

УДК 621.391

И. Н. ПРЕСНЯКОВ, канд. техн. наук, *Ю. В. АФАНАСЬЕВ*

ПРИМЕНЕНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО АЛГОРИТМА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ АДАПТИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Один из возможных способов адаптивной фильтрации состояния динамических систем в условиях параметрической априорной неопределенности относительно их моделей реализуется в методе максимального правдоподобия (ММП) [1]. Применение этого метода в общем случае приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно оценок векторов состояния и неизвестных параметров модели. Решение такой системы может быть получено с помощью различных рекуррентных процедур [1; 2], некоторые из которых позволяют

раздельно формировать эти оценки [1; 3]. Вычисление оценок происходит раздельно, если для фильтрации состояния используется текущее измерение и оценка параметров модели с предыдущего шага. Возможен также альтернативный вариант, когда оценивание параметров выполняется на основе текущего измерения и предыдущей оценки вектора состояния.

В работе [3] предложен рекуррентный адаптивный алгоритм фильтрации при линейных моделях состояния и наблюдения в условиях отсутствия шума системы. Незвестной предполагается только матрица ковариаций шума измерения. В статье рассмотрим случай, когда нелинейная динамическая система с K -мерным вектором состояния \mathbf{x}_n и M -мерным вектором наблюдения \mathbf{y}_n находится под воздействием случайных возмущений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= F(\mathbf{x}_{n-1}, \alpha) + \xi_n; \\ \mathbf{y}_n &= H(\mathbf{x}_n, \beta) + \eta_n, \end{aligned} \quad (1)$$

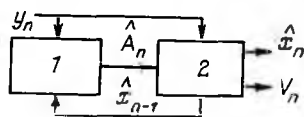


Рис. 1

а неизвестными могут быть матрицы ковариаций шумов $E[\xi_i \xi_j^T] = V_1 \delta(i - j)$; $E[\eta_i \eta_j^T] = V_2 \delta(i - j)$ и параметры α , β матриц $F(\cdot, \alpha)$ и $H(\cdot, \beta)$

Для совокупности неизвестных параметров введем обозначение

$$A = \{\alpha^T; \beta^T; v_1(l, j; l, j = \overline{1, K}); v_2(l, j; l, j = \overline{1, M})\}.$$

Здесь v_1, v_2 — элементы матриц V_1, V_2 . Найдем алгоритм функционирования адаптивного фильтра в предположении, что каждое новое измерение \mathbf{y}_n последовательно используется сначала для уточнения вектора параметров A (формирования оценки \hat{A}_n в блоке 1), затем, совместно с \hat{A}_n , для фильтрации состояния системы \mathbf{x}_n в блоке 2 (рис. 1).

Оценка вектора параметров \hat{A}_n в ММП находится в результате решения уравнения максимального правдоподобия. Функцию правдоподобия, соответствующую (1), представим в виде произведения

$$p(\mathbf{y}^n | A) = p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}^{n-1}, A) p(\mathbf{y}^{n-1} | A), \quad (2)$$

где $\mathbf{y}^n = \{\mathbf{y}_i, i = \overline{1, n}\}$. Для установившегося режима фильтрации можно записать

$$p(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}^{n-1}, A) = p(\mathbf{y}_n | \hat{\mathbf{x}}_{n-1}, A), \quad (3)$$

где учтено, что оценка $\hat{\mathbf{x}}_{n-1}$ является достаточной статистикой вы-

борки y_n [2]. Одношаговую условную функцию правдоподобия (3) определим как

$$p(y_n | \hat{x}_{n-1}, A) = \int p(y_n | x_n, A) p(x_n | \hat{x}_{n-1}, A) \prod_{i=1}^K dx_{n,i}. \quad (4)$$

Здесь

$$p(x_n | \hat{x}_{n-1}, A) = \int p(x_n | x_{n-1}, A) p(x_{n-1} | \hat{x}_{n-1}, A) \prod_{i=1}^K dx_{n-1,i}; \quad (5)$$

$x_{n,i}, x_{n-1,i}$ — элементы векторов x_n, x_{n-1} . Интегрирование в выражениях (4), (5) и далее выполняется по всей области существования соответствующих переменных.

На основании (1) запишем

$$p(y_n | x_n, A) = N[H(x_n, \beta); V_2]; \quad (6)$$

$$p(x_n | x_{n-1}, A) = N[F(x_{n-1}, \alpha); V_1]. \quad (7)$$

Плотность вероятности $p(x_{n-1} | \hat{x}_{n-1}, A)$, входящая в (5), зависит от способа вычисления оценки \hat{x}_{n-1} . Если фильтрация выполняется в линейном приближении (расширенный фильтр Калмана и др.), то

$$p(x_{n-1} | \hat{x}_{n-1}, A) = N[\hat{x}_{n-1}(A); V_{n-1}(A)], \quad (8)$$

где $V_{n-1}(\cdot)$ — матрица апостериорных дисперсий оценки \hat{x}_{n-1} .

Для точного вычисления выражений (4), (5) с учетом (6)...(8) необходимо знать конкретный вид функций $F(x_{n-1}, \cdot)$ и $H(x_n, \cdot)$. Так, в случае линейных моделей состояния и наблюдения

$$x_n = F(\alpha) x_{n-1} + \xi_n; \quad y_n = H(\beta) x_n + \eta_n \quad (9)$$

интегрирование приводит к следующей одношаговой условной функции правдоподобия:

$$p(y_n | \hat{x}_n, A) = N\{H(\beta)F(\alpha)\hat{x}_{n-1}; V_2 + H(\beta)[V_1 + F(\alpha)V_{n-1}F^T(\alpha)]H^T(\beta)\}. \quad (10)$$

При нелинейных функциях $F(x_{n-1}, \cdot)$ и $H(x_n, \cdot)$ интегралы (4), (5), как правило, не удается привести к табличным. Поэтому целесообразно выполнить приближенное интегрирование в общем виде путем разложения этих функций в ряд Тейлора. Если при этом ограничиться линейными и квадратичными членами ряда, получим интеграл вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x)} dx. \quad (11)$$

В приложении показано, что при $\alpha_4 > 0$

$$I \approx \frac{\sqrt{n_2}}{2} e^{\alpha_4(n_2^3/3 - n_0)} \left\{ \left(1 - \frac{n_2 n_1^2 \alpha_4^2}{32}\right) K_{\frac{1}{4}}(z) + \frac{n_2 n_1^2 \alpha_4^2}{32} K_{\frac{3}{4}}(z) \right\}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} z &= \alpha_4 \frac{n_2^2}{8}; \quad n_0 = \frac{-3\alpha_3^4}{256\alpha_4^4} + \frac{1}{16} \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\alpha_4^3} - \frac{1}{4} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_4^2}; \\ n_1 &= \frac{\alpha_3^3}{\alpha_4^3} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_4^2} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4}; \quad n_2 = -\frac{3}{8} \frac{\alpha_3^2}{\alpha_4^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_4}; \end{aligned} \quad (13)$$

$K_\mu(z)$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода порядка μ (функция Макдональда).

На основе (11) — (13) можно получить функцию правдоподобия (3) для широкого класса нелинейных моделей. В частности при подстановке в (13)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -[(y_n - y_n^s)(H' - H''x_n^s)\sigma^2 + x_n^s\sigma_1^2]/(\sigma^2\sigma_2^2); \\ \alpha_2 &= \{[(H' - H''x_n^s)^2 - (y_n - y_n^s)H'']\sigma^2 + \sigma_2^2\}/(2\sigma^2\sigma_2^2); \\ \alpha_3 &= (H' - H''x_n^s)H''/(2\sigma_2^2); \quad \alpha_4 = (H'')^2/(8\sigma_2^2) \end{aligned} \quad (14)$$

плотность вероятности $p(y_n | \hat{x}_{n-1}, A) = I \cdot e^{-\alpha_0}/(2\pi\sigma_2)$ является искомой функцией правдоподобия для распространенной на практике модели в виде нормальной марковской последовательности $x_n = F(\alpha) \times x_{n-1} + \xi_n$ при нелинейном уравнении наблюдения $y_n = H(x_n, \beta) + \eta_n$. В (14) обозначено

$$\begin{aligned} y_n^s &= H - H'x_n^s + \frac{1}{2}H''(x_n^s)^2; \quad \alpha_0 = [(y_n - y_n^s)^2\sigma^2 + (x_n^s)^2\sigma_1^2]/(2\sigma^2\sigma_2^2); \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + F^2\sigma_{n-1}^2; \quad x_n^s = F\hat{x}_{n-1}; \end{aligned} \quad (15)$$

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{n-1}^2$ — дисперсии соответственно шумов состояния, наблюдения и оценивания на шаге $(n-1)$, причем аргумент x_n^s функции $H(\cdot)$ и ее производных в (14), (15) для краткости опущен.

Противоположный случай (уравнение наблюдения линейно, уравнение состояния — нет) характерен для косвенного подхода к нелинейной фильтрации [4]. Несложно проверить, что соответствующая одношаговая условная функция правдоподобия также сводится к (11) — (13).

Плотность вероятности $p(y^{n-1} | A)$ (второй сомножитель в (2)) представим в виде

$$p(y^{n-1} | A) = p(y_1 | A) \prod_{i=1}^{n-2} p(y_{i+1} | y^i, A) = p(\hat{x}_1 | A) \prod_{i=1}^{n-2} p(y_{i+1} | \hat{x}_i, A), \quad (16)$$

где $p(\hat{x}_1 | A)$ — начальное условие; $p(y_{i+1} | \hat{x}_i, A)$ — определяется в соответствии с (10) или из (11) — (13).

Ограничимся рассмотрением регулярных [2] оценок вектора A . Тогда уравнение максимального правдоподобия может быть переписано в виде $\nabla_A \ln p(y^n | A) = 0$, где $\nabla_A \triangleq \left\{ \frac{\partial}{\partial A_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_N} \right\}$ — вектор-

ный оператор частных производных. Следуя работе [2], обозначим

$$L_n(A) = L_{n-1}(A) + l_n(A); \quad (17)$$

$$l_n(A) = \ln p(y_n | \hat{x}_{n-1}, A); \quad (18)$$

$$L_{n-1}(A) = \ln p(y^{n-1} | A). \quad (19)$$

Разлагая $l_n(A)$ и $L_{n-1}(A)$ в ряд Тейлора в точке \hat{A}_{n-1} с сохранением линейных членов, имеем [2]

$$\hat{A}_n = \hat{A}_{n-1} + D_n^{-1} \nabla_A l_n(\hat{A}_{n-1}), \quad (20)$$

$$D_n = -\{\nabla_A \nabla_A^T [L_{n-1}(\hat{A}_{n-1}) + l_n(\hat{A}_{n-1})]\}. \quad (21)$$

В соответствии с (16), (21) весовая матрица D_n зависит от всей выборки y^{n-1} . От этого недостатка свободна приближенная формула [2]

$$D_n \approx D_{n-1} - \nabla_A \nabla_A^T l_n(\hat{A}_{n-1}). \quad (22)$$

Для натуральных $m < n$ на основе разложения

$$L_{n-1}(A) = L_{n-m}(A) + \sum_{i=n-m+1}^{n-1} l_i(A) \quad (23)$$

можно предложить более общее соотношение:

$$D_n = D_{n-m} - \nabla_A \nabla_A^T \sum_{i=n-m+1}^{n-1} l_i(\hat{A}_{n-1}). \quad (24)$$

При выводе этого уравнения, начиная с $m+2$ -го шага, использовалась приближенная подстановка $\hat{A}_{n-1} \approx \hat{A}_{n-m-2}$.

Если применять априорную оценку $D_1 = -\nabla_A \nabla_A^T \ln p(x_1 | A)$, то первые $m+1$ матриц D_i , вычисленных по формуле (24),

$$D_2 = D_1 - \nabla_A \nabla_A^T \ln p(y_2 | y_1, \hat{A}_1);$$

. (25)

$$D_{m+1} = D_1 - \nabla_A \nabla_A^T \ln p(y_2 | y_1, \hat{A}_m) - \dots - \nabla_A \nabla_A^T \ln p(y_{m+2} | y^m, \hat{A}_m)$$

будут соответствовать точному выражению (21). Начиная с шага $m+2$, весовые матрицы D_i определяются приближенно. В связи с этим отметим, что именно первые шаги в значительной степени определяют качество работы алгоритма. При $m=1$ (24) переходит в (22). При $m=n-1$ в (21).

Оценка неизвестных параметров \hat{A}_n , формируемая в соответствии с (20), (24), совместно с текущим измерением y_n служит входной информацией блока фильтрации состояния (рис. 1). Фильтрация выполняется в соответствии с одним из алгоритмов Калмана [5] либо косвенным методом [4]. В качестве неизвестных параметров используются компоненты оценки \hat{A}_n . На начальном этапе, пока отличие \hat{A}_n от A велико, элементы матрицы апостериорных дисперсий V_n (а значит, и матрицы усиления $K_n = V_n H^T (H V_n H^T + R)^{-1}$) также остаются большими.

Поэтому основную роль в формировании новой оценки играет текущее измерение. С увеличением n по мере приближения \hat{A}_n к A относительный вес экстраполированной оценки \hat{x}_n^2 вырастает, приближаясь к установившемуся значению. Переходный процесс заканчивается.

Качество фильтрации и скорость сходимости можно повысить за счет применения на каждом шаге дополнительной процедуры, состоящей в корректировке предыдущей оценки \hat{x}_{n-1} по результатам текущего измерения y_n . Известно [5], что уточненная оценка

$$\hat{x}_{n-1|n} \approx \hat{x}_{n-1} + V_{n-1} \frac{\partial F^T(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n)}{\partial x_{n-1}} V_{n|n-1}^{-1} [\hat{x}_n - \hat{x}_{n|n-1}], \quad (26)$$

где в первом приближении

$$V_{n|n-1} = V_1 + \frac{\partial F(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n)}{\partial x_{n-1}} V_{n-1} \frac{\partial F^T(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n)}{\partial x_{n-1}}; \quad (27)$$

$$\hat{x}_{n|n-1} = F(\hat{x}_{n-1}, \hat{\alpha}_n). \quad (28)$$

Подставляя $\hat{x}_{n-1|n}$ в одношаговую условную функцию правдоподобия $l_n(\cdot)$ вместо \hat{x}_{n-1} , уточняем оценку векторов A и x_n . После этого можно переходить к следующему шагу, либо повторить итерацию еще раз. Оценки \hat{A}_n и \hat{x}_n , как правило, перестают изменяться уже после второй-третьей итерации.

Эффективность рассмотренного алгоритма исследуем на примере нормальной марковской последовательности $\{x_n\}$, заданной разностными уравнениями

$$x_n = fx_{n-1} + \xi_n; \quad y_n = hx_n + \eta_n, \quad (29)$$

где неизвестными параметрами будем считать дисперсию шума состояния σ_1^2 или шума наблюдения σ_2^2 . В блоке фильтрации используем дискретный одномерный алгоритм Калмана — Бьюси [5]

$$x_n = fx_{n-1} + K_n [y_n - hf\hat{x}_{n-1}]; \quad (30)$$

$$\sigma_n^2 = K_n \sigma_2^2 h^{-1}. \quad (31)$$

Здесь

$$K_n = h\hat{\sigma}_n^2 [h^2\hat{\sigma}_n^2 + \sigma_2^2]^{-1}; \quad \hat{\sigma}_n^2 = \sigma_1^2 + f^2\sigma_{n-1}^2.$$

Обозначим неизвестный параметр через σ^2 . В соответствии с (10), (18) запишем

$$l_n(\sigma^2) = -\frac{1}{2} \ln \sigma_n^2(\sigma^2) - \frac{1}{2} \frac{(y_n - hf\hat{x}_{n-1})^2}{\sigma_n^2(\sigma^2)}; \\ \sigma_n^2(\sigma^2) = \sigma_2^2 + h^2(\sigma_1^2 + f^2\sigma_{n-1}^2). \quad (32)$$

Текущая оценка состояния x_n и ее дисперсия σ_n^2 определяются уравнениями (30), (31), в которых в качестве неизвестных параметров σ_1^2 или

σ_2^2 используется их оценка, вычисленная в соответствии с (20), (24) при подстановке (32). Результаты моделирования для $m = 1$ представлены на рис. 2.

По оси абсцисс отложено безразмерное время $n = t_n / (t_n - t_{n-1})$. По оси ординат — оценка параметров σ_1^2, σ_2^2 . При адаптации по σ_1^2 графики (сплошные линии) рассчитывались для следующих параметров модели (29): $\sigma_{1, \text{ист}}^2 = 1; \sigma_2^2 = 0,3$. При адаптации по σ_2^2 (пунктирные линии) $\sigma_{2, \text{ист}}^2 = 1,5; \sigma_1^2 = 0,1$. В обоих случаях $f = 0,95; h = 1$. Значения априорных оценок $\hat{\sigma}_1^2(0); \hat{\sigma}_2^2(0)$ и D_1 приведены на рис. 2.

Несмотря на увеличение общей неопределенности системы из-за введения шума состояния ξ_n и большее число параметров, по которым возможна адаптация, рассмотренный алгоритм по скорости сходимости не уступает предложенному в работе [3].

В сравнении с неадаптивным фильтром Калмана (30) при отклонении априорных значений дисперсий σ_1^2, σ_2^2 от истинных в 10—15 раз применение предложенного алгоритма адаптации дает уменьшение апостериорной дисперсии оценивания состояния в 2,5—5 раз.

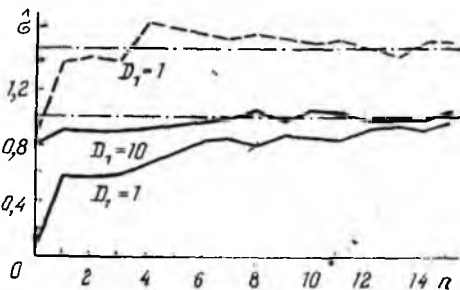


Рис. 2

Адаптация происходит эффективнее, если выбрать априорные оценки такими, что $\sigma_1(0) > \sigma_{1, \text{ист}}$, а $\sigma_2(0) < \sigma_{2, \text{ист}}$. В обратном случае начальный коэффициент усиления фильтра Калмана снижается, что уменьшает чувствительность алгоритма к поступающим измерениям y_n и, как следствие, приводит к замедлению сходимости. Этот эффект заметно ослабляется при увеличении числа m в уравнении (24).

Приложение. Покажем, что интеграл (11) может быть сведен к табличному [6]:

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma-1} e^{-\rho x^2 - qx} dx = \Gamma(\gamma) (2\rho)^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{q^2}{8\rho}} D_{-\gamma} \left(\frac{q}{\sqrt{2\rho}} \right), \quad (33)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция; $D_{-\gamma}(\cdot)$ — функция параболического цилиндра (ФПЦ).

Замена переменных $x = y - \alpha_3 / (4\alpha_4)$ в (11) приводит к выражению

$$I = e^{-\alpha_4 n_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_4 (y^4 + n_1 y^2 + n_2 y)} dy, \quad (34)$$

где n_0, n_1, n_2 определяются из (13). Разлагая $e^{-\alpha_4 n_2 y}$ в ряд Маклорена и учитывая (33), после преобразования получим

$$I = (2\alpha_4)^{-\frac{1}{4}} e^{\alpha_4 \left(\frac{n_2^2}{8} - n_0 \right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{2^{k/2} (2k)!} \alpha_4^{\frac{3}{2}} n_1^{2k} D_{-k-\frac{1}{2}} \left(n_2 \sqrt{\frac{\alpha_4}{2}} \right). \quad (35)$$

Обозначим аргумент ФПЦ через φ . Используя связь $D_{-\mu-\frac{1}{2}}(\varphi)$ с модифицированными функциями Бесселя 2-го рода (функциями Макдональда) через функции Уиттекера [6], получаем

$$D_{-\frac{1}{2}}(\varphi) = \frac{\sqrt{\varphi}}{2\pi} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varphi^2}{4}\right); D_{-\frac{3}{2}}(\varphi) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi^{\frac{3}{2}} \left[K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varphi^2}{4}\right) - K_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\varphi^2}{4}\right) \right]. \quad (36)$$

Три ФПЦ одного аргумента с последовательными индексами связаны рекуррентными соотношением [6] $D_{\mu+1}(\varphi) - \varphi D_{\mu}(\varphi) - \mu D_{\mu-1}(\varphi) = 0$. Это соотношение совместно с (36) позволяет найти любое требуемое количество членов ряда (35), вычислив значения только двух специальных функций $K_{\frac{1}{4}}(\alpha_4 n_2^2/8)$ и $K_{\frac{3}{4}}(\alpha_4 n_2^2/8)$. Если ограничиться двумя членами ряда, получим результат (12).

Список литературы: 1. Гриценко Н. С., Логинов В. П., Севостьянов К. К. Адаптивное оценивание // Зарубеж. радиоэлектроника. М., 1985. № 3. С. 3—26. 2. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М., 1977. 432 с. 3. Tapley B. D., Born G. H. Sequential estimation of the state and the observation error covariance matrix // AIAA J. 1971. № 2. P. 212—217. 4. Шлома А. М. Косвенный метод нелинейной фильтрации марковских процессов // Радиотехника и электрон. М., 1986. Т. 31, № 7. С. 1304—1310. 5. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М., 1976. 495 с. 6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971. 1108 с.

Поступила в редколлегию 04.07.88