УДК 621.372

Е. В. КУЗЬМИЧЕВА

СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДАХ С НЕОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

В основу теоретического изучения волноводов с неоднородным по поперечному сечению заполнением положен метод комплексных амплитуд, который определяет пространственное распределение электромагнитных полей в волноводе, отвечающее их гармоническому изменению во времени [1; 2]. В данной статье описан другой подход к решению внутренних граничных задач электродинамики, получивший название метода модового базиса [3; 4]. С помощью данного метода проводится теоретическое исследование распространения волн в оптическом градиентном волноводе с учетом нелинейных свойств материала, из которого он выполнен. В качестве математической модели такой системы выбран цилиндрический регулярный волновод с неоднородным нелинейным заполнением.

Следуя [3], в качестве «эталонной» среды с параметрами ε_0, μ_0, заполняющей волновод, выберем линейную неоднородную среду; зависимость ε_0 и μ_0 от координат будет такой же, как и в реальном волокне. Запишем уравнения Максвелла в операторной форме:

$$\hat{R}_0 x = \left\{ a \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X};\ \hat{S} x = 0 \right\}. \qquad (1)$$

Здесь $\hat{R}_0$ — обобщенный оператор пространственного дифференцирования, включающий в себя операторы

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \frac{i}{\varepsilon_0}\operatorname{rot} \\ -\frac{i}{\mu_0}\operatorname{rot} & \hat{0} \end{pmatrix}; \quad \hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ [\vec{n},]|_S & \hat{0} \end{pmatrix},$$

действующие на векторы-столбцы

$$x = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{pmatrix}.$$

Сторонние токи и заряды отсутствуют, среда немагнитная ($\mu_0 = 1$), не обладает проводимостью ($\sigma = 0$) диэлектрическая проницаемость зависит от координат $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\vec{r})$.

Решение задачи (1) ищется в гильбертовом функциональном пространстве с весом $L_2^a(V)$, в котором определено скалярное произведение векторов

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{8\pi V}\int_V (\varepsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu_0 \vec{H}_1 \vec{H}_2^*)\, dv,$$

каждый из которых ограничен.

Оператор $\hat{R}_0$ является самосопряженным [3] и, следовательно, имеет полную систему собственных вектор-функций (базис), определяемых из решения задачи на собственные значения

$$\hat{R}_0 x_n = k_n x_n, \tag{2}$$

или для трехмерных векторов

$$\operatorname{rot}\vec{E}_n = ik_n\mu_0\vec{H}_n; \quad \operatorname{rot}\vec{H}_n = -\varepsilon_0 ik_n\vec{E}_n; \quad [\vec{n}\vec{E}_n]|_S = 0, \tag{3}$$

где k_n — собственное число, отвечающее собственному вектору x_n. Система $\{x_n\}$ ортогональна, собственные векторы нормируются.

Для градиентного волновода с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0(\vec{r}) = \varepsilon_0(r) = \varepsilon_1[1 - \delta r^2/a^2]$, где $\delta \ll 1$ — малая величина, a — радиус волновода, построим базис — пространственное распределение полей. Решая задачу на собственные значения (3), получим выражения для компонент полей в случае $k_n \neq \neq k_0 = 0$:

$$\vec{E}_{nt}^{(l)} = (\mp i\vec{r}_0 - \vec{\varphi}_0)\frac{1}{\varepsilon_1^{3/4} r_t k_n \chi} Q_l(r/r_t), \quad \vec{H}_{nt}^{(l)} = \varepsilon_1^{1/2} z_n \vec{E}_{nt}^{(l)};$$

$$E_{nz} = \varepsilon_1^{-1/4}\left\{-\frac{A_1}{b_n^2}\left[Q_1' - \frac{(m-1)r}{r} Q_1\right] + \frac{A_2}{b_n^2}\left[Q_2' + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(m+1)r_t}{r} Q_2\right]\right\};$$

$$H_{nz} = i\varepsilon_1^{1/4}\left\{-\frac{A_1}{b_n^2}\left[Q_1' - \frac{(m-1)\,r_t}{r}\,Q_1\right] - \frac{A_2}{b_n^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[Q_2' + \frac{(m+1)\,r_t}{r}\,Q_2\right]\right\},$$

где $$Q_j(r/r_t) = (b_n r^2/r_t^2)^{(m\mp 1)/2}\exp(-b_n r^2/2r_t^2)\,L_{n-1/2\pm 1/2}^{(m\mp 1)}\times(b_n r^2/r_t^2)\,e^{-im\varphi - i\beta_n z};$$

$$\chi = 1 - \frac{\beta_n^2}{k_n\varepsilon_1};\ r_t^2 = \frac{1}{\delta}\,a^2\chi;\ b_n = 4n + 2m;$$

L_n^m — полином Лагерра; A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Постоянная распространения мод и собственное число задачи (3)

$$\beta_n = k_c\varepsilon_1^{1/2}\left[1 - \frac{(2n+m)\,\delta^{1/2}}{k_c a\varepsilon_1^{1/2}}\right];\quad k_n = k_c\left[1 - \frac{(2n+m)\,\delta^{1/2}}{k_c a\varepsilon_1^{1/2}}\right],$$

где k_c — волновой вектор свободного пространства.

Таким образом, для случая $ka \gg 1$ (что для многомодового световода практически выполняется) для большинства мод постоянные распространения отличаются друг от друга на малую величину, зависящую от индексов мод, и β_n приближается к значению $k_n\varepsilon_1^{1/2}$, что является одним из отличительных свойств градиентных фокусирующих волноводов.

Любое электромагнитное поле, существующее в волноводе, может быть представлено в виде разложения по базисным вектор-функциям координат с неизвестными коэффициентами — функциями времени:

$$x(\vec{r},\ t) = \sum_{(n)} e_n(t)\,\vec{E}_n(\vec{r}) + \sum_{(n)} h(t)\,\vec{H}_n(\vec{r});$$

$$X(\vec{r},\ t) = \sum_{(n)} d_n(t)\,\vec{E}_n(\vec{r}) + \sum_{(n)} b_n(t)\,\vec{H}_n(\vec{r}). \qquad (4)$$

Для нахождения временных коэффициентов $e_n(t)$, $h_n(t)$, $d_n(t)$, $b_n(t)$ в случае заполнения волновода неоднородной линейной средой, вообще говоря, нет необходимости в построении базиса пространственных вектор-функций в явном виде. Достаточно иметь постановку задачи на собственные значения оператора $\hat{R}$ и свойства ортогональности базисных функций. Подставив разложения (4) в операторное уравнение (1), спроектируем его на базис пространства $L_2^q(V)$. При этом воспользуемся условием самосопряженности оператора $\hat{R}$ и формулами (2), (3) как определениями, а также материальными уравнениями $\vec{E}=1/\varepsilon_0\vec{D}$, $\vec{H}=1/\mu_0\vec{B}$. В результате

$$\frac{d^2}{dt^2} d_n(t) + \omega_n^2 d_n(t) = 0; \quad d_n(t) = d_n^0 \exp(\pm i\omega_n t),$$

где $\omega_n = ck_n$ — собственная частота.

Таким образом, в случае линейного неоднородного заполнения волновода временная зависимость распространяющихся мод будет гармонической, моды не связаны между собой, поле является совокупностью монохроматических волн. Поля, отвечающие нулевому собственному числу $k_0=0$, являются статическими. Решая задачу о временных коэффициентах этих полей, получаем функции, не зависящие от времени. Значит, статические поля стационарны и не влияют на поле распространяющихся мод.

При возбуждении оптических волноводов лазерным лучом возбуждающее поле уже не может считаться пренебрежимо малым по сравнению с характерными внутренними полями среды волновода, поэтому при решении задачи распространения волн необходимо оценить нелинейные эффекты.

Материальные уравнения для реального оптического волокна, например, изготовленного из плавленного S_iO_2, запишутся следующим образом [5]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0} D(\vec{r}, t) + \nu \vec{D}(\vec{r}, t) \vec{D}(\vec{r}, t) \vec{D}(\vec{r}, t),$$

где ν — скаляр.

Чтобы получить уравнения для временных коэффициентов, проведем вычисления, аналогичные вычислениям для линейной среды. Взаимодействие мод не учитывается. В результате получим уравнение для коэффициента $d_n(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2} d_n(t) + \omega_n^2 d_n(t) = -\frac{P_n}{S_n} \omega_n^2 d_n^3(t), \tag{5}$$

где $P_n = \frac{1}{4\pi V} \int\limits_V \nu\varepsilon_0 (\vec{E}_n^3, \vec{E}_n) dv \ll 1$, $S_n = \frac{1}{4\pi V} \int\limits_V \vec{E}_n \vec{E}_n dv$.

Решая уравнение методом медленно меняющихся амплитуд [6], в первом приближении получим

$$d_n(t) = a_0 \cos(\omega_n^{(1)} t + \psi_0); \quad \omega_n^{(1)} = \omega_n \left[1 + \frac{3}{8} a_0^2 \frac{P_n}{S_n}\right].$$

Изменение полей во времени будет гармоническим, нелинейность среды сказывается лишь в зависимости частоты $\omega_n^{(1)}$, от начальной амплитуды a_0 и параметра нелинейности P_n. Во втором приближении решение (5) имеет вид

$$d_n(t) = a_0 \cos(\omega_n^{(2)} t + \psi_0) + \frac{P_n a_0^2}{32 S_n} \cos[3(\omega_n^{(2)} t + \psi_0)], \tag{6}$$

где

$$\omega_n^{(2)} = \omega_n \left[1 + \frac{3P_n}{8S_n} a_0^2 + \frac{3P_n}{28S_n} a_0^4\right].$$

Из (6) следует, что во втором приближении амплитуда a_0 не зависит от времени (процесс в волноводе стационарен); частота зависит от a_0 и параметра P_n. Однако колебания уже не являются гармоническими — кроме колебания на основной частоте $\omega_n^{(2)}$ появляется третья гармоника, амплитуда которой зависит от P_n. Оценим отношение мощностей, переносимых третьей и первой гармониками:

$$\frac{\tilde{P}_{3n}}{\tilde{P}_{1n}} = \frac{1}{32^2} a_0^4 \frac{P_n^2}{S_n^2} \leq \frac{\nu^2 E_0^4}{32^2}. \tag{7}$$

Подставив в (7) значения ν и E_0, применяемые на практике, установим, что при напряженности поля $E_0 \sim 10^8$ В/м отношение мощностей будет иметь порядок 10^{-5}. Т. е. для используемых материалов стекловолокон нелинейные эффекты будут проявляться при уровнях мощности, близких к критическим.

Подход к решению данной проблемы носит законченный обоснованный характер, не базирующийся ни на каких априорных зависимостях. Он позволяет изучать распространение волн в волноводах, которые заполнены не только неоднородными нелинейными, но и нестационарными средами.

Список литературы: 1. *Шевченко В. В.* Формулы сдвига в теории диэлектрических волноводов//Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 5. С. 9—18. 2. *Шевченко В. В.* Поперечная краевая задача для собственных волн круглого диэлектрического волновода//Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27. Вып. 1. С. 1—10. 3. *Назыров З. Ф., Третьяков О. А.* Модификация метода модового базиса. Х., 1985. 49 с. Деп. в ВИНИТИ 25.02.86. № 2734Ук. 4. *Третьяков О. А.* Метод модового базиса//Радиотехника и электроника. 1986. Т. 37. Вып. 6. С. 1071—1082. 5. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. М., 1965. 295 с. 6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. 1979. 408 с.

Поступила в редколлегию 25.05.87