vee a, \tag{23}$$

*закон ассоциативности* — для любых $a, b, c\in M$

$$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c, \tag{24}$$

*закон нуля* — существует единственный элемент $0 \in M$ такой, что для любого $a \in M$

$$0 \vee a = a, \tag{25}$$

*закон единицы* — существует единственный элемент $1 \in M$, такой, что для любого $a \in M$

$$1 \vee a = 1. \tag{26}$$

Вектор 0 называется *нулевым вектором* или *нулем* пространства $M$, вектор 1 называется *единичным вектором* или *единицей* пространства $M$. Из того, что нулевой вектор, удовлетворяющий условию (25), существует, и из закона коммутативности (23) следует, что он единственный. То же справедливо и для единичного вектора. Доказательства этих утверждений аналогичны тем, которые приведены выше при установлении единственности нулевого и единичного скаляров. Таким образом, требование единственности можно исключить из законов нуля (25) и единицы (26) без уменьшения логической силы систем аксиом (23), (25) и (23), (26).

На множестве $G \times M$ определена операция $\alpha \wedge a = \alpha a$ со значениями в множестве $M$, называемая *конъюнкцией* или *логическим умножением* (кратко — просто *умножением*) *скаляра* $\alpha$ *на вектор* $a$. Операции умножения скаляров и умножения скаляра на вектор связывает друг с другом следующая аксиома:

*закон ассоциативности* — для любых $\alpha$, $\beta \in G$ и любого $a \in M$

$$(\alpha\beta)\, a = \alpha\, (\beta a). \tag{27}$$

Операции сложения скаляров и векторов и умножения вектора на скаляр связывают аксиомы:

*закон левой дистрибутивности* — для любых $\alpha$, $\beta \in G$ и любого $a \in M$

$$(\alpha \vee \beta)\, a = \alpha a \vee \beta a, \tag{28}$$

*закон правой дистрибутивности* — для любого $\alpha \in G$ и любых $a$, $b \in M$

$$\alpha\, (a \vee b) = \alpha a \vee \alpha b, \tag{29}$$

*закон нуля* — для любого $a \in M$

$$0 \cdot a = 0, \tag{30}$$

*закон единицы* — для любого $a \in M$

$$1 \cdot a = a. \tag{31}$$

Законы (1)—(31) будем называть *аксиомами пространства.* Операции сложения скаляров и векторов обозначаются нами одним и тем же знаком $\vee$. Такая омонимичность знака сложения не приводит, однако, к путанице, поскольку его смысл легко уточняется по контексту. То же относится к операциям умножения скаляров и умножения скаляра на вектор, а также к нулевым (единичным) скаляру и вектору.

Логическое пространство будем еще иначе называть *логической алгеброй*. Логическая алгебра имеет некоторое сходство с *линейной алгеброй* [6]. Введенному нами понятию логического пространства соответствует в линейной алгебре понятие *линейного пространства*. Науку, изучающую свойства линейного пространства, иногда называют *линейным анализом* [7]. По аналогии с этим учение о свойствах логического пространства будем называть *логическим анализом*. Термин «логический анализ» употребляет также Рассел [8, с. 842], понимая под ним науку, изучающую логическими средствами философские проблемы. Одной из таких проблем является изучение природы интеллекта. Нам представляется, что логическая алгебра может служить тем математическим аппаратом, с помощью которого можно будет успешно вести такое изучение. Логическая алгебра представляет собой результат развития алгебры идей [9—13], являющейся абстрактным эквивалентом алгебры конечных предикатов.

| $y \backslash x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $d$ | $d$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | $d$ | $d$ | $d$ | $d$ |

$x \vee y$

Рассмотрим пример логической алгебры, которую обозначим символом $A_0$. Пусть $G_0=\{0, 1\}$, $M_0=\{a, b, c, d\}$. Принимаем, что операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания скаляров совпадают с одноименными операциями алгебры логики. Операция дизъюнкции $x \vee y$ векторов $x$ и $y$ задана таблицей. Роль нуля играет вектор $a$, поскольку $a \vee x=x$ для любого $x \in M_0$. Роль единицы выполняет вектор $d$, поскольку $d \vee x=d$ для любого $x \in M_0$. Таким образом, $a=0$, $d=1$. Операция умножения скаляра на вектор в алгебре $A_0$ определяется законами нуля $0 \cdot x=0$ и единицы $1 \cdot x=x$, где $x$ — произвольный вектор из $M_0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при таком определении логической алгебры $A_0$ все аксиомы пространства выполняются. Отсюда следует, что система аксиом (1)—(31) непротиворечива.

*Комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (не обязательно различных) называется вектор $u$, равный

$$u=\alpha_1 a_1 \vee \alpha_2 a_2 \vee \ldots \vee \alpha_m a_m=\bigvee_{k=1}^{m} \alpha_k a_k.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — какие-нибудь скаляры, называемые *коэффициентами* комбинации. Например, в алгебре $A_0$ вектор $u=0 \cdot b \vee \vee 1 \cdot b \vee 1 \cdot c=b \vee c=d$ является комбинацией векторов $a_1=b$, $a_2=b$, $a_3=c$. Коэффициентами комбинации здесь служат скаляры $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$.

Комбинация комбинаций векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, очевидно, снова будет комбинацией тех же векторов. Например, пусть в алгебре $A_0$ векторы $u$ и $v$ являются следующими комбинациями векторов $a, b, c$: $u=0 \cdot a \vee 1 \cdot b \vee 0 \cdot c$, $v=1 \cdot a \vee 0 \cdot b \vee 0 \cdot c$. Пусть вектор

$w$, в свою очередь, есть комбинация векторов $u$ и $v$: $w=1\cdot u\vee 0\cdot v$. Тогда вектор $w$ тоже будет комбинацией векторов

$$a,\ b,\ c: w = 1\cdot(0\cdot a\vee 1\cdot b\vee 0\cdot c)\vee 0\cdot(1\cdot a\vee 0\cdot b\vee 0\cdot c) =$$

$$= 1\cdot 0\cdot a\vee 1\cdot 1\cdot b\vee 1\cdot 0\cdot c\vee 0\cdot 1\cdot a\vee 0\cdot 0\cdot b\vee 0\cdot 0\cdot c =$$

$$= 0\cdot a\vee 1\cdot b\vee 0\cdot c\vee 0\cdot a\vee 0\cdot b\vee 0\cdot c = (0\vee 0)\,a\vee(1\vee 0)\,b\vee(0\vee 0)\,c =$$

$$= 0\cdot a\vee 1\cdot b\vee 0\cdot c.$$

Комбинация векторов называется *тривиальной,* если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* — в противном случае. Тривиальная комбинация любых векторов, очевидно, равна нулю. В только что приведенном примере векторы $u$, $v$, $w$ являются нетривиальными комбинациями векторов $a$, $b$, $c$.

Если вектор $u$ является комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то будем говорить, что он от них *зависит.* Нулевой вектор, очевидно, зависит от любой непустой совокупности векторов. Если вектор $u$ невозможно представить в виде какой бы то ни было комбинации векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, то скажем, что он от них *независим.* О непустой системе векторов $\{a_k\}_{k=1}^{m}=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ говорим, что она *независима,* если каждый из векторов, входящих в систему, не зависит от остальных ее векторов. Любую систему, состоящую из одного ненулевого вектора, считаем по определению независимой. Вектор 0, очевидно, не входит ни в какую независимую систему векторов, в которой содержатся ненулевые векторы. Если хотя бы один из векторов, входящих в систему, зависит от остальных ее векторов, то будем говорить, что такая система векторов *зависима.* Если совокупность векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ независима, а совокупность векторов $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}\}$ зависима, то, очевидно, вектор $a_{m+1}$ есть комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Ясно также, что каждая подсистема независимой системы векторов тоже будет независимой. Образно говоря, независимость системы векторов является «наследственным» свойством. Например, в алгебре $A_0$ система всех ее векторов $\{a, b, c, d\}$ зависима, поскольку $0\cdot b\vee 0\cdot c=a$, $1\cdot b\vee 1\cdot c=d$. Система же векторов $\{b, c\}$ независима, так как вектор $c$ не зависит от вектора $b$ ($0\cdot b=a$, $1\cdot b=b$), а вектор $b$ не зависит от вектора $c$ ($0\cdot c=a$, $1\cdot c=c$). Подсистемы $\{b\}$ и $\{c\}$ системы векторов $\{b, c\}$ независимы.

Совокупность векторов называется *порождающей,* если все векторы пространства $M$ являются их комбинациями. Например, в алгебре $A_0$ порождающими будут следующие совокупности векторов: $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c\}$. Других порождающих совокупностей в алгебре $A_0$ нет. Любая минимальная (по числу векторов) порождающая совокупность векторов независима. Действительно, пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — минимальная порождающая совокупность векторов. Если она зависима, то хотя бы один из векторов, скажем $a_n$, есть комбинация остальных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, и поэтому любая комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть комбинация меньшей совокупности векторов $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$, которая тем самым оказывается порождающей. Например, в алгебре $A_0$ минимальной порождающей совокупностью векторов является множество $\{b, c\}$, вместе с тем эта совокупность независима. Любая максимальная (по числу векторов) независимая совокупность векторов является порождающей. Действительно, пусть $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — максимальная независимая совокупность и $b$ — любой вектор пространства. Тогда совокупность $\{a_1, a_2, ..., a_n, b\}$ не будет независимой и вектор $b$ есть комбинация векторов $a_1, a_2, ..., a_n$. Например, в алгебре $A_0$ максимальной независимой совокупностью является множество $\{b, c\}$, вместе с тем эта совокупность порождающая.

Логическое пространство $M$ называется *конечномерным,* если в нем существует конечное число $r$ векторов $e_1, e_2, ..., e_r$, через которые можно выразить в виде

$$x = \bigvee_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \tag{32}$$

любой вектор $x \in M$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ — некоторые коэффициенты. Иными словами, логическое пространство $M$ конечномерно, если для него существует хотя бы одна конечная порождающая система $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$. В противном случае логическое пространство называется *бесконечномерным.* Например, пространство $M_0$ конечномерно, поскольку в нем имеются конечные порождающие системы.

Наименьшее из чисел $r$, удовлетворяющее условию (32), называется *размерностью* или *числом измерений* логического пространства. Если размерность логического пространства $M$ равна $n$, то будем говорить, что пространство $M$ $n$-мерно. Если пространство $M$ $n$-мерно, то в нем найдется $n$ независимых векторов, а любые $n+1$ векторов этого пространства будут зависимыми. Например, размерность логического пространства $M_0$ равна двум. Таким образом, пространство $M_0$ двумерно. В $n$-мерном логическом пространстве любая порождающая совокупность векторов, содержащая $n$ элементов, называется *базисом.* Например, для пространства $M_0$ в роли базиса можно использовать совокупность векторов $\{b, c\}$. Других базисов в пространстве $M_0$ нет. Ясно, что любое конечное логическое пространство конечномерно и в нем существует конечный базис.

Пусть $\Gamma$ — какая-нибудь непустая система векторов. *Оболочкой* системы $\Gamma$ называется множество всех комбинаций векторов системы $\Gamma$. Оболочка системы $\Gamma$ обозначается через $L(\Gamma)$. Ясно, что оболочкой, порождающей системы векторов пространства $M$, является все пространство $M$. Подсистема $\Gamma_0$ системы $\Gamma$ называется *полной,* если $\Gamma \subseteq L(\Gamma_0)$, т. е. если каждый вектор системы $\Gamma$ является комбинацией векторов из $\Gamma_0$. Каждая подсистема векторов, содержащая полную подсистему, также является полной подсистемой. Полнота тоже является наследственным свойством, но уже по отношению к расширению, а не к сужению системы. Например, в алгебре $A_0$ оболочкой системы $\{a, d\}$ будет та же система $\{a, d\}$, поскольку $0 \cdot a \vee 0 \cdot d = a \vee a = a$, $0 \cdot a \vee 1 \cdot d = a \vee d = d$, $1 \cdot a \vee 0 \cdot d = a \vee a = a$, $1 \cdot a \vee 1 \cdot d = a \vee d = d$. Оболочкой системы $\{b, c\}$ является все пространство $M_0$ ($0 \cdot b \vee 0 \cdot c = a \vee a = a$, $1 \cdot b \vee 0 \cdot c = b \vee \vee a = b$, $0 \cdot b \vee 1 \cdot c = a \vee c = c$, $1 \cdot b \vee 1 \cdot c = b \vee c = d$). Множество векторов $\{b, c\}$ является полной подсистемой пространства $M_0$. Полными подсистемами пространства $M_0$ будут также множества векторов $\{a, b, c\}$ и $\{b, c, d\}$, поскольку они являются расширениями множества $\{a, b\}$. Множество же $\{a, d\}$ не будет полной подсистемой для пространства $M_0$.

**Список литературы:** 1. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М., 1969. 318 с. 2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М., 1970. 392 с. 3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М., 1979. 272 с. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х., 1984. 142 с. 5. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. М., 1968. 231 с. 6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М., 1975. 400 с. 7. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. М., 1969. 475 с. 8. *Рассел Б.* История западной философии. М., 1959. 932 с. 9. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре идей. К., 1989. 18 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 136—Ук89. 10. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Изоморфизм алгебр идей. К., 1988. 13 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 2280—Ук88. 11. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Числовая интерпретация алгебры идей. К., 1988. 14 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 2282—Ук88. 12. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Частичный порядок в алгебре идей. К., 1989. 12 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 131—Ук89. 13. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Содержательные интерпретации алгебры идей. К., 1988. 15 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 2283—Ук88.

*Поступила в редколлегию 09.01.90*

УДК 510.62

*Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО*, д-р техн. наук

## НЕПОЛНЫЕ И ПОЛНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $M$—$n$-мерное *логическое пространство* [1] над полем $G$ и $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — его базис. Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ называются базисными. Любой вектор $x \in M$ может быть представлен в виде комбинации базисных векторов

$$x = \xi_1 e_1 \vee \xi_2 e_2 \vee ... \vee \xi_n e_n, \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — коэффициенты комбинации, называемые *координатами* вектора $x$. Представление вектора $x$ в виде комбинации (1) базисных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$, будем называть его *разложением* по базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. При заданном базисе каждый вектор логического пространства однозначно определяется его координатами. Можно ли утверждать обратное, т. е. что при заданном базисе любому вектору $x$ из $M$ соответствует единственный