

УДК 621.372

Ю. М. ПЕНКИН, канд. физ.-мат. наук, *Л. П. ЯЦУК*, канд. физ.-мат. наук

**ТЕНЗОР ГРИНА ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА
ДЛЯ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕМОВ
СО СФЕРИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ**

Тензорная функция Грина широко используется при решении внутренних и внешних задач электродинамики. Особо важную роль она играет, когда необходимо найти поле в области источ-

ника. Очень часто такие задачи сводятся к решению векторного уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \vec{F} + k^2 \vec{F} = \vec{f}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \text{rot rot } \vec{F}$, \vec{f} — вектор, обусловленный наличием сторонних токов, $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ — волновое число, ω — круговая частота, ϵ и μ соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. В качестве неизвестной векторной функции \vec{F} в (1) могут рассматриваться электрический ($\vec{\Pi}^{\text{э}}$) или магнитный ($\vec{\Pi}^{\text{м}}$) векторы Герца, либо векторы электрического (\vec{E}) или магнитного (\vec{H}) полей [1]. В первом случае $\vec{f} = -\vec{j}^{\text{э}(\text{м})}/i\omega\epsilon(\mu)$, во втором $\vec{f} = -i\omega\mu(\epsilon)\vec{j}^{\text{э}(\text{м})} + \text{grad}(\text{div } \vec{j}^{\text{э}(\text{м})})/i\omega\epsilon(\mu) \mp \text{rot } \vec{j}^{\text{э}(\text{м})}$. Здесь и далее $\epsilon(\mu)$ обозначает либо ϵ , либо μ . Поскольку при решении волнового уравнения (1) для полей в его правой части фигурируют комбинации дифференциальных операторов, действующих на сторонние токи $\vec{j}^{\text{э}(\text{м})}$, в большинстве задач предпочтительным оказывается использование уравнения Гельмгольца для векторных потенциалов, решение которого рассматривается в работе.

Для координатных задач, когда компоненты тензора Грина удовлетворяют на граничных поверхностях тем же однородным граничным условиям, что и искомая векторная функция, решение уравнения (1) может быть представлено интегралом:

$$\vec{\Pi}^{\text{э}(\text{м})}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi i\omega\epsilon(\mu)} \int_V \vec{j}^{\text{э}(\text{м})}(\vec{R}') \hat{G}^{\text{э}(\text{м})}(\vec{R}/\vec{R}') dV. \quad (2)$$

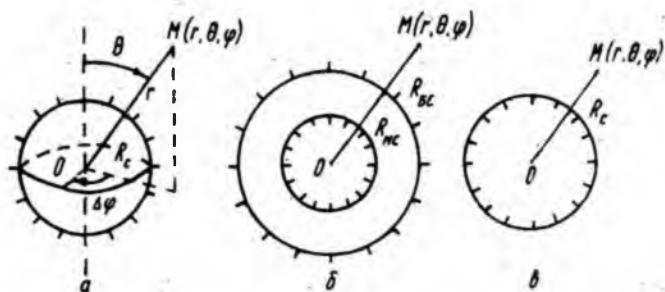
Здесь V — электродинамический объем, в котором распределены сторонние токи, а $\hat{G}^{\text{э}(\text{м})}(\vec{R}/\vec{R}')$ — тензорная функция Грина соответственно электрического или магнитного типов, удовлетворяющая тензорному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \hat{G}(\vec{R}/\vec{R}') + k^2 \hat{G}(\vec{R}/\vec{R}') = -4\pi \hat{I} \delta(\vec{R}, \vec{R}'), \quad (3)$$

где \hat{I} — единичный тензор; $\delta(\vec{R}, \vec{R}')$ — трехмерная дельта-функция Дирака, записанная в используемой системе координат.

В работах [2; 3] построены тензорные функции Грина уравнений Гельмгольца для замкнутых и открытых областей, границы которых образованы комбинациями координатных поверхностей обобщенных криволинейных ортогональных цилиндрических систем координат (в том числе прямоугольных). В случае областей, границы которых имеют сферическую форму, выражения для компонент тензора Грина в литературе отсутствуют. Известные решения задачи возбуждения идеально проводящего шара [1; 4] получены методом собственных функций. Для решения более

широкого класса задач целесообразно построение тензорной функции Грина для областей с идеально проводящими сферическими границами, такими как сферический резонатор и резонатор, ограниченный двумя концентрическими сферами (рисунок, позиции, а, б соответственно); безграничное пространство вне



сферы—рисунок, позиция *v*. На первом этапе имеет смысл принять упрощающее предположение о том, что рассматриваемые объемы заполнены однородной изотропной средой. Этому и посвящено настоящее сообщение.

Для построения тензорной функции Грина воспользуемся методом, разработанным в работе [5]. Известно [5], что полная система собственных векторных функций уравнения Гельмгольца, с помощью которой и строятся компоненты тензора Грина, в сферической системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{L}(\vec{R}) &= \text{grad } \varphi(\vec{R}); \\ \vec{M}(\vec{R}) &= \text{rot}(\vec{r}^0 r \psi(\vec{R})); \\ \vec{N}(\vec{R}) &= \frac{1}{k} \text{rot rot}(\vec{r}^0 r \chi(\vec{R})), \end{aligned} \quad (4)$$

где \vec{R} — радиус-вектор, определяющий положение точки наблюдения; коэффициент $1/k$ введен для сохранения размерности функции; орт \vec{r}^0 направлен вдоль радиуса; скалярные функции $\varphi(\vec{R})$, $\psi(\vec{R})$, и $\chi(\vec{R})$ удовлетворяют идентичным однородным скалярным уравнениям Гельмгольца. Граничные условия для $\varphi(\vec{R})$, $\psi(\vec{R})$ и $\chi(\vec{R})$ диктуются граничными условиями, которым должны удовлетворять собственные векторные функции (4).

Если скалярные функции $\varphi(\vec{R})$, $\psi(\vec{R})$ и $\chi(\vec{R})$ представить в виде произведений радиальных функций $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$, зависящих только от координаты r , на функции $\varphi_*(\theta, \varphi)$, $\psi_*(\theta, \varphi)$

и $\chi_*(\theta, \varphi)$, которые зависят только от угловых координат, и подставить эти произведения в (4), то можно получить три типа векторных функций:

$$[\nabla_* \chi_*(\theta, \varphi), \vec{r}^0], \nabla_* \chi_*(\theta, \varphi), \vec{r}^0 \chi_*(\theta, \varphi). \quad (5)$$

Они составляют полную систему собственных двумерных векторных функций, зависящих только от угловых координат [5].

Здесь $\nabla_* u = \frac{\partial u}{\partial \theta} \theta^0 + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \varphi^0$. При этом функции (5) строятся на базе только одной скалярной функции χ_* , поскольку две другие оказываются ей тождественно равными. Эта функция удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta_* \chi_*(\theta, \varphi) + n(n+1) \chi_*(\theta, \varphi) = 0, \quad (6)$$

где

$$\Delta_* \chi_*(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \chi_*(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \chi_*(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2},$$

которое решается методом разделения переменных.

Положив $\chi_*(\theta, \varphi) = \chi_1(\theta) \chi_2(\varphi)$, из (6) получим

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\chi_1(\theta)}{d\theta} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \chi_1(\theta) = 0; \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \chi_2(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \chi_2(\varphi) = 0. \quad (7a)$$

Параметры $n(n+1)$ и m , являющиеся постоянными разделения, определяются из физического требования однозначности и ограниченности поля в любой точке пространства. Функция $\chi_2(\varphi)$ должна быть периодической функцией φ с периодом 2π , следовательно, целыми числами $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Решением уравнения (7a) являются присоединенные функции Лежандра первого и второго рода. Условию ограниченности поля при всех углах θ , включая $\theta=0$ и $\theta=\pi$, удовлетворяют функции первого рода $P_n^m(\cos \theta)$. Таким образом,

$$\chi_*(\theta, \varphi) = \sum_{n,m} \chi_{nm}(\theta, \varphi) = \sum_{n,m} P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

где $n=0, 1 \dots \infty$, $m=0, 1 \dots \infty$. При этом учитываются только линейно не зависящие решения.

Следует сказать, что при решении уравнения (6) в качестве граничных условий мы использовали только условия периодичности функций $\chi_2(\varphi)$ и конечности функций $\chi_1(\theta)$, поэтому для построения компонент тензора Грина как электрического, так и магнитного типов, будет использоваться одна и та же система двумерных векторных функций (5).

Согласно [5], тензорную функцию Грина ищем в виде

$$\hat{G}(\vec{R}/\vec{R}') = \sum_{n,m} \{ \vec{F}_{nm}(\vec{R}', r, r') \cdot [\nabla_* \chi_{nm}(\theta, \varphi), \vec{r}^0] + \vec{G}_{nm}(\vec{R}', r, r') \circ \nabla_* \chi_{nm}(\theta, \varphi) + \vec{H}_{nm}(\vec{R}', r, r') \cdot \vec{r}^0 \chi_{nm}(\theta, \varphi) \}, \quad (9)$$

где « \circ » — символ тензорного перемножения. Неизвестные векторные коэффициенты \vec{F}_{nm} , \vec{G}_{nm} и \vec{H}_{nm} зависят от штрихованных угловых координат \vec{R}' и координат r и r' . Отметим, что используемые в (9) векторные функции (5) удовлетворяют условиям ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi), \vec{r}^0] \vec{r}^0 x_{nm}(\theta, \varphi) ds &= 0; \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi) \vec{r}^0 x_{nm}(\theta, \varphi) ds &= 0; \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi), \vec{r}^0] \nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi) ds &= 0; \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{r}^0 x_{nm}(\theta, \varphi) \vec{r}^0 x_{lk}(\theta, \varphi) ds &= N \delta_{ln} \delta_{km}; \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi) \nabla_* x_{lk}(\theta, \varphi) ds &= N \delta_{ln} \delta_{km} C; \\ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [\nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi), \vec{r}^0] [\nabla_* x_{lk}(\theta, \varphi), \vec{r}^0] ds &= N \delta_{ln} \delta_{km} C, \end{aligned} \quad (10)$$

где ds — элемент сферической поверхности; N — норма соответствующих функций (8); C — постоянный коэффициент.

Для определения коэффициентов \vec{F}_{nm} , \vec{G}_{nm} и \vec{H}_{nm} поступаем стандартным образом. Подставим функцию Грина (9) в уравнение (3). Оператор Δ представим в виде суммы радиального и углового операторов:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \tilde{\Delta}_*, \quad \text{где } \Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right);$$

$\tilde{\Delta}_*$ — угловой оператор. Изменяя порядок суммирования и дифференцирования, а также последовательность действия операторов ∇_* и $\tilde{\Delta}_*$, получаем с учетом (6) следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \left\{ \left(\Delta_r + k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \vec{F}_{nm}(\vec{R}', r, r') \circ [\nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi), \vec{r}^0] + \right. \\ \left. + \left(\Delta_r + k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \vec{G}_{nm}(\vec{R}', r, r') \circ \nabla_* x_{nm}(\theta, \varphi) + \right. \\ \left. + \left(\Delta_r + k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \vec{H}_{nm}(\vec{R}', r, r') \circ \vec{r}^0 x_{nm}(\theta, \varphi) \right\} = \\ = -4\pi \tilde{\Delta} (r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') / (r^2 \sin \theta). \end{aligned} \quad (11)$$

Используя условия ортогональности (10) собственных векторных функций (5), в результате стандартной процедуры из работы [5] получаем равенства для определения неизвестных векторных коэффициентов \bar{F}_{nm} , \bar{G}_{nm} и \bar{H}_{nm} . Представим эти коэффициенты в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{nm}(\bar{R}_*, r, r') &= \bar{F}_{nm}(\bar{R}_*) f_{nm}(r, r'); \quad \bar{G}_{nm}(\bar{R}_*, r, r') = \\ &= \bar{G}_{nm}(\bar{R}_*) g_{nm}(r, r'); \quad \bar{H}_{nm}(\bar{R}_*, r, r') = \bar{H}_{nm}(\bar{R}_*) h_{nm}(r, r'). \end{aligned} \quad (12)$$

Из полученных равенств находим вид векторных функций $\bar{F}_{nm}(\bar{R}_*)$, $\bar{G}(\bar{R}_*)$, $\bar{H}(\bar{R}_*)$. Неизвестные скалярные функции f_{nm} , g_{nm} и h_{nm} являются решениями уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] r^2 u = 4\pi \delta(r-r') \quad (13)$$

при необходимых граничных условиях для $u = u(r, r')$, которые оказываются одного типа для функций f_{nm} и g_{nm} и другого — для функций h_{nm} . Это ведет к тому, что $f_{nm} = g_{nm} = u_2$, а $h_{nm} = u_1$.

Подставляя найденные векторные коэффициенты (12) в представление для тензорной функции Грина (9), после ряда несложных преобразований получаем компоненты тензора Грина

$$\begin{aligned} G_{11}^{(M)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{u_1^{(M)} (2 - \delta_{0m})}{2C_{nm}} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \cos m(\varphi - \varphi'); \\ G_{22}^{(M)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{u_2^{(M)} (2 - \delta_{0m})}{2C_{nm} \sin \theta \sin \theta'} \left[m^2 P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \sin \theta' \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{dP_n^m(\cos \theta')}{d\theta'} \right] \frac{\cos m(\varphi - \varphi')}{n(n+1)}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} G_{23}^{(M)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{m u_2^{(M)}}{n(n+1) C_{nm}} \left[\frac{1}{\sin \theta'} \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} P_n^m(\cos \theta') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{dP_n^m(\cos \theta')}{d\theta'} \right] \sin m(\varphi - \varphi'); \end{aligned}$$

$$G_{32}^{(M)} = -G_{23}^{(M)}; \quad G_{33}^{(M)} = G_{22}^{(M)}.$$

Здесь

$$C_{nm} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Универсальность выражений (14) заключается в том, что они содержат зависимости $u_{1(2)}^{(M)}$ от радиальных координат (r, r') в неявном виде. Их следует находить из уравнения (13), формулируя граничные условия в соответствии с поведением на граничных сферических поверхностях тангенциальных и нормальных компонент искомого векторного поля. Из (11) следует, что функции u_2 описывают зависимости от координат (r, r') тангенциальных компонент поля, а u_1 — нормальных.

Вид граничных условий для тангенциальных и нормальных составляющих электрического и магнитного векторов Герца находим исходя из того, что на идеально проводящей поверхности

S должны выполняться условия $E_{\tau}|_S = 0$ и $\frac{\partial H_{\tau}}{\partial n}|_S = 0$ (индексом « τ »

обозначены тангенциальные составляющие векторов \vec{E} , \vec{H}). На основании этих граничных условий формулируем граничные условия для скалярных функций $u_1^{(M)}$, $u_2^{(M)}$:

$$\frac{\partial u_1^{(M)}}{\partial r}|_S = u_2^{(M)}|_S = 0; \quad u_1^{(M)}|_S = \frac{\partial (ru_2^{(M)})}{\partial r}|_S = 0.$$

Следовательно, уравнение (13) относительно u мы должны решить для трех типов однородных граничных условий, сформулированных для искомой функции на идеально проводящих сферических поверхностях: I — $u=0$; II — $\partial u/\partial r=0$; III — $\partial(ru)/\partial r=0$. При этом в случае сферического резонатора накладываются также условия ограниченности функции u в его центре, в случае бесконечного пространства вне сферы — условия излучения на бесконечности.

Приведем решение уравнения (13) для рассматриваемых краевых задач (рисунок) при удовлетворении граничных условий I, II и III на сферических граничных поверхностях.

Сферический резонатор (рисунок, позиция а)

$$I \quad u = \begin{cases} 4\pi k j_n(kr) \gamma(R_c, r') / j_n(kR_c), & r < r'; \\ 4\pi k [\gamma(r', r) + j_n(kr) \gamma(R_c, r') / j_n(kR_c)], & r > r'; \end{cases} \quad (15)$$

$$II \quad u = \begin{cases} -4\pi k j_n(kr) \gamma'(r', R_c) / j'_n(kR_c), & r < r'; \\ 4\pi k [\gamma(r', r) - j_n(kr) \gamma'(r', R_c) / j'_n(kR_c)], & r > r'; \end{cases} \quad (15a)$$

$$III \quad u = \begin{cases} \alpha j_n(kr), & r < r'; \\ 4\pi k \gamma(r', r) + \alpha j_n(kr), & r > r', \end{cases} \quad (15b)$$

где

$$\alpha = 4\pi k \left[y_n(kr') - j_n(kr') \frac{ny_n(kR_c) - kR_c y_{n-1}(kR_c)}{nj_n(kR_c) - kR_c j_{n-1}(kR_c)} \right]$$

Здесь и далее приняты обозначения:

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} I_{n+1/2}(kr); \quad y_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{n+1/2}(kr);$$

$$h_n^{(2)}(kr) = j_n(kr) - iy_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr),$$

где $I_{n+1/2}(kr)$ — функция Бесселя; $N_{n+1/2}(kr)$ — функция Неймана; $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$ — функция Ханкеля; $f' = df/dr$ (конкретные

значения аргументов функции, указанные в скобках, следует вносить в выражения после взятия производной);

$$\gamma(R_1, R_2) = j_n(kR_1) y_n(kR_2) - y_n(kR_1) j_n(kR_2);$$

$$\gamma'(R_1, R_2) = j_n(kR_1) y'_n(kR_2) - y_n(kR_1) j'_n(kR_2).$$

Резонатор между двумя сферами (рисунок, позиция б)

$$I \quad u = \begin{cases} 4\pi k \gamma(r', R_{6c}) \gamma(r, R_{mc}) / \gamma(R_{mc}, R_{6c}), & r < r'; \\ 4\pi k [\gamma(r', r) + \gamma(r', R_{6c}) \gamma(r, R_{mc}) / \gamma(R_{mc}, R_{6c})], & r > r'; \end{cases} \quad (16)$$

$$II \quad u = \begin{cases} 4\pi k \gamma'(r', R_{6c}) \gamma'(r, R_{mc}) / \gamma''(R_{mc}, R_{6c}), & r < r'; \\ 4\pi k [\gamma'(r', r) + \gamma'(r', R_{6c}) \gamma'(r, R_{mc}) / \gamma''(R_{mc}, R_{6c})], & r > r'; \end{cases} \quad (16a)$$

где

$$\gamma''(R_{mc}, R_{6c}) = j'_n(kR_{mc}) y'_n(kR_{6c}) - j'_n(kR_{6c}) y'_n(kR_{mc});$$

$$III \quad u = \begin{cases} \alpha j_n(kr) + \beta y_n(kr), & r < r'; \\ 4\pi k \gamma(r', r) + \alpha j_n(kr) + \beta y_n(kr), & r > r'; \end{cases} \quad (166)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi k f(y, R_{mc}) [y_n(kr') f(j, R_{6c}) - j_n(kr') f(y, R_{6c})]}{f(j, R_{6c}) f(y, R_{mc}) - f(j, R_{mc}) f(y, R_{6c})},$$

$$\beta = -\frac{4\pi k f(j, R_{mc}) [y_n(kr') f(j, R_{6c}) - j_n(kr') f(y, R_{6c})]}{f(j, R_{6c}) f(y, R_{mc}) - f(j, R_{mc}) f(y, R_{6c})},$$

$$f(Z, R) = kR Z_{n-1}(kR) - n Z_n(kR).$$

Пространство вне сферы (рис. в).

$$I \quad u = \begin{cases} 4\pi k \gamma(r, R_c) h_n^{(2)}(kr') / h_n^{(2)}(kR_c), & r < r'; \\ 4\pi k \gamma(r', R_c) h_n^{(2)}(kr) / h_n^{(2)}(kR_c), & r > r'; \end{cases} \quad (17)$$

$$II \quad u = \begin{cases} 4\pi k \gamma'(r, R_c) h_n^{(2)}(kr') / \left[\frac{n}{R_c} h_n^{(2)}(kR_c) - k h_{n+1}^{(2)}(kR_c) \right], & r < r'; \\ 4\pi k \gamma'(r', R_c) h_n^{(2)}(kr) / \left[\frac{n}{R_c} h_n^{(2)}(kR_c) - k h_{n+1}^{(2)}(kR_c) \right], & r > r'; \end{cases} \quad (17a)$$

$$\text{III} \quad u = \begin{cases} 4\pi k h_n^{(2)}(kr') [h_n^{(2)}(kr) \alpha - y_n(kr)], & r < r'; \\ 4\pi k h_n^{(2)}(kr) [h_n^{(2)}(kr') \alpha - y_n(kr')], & r > r', \end{cases} \quad (176)$$

где

$$\alpha = (kR_c \nu_{n-1}(kR_c) - n y_n(kR_c)) / (kR_c h_{n-1}^{(2)}(kR_c) - n h_n^{(2)}(kR_c)).$$

Таким образом, подставляя соответствующие выражения для $u_{\alpha(2)}^{(M)}$ из (15) — (17) в (14), получаем в окончательном виде компоненты тензора Грина для данных электродинамических объемов.

Правильность полученных выражений проверена в случае бесконечного пространства вне сферы (рисунок, позиция в). При этом рассмотрено возбуждение сферической антенны аксиально симметричным магнитным током, расположенным на поверхности антенны в экваториальной плоскости. Полученные выражения для полей тождественно совпадают с результатами решения аналогичной задачи [4] методом собственных функций. Отметим, что сравнение полученных с помощью функции Грина (14) выражений для полей при решении задач возбуждения пространства вне сферы (шара) диполями и щелью с результатами работы [1] затруднено, поскольку в работе [1] они представлены в виде суммы первичного (падающего) и вторичного (отраженного от шара) полей. При использовании функции Грина такое разделение отсутствует.

В работе [1] показано, что формулы (14) оказываются удобными при определении векторов Герца, а следовательно, и электромагнитных полей для рассмотренных электродинамических объемов со сферическими границами небольших электрических диаметров (соизмеримых с длиной волны). Для сфер с большими электрическими диаметрами получающиеся в (14) ряды сходятся медленно, что приводит к необходимости их модификации. Однако для ряда задач анализа резонансных антенных СВЧ устройств, накладываемые на размеры диаметров сфер ограничения (в смысле удовлетворительной сходимости рядов в (14)) выполняются.

Список литературы: 1. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л., 1967. 376 с. 2. Марков Г. Т., Панченко Б. А. Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов//Изв. вузов. Радиотехника. 1964. Т. 7. С. 34—41. 3. Панченко Б. А. Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей//Радиотехника. 1970. Вып. 15. С. 82—91. 4. Рамо С., Уиннери Д. Поля и волны в современной радиотехнике. М.; Л. 1948. 631 с. 5. Морс Ф. М., Фейбах Г. Методы теоретической физики. В М., 1958. Т. 1. 520 с.

Поступила в редколлегию 24.03.89