УДК 621.372

А. И. КОЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук,
Н. А. ХИЖНЯК, д-р физ.-мат. наук

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ СФЕРАХ В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим малую сферическую резонансную неоднородность, созданную с помощью материалов с большим значением диэлектрической проницаемости ε_0' и малым тангенсом угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon$. Эта неоднородность имеется в прямоугольном волноводе. Она позволяет изучать расщепленные резонансные зависимости, обусловленные снятием сферического вырождения резонансных колебаний в сфере под влиянием стенок волновода [5].

Рассмотрим резонансное рассеяние в прямоугольном волноводе на двух, расположенных в ближней зоне, сферических неоднородностях и исследуем особенности расщепления резонансных зависимостей, связанных с взаимным влиянием неоднородностей друг на друга и стенок волновода. Задача решается с использованием интегральных уравнений [4] и метода изображений [1].

В прямоугольном волноводе находятся две сферы, поля которых определяются векторами $\vec r_1 = \vec r_{10} + \vec r_1$, $\vec r_2 = \vec r_{20} + \vec r_2$. Векторы $\vec r_{10}$, $\vec r_{20}$ задают центры рассеивателей по отношению к системе координат, связанной с волноводом. Полагаем $a/\lambda_b \ll 1$, но возможно $a/\lambda_{\text{дв}} \approx 1$, $|\vec r_{20} - \vec r_{10}|/\lambda_b < 1$, где a — радиус сферы; $\lambda_{\text{дв}}$ — длина волны внутри рассеивателя. Стенки волновода определяются плоскостями $x=0$, $x=d$, $y=0$, $y=h$, координата z направлена по оси волновода.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определяем через электрические $\vec\Pi^{э}_{d_1}$, $\vec\Pi^{э}_{d_2}$ и магнитные $\vec\Pi^{м}_{d_1}$, $\vec\Pi^{м}_{d_2}$ потенциалы Герца [1]

$$\vec E_{\text{рас}} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_0\mu_0)(\vec\Pi^{э}_{d1} + \vec\Pi^{э}_{d2}) - ik\mu_0 \operatorname{rot}(\vec\Pi^{м}_{d1} + \vec\Pi^{м}_{d2});$$

$$\vec H_{\text{рас}} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_0\mu_0)(\vec\Pi^{м}_{d1} + \vec\Pi^{м}_{d2}) + ik\varepsilon_0 \operatorname{rot}(\vec\Pi^{э}_{d1} + \vec\Pi^{э}_{d2}). \qquad (1)$$

Потенциалы Герца на больших расстояниях находим через дипольную часть поля рассеяния

$$\vec\Pi^{э}_{d1} = \vec d^{э}_1 f^{э}_1(|\vec r - \vec r_{10}|);\quad \vec\Pi^{э}_{d2} = \vec d^{э}_2 f^{э}_2(|\vec r - \vec r_{20}|); \qquad (2)$$

$$\vec\Pi^{м}_{d1} = \vec d^{м}_1 f^{м}_1(|\vec r - \vec r_{10}|);\quad \vec\Pi^{м}_{d2} = \vec d^{м}_2 f^{м}_2(|\vec r - \vec r_{20}|),$$

где $\vec{d}_1^{\text{э}}, \vec{d}_1^{\text{м}}, \vec{d}_2^{\text{э}}, \vec{d}_2^{\text{м}}$ — дипольные моменты, индуцированные в телах падающей волной

$$\vec{d}_1^{\text{э}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{v_1}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}_1')\,d\vec{r}'; \quad \vec{d}_1^{\text{м}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{v_1}\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}(\vec{r}_1')\,d\vec{r}';$$

$$\vec{d}_2^{\text{м}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{v_2}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}_2')\,d\vec{r}'; \quad \vec{d}_2^{\text{м}} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{v_2}\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}(\vec{r}_2')\,d\vec{r}'. \tag{3}$$

Здесь $\vec{E}(\vec{r}_1')$, $\vec{H}(\vec{r}_1')$, $\vec{E}(\vec{r}_2')$, $\vec{H}(\vec{r}_2')$ — внутренние поля рассеивателей; $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\mu}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\mu}_2$ — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей рассеивателей; ε_0, μ_0 — проницаемости заполнения волновода.

Потенциалы Герца (2) определим следующим образом:

$$\Delta\vec{\Pi}_d^{\text{э}} + k^2\varepsilon_0\mu_0\vec{\Pi}_d^{\text{э}} = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\vec{d}^{\text{э}};$$

$$\Delta\vec{\Pi}_d^{\text{м}} + k^2\varepsilon_0\mu_0\vec{\Pi}_d^{\text{м}} = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|)\vec{d}^{\text{м}}. \tag{4}$$

Внутреннее поле рассеивателя, как и в работе [5], вычислим вначале для случая, когда $a/\lambda_{\text{дв}} \ll 1$.

Используя интегродифференциальные уравнения [2] и метод изображений [1] для учета влияния стенок волновода, внутренние поля рассеивателей можно определить в нулевом приближении из электростатических уравнений

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1) = \vec{E}_{01}(\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0} - 1\right)(\vec{E}(\vec{r}_1)\nabla)\nabla W_{c1}(\vec{r}_1') + \sum_i \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0} - 1\right)\times$$

$$\times(\vec{E}(\vec{r}_1)\nabla)\nabla W_{i1}^*(\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0} - 1\right)(E(r_1)\nabla)\nabla W_{c21}^*(\vec{r}_1) + \sum_i \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1}{\varepsilon_0} - 1\right)\times$$

$$\times(\vec{E}(\vec{r}_1)\nabla)\nabla W_{i21}^*(\vec{r}_1); \tag{5}$$

$$\vec{H}_1(\vec{r}_1) = \vec{H}_{01}(\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_0} - 1\right)(\vec{H}(\vec{r}_1)\nabla)\nabla W_{c1}(\vec{r}_1') + \sum_i \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_0} - 1\right)\times$$

$$\times(\vec{H}(\vec{r}_1)\nabla)\nabla W_{i1}^*(\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_1}{\mu_0} - 1\right)(\vec{H}(\vec{r}_1)\nabla)\nabla W_{c21}^*(\vec{r}_1) +$$

$$+\sum_i \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\vec{\mu}_1}{\mu_0}-1\right)(\vec{H}(\vec{r}_1)\nabla)\,\nabla W^*_{i21}(\vec{r}_1);$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_2)=\vec{E}_{02}(\vec{r}_2)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0}-1\right)(\vec{E}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W_{c2}(r_2')+\sum_i \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-1\right)\times$$

$$\times(\vec{E}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W^*_{i2}(\vec{r}_2)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)(\vec{E}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W^*_{c12}(\vec{r}_2)+\sum_i\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varepsilon}_2}{\varepsilon_0}-1\right)\times$$

$$\times(\vec{E}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W^*_{i12}(\vec{r}_2);$$

$$\vec{H}_2(\vec{r}_2)=\vec{H}_{02}(\vec{r}_2)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_0}-1\right)(\vec{H}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W_{c2}(\vec{r}_2')+\sum_i\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_0}-1\right)\times$$

$$\times(\vec{H}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W^*_{i2}(\vec{r}_2)+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_0}-1\right)(\vec{H}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W^*_{c12}(\vec{r}_2)+\sum_i\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\mu}_2}{\mu_0}-1\right)\times$$

$$\times(\vec{H}(\vec{r}_2)\nabla)\nabla W^*_{i12}(\vec{r}_2),$$

где $\vec{E}_{01}(\vec{r}_1)$, $\vec{H}_{01}(\vec{r}_1)$, $\vec{E}_{02}(\vec{r}_2)$, $\vec{H}_{02}(\vec{r}_2)$—составляющие поля падающей волны в центрах рассеивателей (эти поля зависят от времени как $e^{i\omega t}$), вторые и третьи слагаемые определяют внутренние поля данного рассеивателя, а четвертые и пятые определяют рассеянные поля противоположной сферой во внутренних точках данной.

Ньютоновские потенциалы $W_{i1}(\vec{r}_1')$, $W_{i2}(\vec{r}_2')$ для внутренних точек рассеивателей имеют вид

$$W(\vec{r}')=C-\frac{2}{3}\pi r'^2;\quad r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Потенциалы $W^*_{i1}(\vec{r}_1)$, $W^*_{i2}(\vec{r}_2)$, характеризующие влияние стенок волновода, представим как

$$W^*_{i1}=(\vec{r}_1)=\frac{V_{i1}}{r_{i1}}=\frac{4}{3}\pi a_1^3\frac{1}{r_{i1}};\quad r_{i1}=\sqrt{(x_{1i}-x_{10})^2+(y_{1i}-y_{10})^2};$$

$$W^*_{i2}(\vec{r}_2)=\frac{V_{i2}}{r_{i2}}=\frac{4}{3}\pi a_2^3\frac{1}{r_{i2}};\quad r_{i2}=\sqrt{(x_{2i}-x_{20})^2+(y_{2i}-y_{20})^2}. \tag{6}$$

Здесь x_{1i}, y_{1i} — координаты изображения в стенках волновода первого, а x_{2i}, y_{2i} — второго рассеивателя.

Потенциалы, определяющие влияние полей рассеивателей друг на друга:

$$W^*_{c21}(\vec{r}_1) = \frac{V_{c2}}{r_{21}} = \frac{4}{3}\pi a_2^3 \frac{1}{r_{21}};$$

$$r_{21} = \sqrt{(x_{20}-x_{10})^2 + (y_{20}-y_{10})^2 + (z_{20}-z_{10})^2};$$

$$W^*_{c12}(\vec{r}_2) = \frac{V_{c1}}{r_{12}} = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{1}{r_{12}};$$

$$r_{12} = \sqrt{(x_{10}-x_{20})^2 + (y_{10}-y_{20})^2 + (z_{10}-z_{20})^2}; \tag{7}$$

$$W^*_{i21}(\vec{r}_1) = \frac{V_{i2}}{r_{i21}} = \frac{4}{3}\pi a_2^3 \frac{1}{r_{i21}};$$

$$r_{i21} = \sqrt{(x_{2i}-x_{20})^2 + (y_{2i}-y_{20})^2 + (z_{2i}-z_{20})^2};$$

$$W^*_{i12}(\vec{r}_2) = \frac{V_{i1}}{r_{i12}} = \frac{4}{3}\pi a_1^3 \frac{1}{r_{i12}};$$

$$r_{i12} = \sqrt{(x_{1i}-x_{10})^2 + (y_{1i}-y_{10})^2 + (z_{1i}-z_{10})^2}.$$

Решая уравнения (5) относительно внутренних точек рассеивателей $\vec{r}'$ для однородных и изотропных рассеивателей, найдем выражения для внутренних полей первого и второго рассеивателя

$$\vec{E}_1(\vec{r}') = \hat{\alpha}_1 \vec{E}_{01}(\vec{r}); \quad \vec{H}_1(\vec{r}') = \hat{\beta}_1 \vec{H}_{01}(\vec{r}); \tag{8}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}') = \hat{\alpha}_2 \vec{E}_{02}(\vec{r}); \quad \vec{H}_2(\vec{r}') = \hat{\beta}_2 \vec{H}_{02}(\vec{r}), \tag{9}$$

где

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{xx1} & \alpha_{xy1} & \alpha_{xz1} \\ \alpha_{yx1} & \alpha_{yy1} & \alpha_{yz1} \\ \alpha_{zx1} & \alpha_{zy1} & \alpha_{zz1} \end{vmatrix}; \quad \hat{\beta}_1 = \begin{vmatrix} \beta_{xx1} & \beta_{xy1} & \beta_{xz1} \\ \beta_{yx1} & \beta_{yy1} & \beta_{yz1} \\ \beta_{zx1} & \beta_{zy1} & \beta_{zz1} \end{vmatrix}; \tag{10}$$

$$\hat{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{xx2} & \alpha_{xy2} & \alpha_{xz2} \\ \alpha_{yx2} & \alpha_{yy2} & \alpha_{yz2} \\ \alpha_{zx2} & \alpha_{zy2} & \alpha_{zz2} \end{vmatrix}; \quad \hat{\beta}_2 = \begin{vmatrix} \beta_{xx2} & \beta_{xy2} & \beta_{xz2} \\ \beta_{yx2} & \beta_{yy2} & \beta_{yz2} \\ \beta_{zx2} & \beta_{zy2} & \beta_{zz2} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Элементы матрицы $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\beta}_1$

$$\alpha_{xx1} = \frac{\psi_{yy1}\psi_{zz1} - \psi_{yz1}^2}{\Delta_1^э}; \quad \alpha_{xy1} = \frac{\psi_{xz1}\psi_{zy1} - \psi_{xy1}\psi_{zz1}}{\Delta_1^э};$$

$$\alpha_{xz1} = \frac{\psi_{xy1}\psi_{yz1} - \psi_{yy1}\psi_{xz1}}{\Delta_1^э};$$

$$\alpha_{yx1}=\frac{-\psi_{yx1}\psi_{zz1}+\psi_{yz1}\psi_{zx1}}{\Delta_1^э};\quad \alpha_{yy1}=\frac{-\psi_{xz1}^2+\psi_{xx1}\psi_{zz1}}{\Delta_1^э};$$

$$\alpha_{yz1}=\frac{-\psi_{xx1}\psi_{yz1}+\psi_{xz1}\psi_{yx1}}{\Delta_1^э}; \tag{12}$$

$$\alpha_{zx1}=\frac{\psi_{yx1}\psi_{zy1}-\psi_{yy1}\psi_{zx1}}{\Delta_1^э};\quad \alpha_{zy1}=\frac{\psi_{xy1}\psi_{zx1}-\psi_{xx1}\psi_{zy1}}{\Delta_1^э};$$

$$\alpha_{zz1}=\frac{\psi_{xx1}\psi_{yy1}-\psi_{xy1}^2}{\Delta_1^э};\ \alpha_{xy1}=\alpha_{yx1};\ \alpha_{xz1}=\alpha_{zx1};\ \alpha_{yz1}=\alpha_{zy1};$$

$$\beta_{xx1}=\frac{\psi'_{yy1}\psi'_{zz1}-\psi'^2_{yz1}}{\Delta_1^м};\quad \beta_{xy1}=\frac{\psi'_{xz1}\psi'_{zy1}-\psi'_{xy1}\psi'_{zz1}}{\Delta_1^м};$$

$$\beta_{xz1}=\frac{\psi'_{xy1}\psi'_{yz1}-\psi'_{yy1}\psi'_{xz1}}{\Delta_1^м};\quad \beta_{yx1}=\frac{-\psi'_{yx1}\psi'_{zz1}+\psi'_{yz1}\psi'_{zx1}}{\Delta_1^м};$$

$$\beta_{yy1}=\frac{-\psi'^2_{xz1}+\psi'_{xx1}\psi'_{zz1}}{\Delta_1^м};\quad \beta_{yz1}=\frac{-\psi'_{xx1}\psi'_{yz1}+\psi'_{xz1}\psi'_{yz1}}{\Delta_1^м}; \tag{13}$$

$$\beta_{zx1}=\frac{\psi'_{yx1}\psi'_{zy1}-\psi'_{yy1}\psi'_{zx1}}{\Delta_1^м};\quad \beta_{zy1}=\frac{\psi'_{xy1}\psi'_{zx1}-\psi'_{xx1}\psi'_{zy1}}{\Delta_1^м};$$

$$\beta_{zz1}=\frac{\psi'_{xx1}\psi'_{yy1}-\psi'^2_{xy1}}{\Delta_1^м};\quad \beta_{xy1}=\beta_{yx1};\ \beta_{xz1}=\beta_{zx1};\ \beta_{yz1}=\beta_{zy1},$$

где

$$\Delta_1^э=\begin{vmatrix}\psi_{xx1} & \psi_{xy1} & \psi_{xz1}\\ \psi_{yx1} & \psi_{yy1} & \psi_{yz1}\\ \psi_{zx1} & \psi_{zy1} & \psi_{zz1}\end{vmatrix};\qquad \Delta_1'^м=\begin{vmatrix}\psi'_{xx1} & \psi'_{xy1} & \psi'_{xz1}\\ \psi'_{yx1} & \psi'_{yy1} & \psi'_{yz1}\\ \psi'_{zx1} & \psi'_{zy1} & \psi'_{zz1}\end{vmatrix}. \tag{14}$$

Элементы матрицы (10) имеют следующие значения:

$$\psi_{xx1}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_i W^*_{i1}+W^*_{c21}+\sum_i W^*_{i21}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)a_1^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_i\frac{1}{r_{i1}}+a_2^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r_{21}}+\sum_i\frac{1}{r_{i21}}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)(a_1^3\tau^{xx}_{i1}+a_2^3(\tau^{xx}_{c21}+\tau^{xx}_{i21}))\right];$$

$$\psi_{yy1}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_i W^*_{i1}+W^*_{c21}+\sum_i W^*_{i21}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)(a_1^3\tau^{yy}_{i1}+a_2^3(\tau^{yy}_{c21}+\tau^{yy}_{i21}))\right]; \tag{15}$$

$$\psi_{zz1}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\sum_i W^*_{i1}+W^*_{c21}+\sum_i W^*_{i21}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)(a_1^3\tau^{zz}_{i1}+a_2^3(\tau^{zz}_{c21}+\tau^{zz}_{i21}))\right];$$

$$\psi_{xy1}=\psi_{yx1}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\sum_i W^*_{i1}+W^*_{c21}+\sum_i{}^* W^*_{i21}\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)[a_1^3\tau^{xy}_{i1}+\alpha_2^3(\tau^{xy}_{c21}+\tau^{xy}_{i21})];$$

$$\psi_{xz1}=\psi_{zx1}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[W^*_{c21}+\sum_i W^*_{i21}\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)a_2^3(\tau^{xz}_{c21}+\tau^{xz}_{i21});$$

$$\psi_{yz1}=\psi_{zy1}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left[W^*_{c21}+\sum_i W^*_{i21}\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}-1\right)a_2^3(\tau^{yz}_{c21}+\tau^{yz}_{i21}).$$

Значения τ^{xx}_{i1}, τ^{xx}_{c21} и т. д. характеризуют взаимное влияние рассеивателей стенок волновода.

Соотношения (13), входящие в состав матрицы $\hat{\beta}_1$ (10), находим из (15) заменой ε_0, ε_1 на μ_0, μ_1. Элементы матрицы $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_2$ (11)

$$\alpha_{xx2}=\frac{\psi_{yy2}\psi_{zz2}-\psi^2_{yz2}}{\Delta^э_2};\quad \alpha_{xy2}=\frac{\psi_{xz2}\psi_{zy2}-\psi_{xy2}\psi_{zz2}}{\Delta^э_2};$$

$$\alpha_{xz2}=\frac{\psi_{xy2}\psi_{yz2}-\psi_{yy2}\psi_{xz2}}{\Delta^э_2};\quad \alpha_{yx2}=\frac{-\psi_{yz2}\psi_{zz2}+\psi_{yz2}\psi_{zx2}}{\Delta^э_2};$$

$$\alpha_{yy2}=\frac{-\psi^2_{xz2}+\psi_{xx2}\psi_{zz2}}{\Delta^э_2};\quad \alpha_{yz2}=\frac{-\psi_{xx2}\psi_{yz2}+\psi_{xz2}\psi_{yx2}}{\Delta^э_2};\tag{16}$$

$$\alpha_{zx2}=\frac{\psi_{yx2}\psi_{zy2}-\psi_{yy2}\psi_{zx2}}{\Delta^э_2};\quad \alpha_{zy2}=\frac{\psi_{xy2}\psi_{zx2}-\psi_{xx2}\psi_{zy2}}{\Delta^э_2};$$

$$\alpha_{zz2}=\frac{\psi_{xx2}\psi_{yy2}-\psi^2_{xy2}}{\Delta^э_2};\quad \alpha_{xy2}=\alpha_{yx2};\ \alpha_{xz2}=\alpha_{zx2};\ \alpha_{yz2}=\alpha_{zy2};$$

$$\beta_{xx2}=\frac{\psi'_{yy2}\psi'_{zz2}-\psi'^2_{yzz}}{\Delta^м_2};\quad \beta_{xy2}=\frac{\psi'_{xz2}\psi'_{zy2}-\psi'_{xy2}\psi'_{zz2}}{\Delta^м_2};$$

$$\beta_{xz2}=\frac{\psi'_{xy2}\psi'_{yz2}-\psi'_{yy2}\psi'_{xz2}}{\Delta_2^{\text{м}}};\quad \beta_{yx2}=\frac{-\psi'_{yx2}\psi'_{zz2}+\psi'_{yz2}\psi'_{zx2}}{\Delta_2^{\text{м}}};\qquad (17)$$

$$\beta_{yy2}=\frac{-\psi'^2_{xz2}+\psi'_{xx2}\psi'_{zz2}}{\Delta_2^{\text{м}}};\quad \beta_{yz2}=\frac{-\psi'_{xx2}\psi'_{yz2}+\psi'_{xzz}\psi'_{yz2}}{\Delta_2^{\text{м}}};$$

$$\beta_{zx2}=\frac{\psi'_{yx2}\psi'_{zy2}-\psi'_{yy2}\psi'_{zx2}}{\Delta_2^{\text{м}}};\quad \beta_{zy2}=\frac{\psi'_{xy2}\psi'_{zx2}-\psi'_{xx2}\psi'_{zy2}}{\Delta_2^{\text{м}}};$$

$$\beta_{zz2}=\frac{\psi'_{xx2}\psi'_{yy2}-\psi'^2_{xy2}}{\Delta_2^{\text{м}}};\ \text{где}\ \beta_{xy2}=\beta_{yx2};\ \beta_{xz2}=\beta_{zx2};\ \beta_{yz2}=\beta_{zy2}.$$

Здесь

$$\Delta_2^{\text{э}}=\begin{vmatrix}\psi_{xx2} & \psi_{xy2} & \psi_{xz2}\\ \psi_{yx2} & \psi_{yy2} & \psi_{yz2}\\ \psi_{zx2} & \psi_{zy2} & \psi_{zz2}\end{vmatrix};\qquad \Delta_2^{\text{м}}=\begin{vmatrix}\psi'_{xx2} & \psi'_{xy2} & \psi'_{xz2}\\ \psi'_{yx2} & \psi'_{yy2} & \psi'_{yz2}\\ \psi'_{zx2} & \psi'_{zy2} & \psi'_{zz2}\end{vmatrix}.\qquad (18)$$

Элементы матрицы (11) определим следующим образом:

$$\psi_{xx2}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_i W^*_{i2}+W^*_{c12}+\sum_i W^*_{i12}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\left(a_2^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_i\frac{1}{r_{i2}}+a_1^3\frac{\partial^2}{\partial x^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{1}{r_{12}}+\sum_i\frac{1}{r_{i12}}\right)\right]=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\left(a_2^3\tau^{xx}_{i2}+a_1^3(\tau^{xx}_{c21}+\tau^{xx}_{i21})\right)\right];$$

$$\psi_{yy2}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_i W^*_{i2}+W^*_{c12}+\sum_i W^*_{i12}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\left(a_2^3\tau^{yy}_{i2}+a_1^3(\tau^{yy}_{c12}+\tau^{yy}_{i12})\right)\right];\qquad (19)$$

$$\psi_{zz2}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\sum_i W^*_{i2}+W^*_{c12}+\sum_i W^*_{i12}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\left(a_2^3\tau^{zz}_{ic2}+a_1^3(\tau^{zz}_{c12}+\tau^{zz}_{i12})\right)\right];$$

$$\psi_{xy2}=\psi_{yx2}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\sum_i W^*_{i2}+W^*_{c12}+\sum_i W^*_{i12}\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\left[a_2^3\tau^{xy}_{i2}+a_1^3(\tau^{xy}_{c12}+\tau^{xy}_{i12})\right];$$

$$\psi_{xz2}=\psi_{zx2}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left[W^*_{c12}+\sum_i W^*_{i12}\right]=$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right) a_1^3 (\tau_{c12}^{xz} + \tau_{i12}^{xz});$$

$$\psi_{yz1} = \psi_{zy1} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right)\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}(W_{c12}^* + \sum_i W_{i12}^*) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right) a_1^3 (\tau_{c12}^{yz} + \tau_{i12}^{yz}).$$

Значения величин, входящих в состав матрицы (11), находятся из (19) заменой ε_0, ε_2 на μ_0, μ_2.

Уравнения (5) определяют внутреннее поле, когда $a/\lambda_{в} \ll 1$, $a/\lambda_{дв} \ll 1$. Решения (8), (9) этих уравнений можно обобщить и на случай, если $a/\lambda_{дв} \approx 1$, полагая, что ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 не их истинные значения, характеризующие рассеиватели, а некоторые эффективные значения [4], которые образуем как произведение данных проницаемостей на функцию $R(\theta)$, т. е.

$$\varepsilon_1 R(\theta_1);\ \mu_1 R(\theta_1);\ \varepsilon_2 R(\theta_2),\ \mu_2 h(\theta_2), \tag{20}$$

где $\theta_1 = ka_1\sqrt{\varepsilon_1\mu_1};\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1' - i\varepsilon_1'';\quad \mu_1 = \mu_1' - i\mu_1'';\ \theta_2 = ka_2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2};$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' - i\varepsilon_2'';\quad \mu_2 = \mu_2' - i\mu_2''; \tag{21}$$

$$R(\theta) = \frac{2(\operatorname{tg}\theta - \theta)}{(\theta^2 - 1)\operatorname{tg}\theta + \theta}.$$

Дипольные моменты (3), индуцированные в сферах падающей волны, с помощью (8), (9) можно представить в виде

$$\vec{d}_1^{\,э} = \frac{1}{3} a_1^3 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right)\hat{\alpha}_1 \vec{E}_{01}(\vec{r});\ \vec{d}_2^{\,э} = \frac{1}{3} a_2^3\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right)\hat{\alpha}_2 \vec{E}_{02}(\vec{r}); \tag{22}$$

$$\vec{d}_1^{\,м} = \frac{1}{3} a_1^3\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right)\hat{\beta}_1 (\vec{H}_{01}(\vec{r});\ \vec{d}_2^{\,м} = \frac{1}{3} a_2^3\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right)\hat{\beta}_2 \vec{H}_{02}(\vec{r}).$$

Подставляя (2) в (1), найдем рассеянное поле в дальней зоне. Функции $f_1^э(|\vec{r} - \vec{r}_{10}|)$, $f_1^м(|\vec{r} - \vec{r}_{10}|)$ и $f_2^э(|\vec{r} - \vec{r}_{20}|)$, $f_2^м(|\vec{r} - \vec{r}_{20}|)$ вычисляются, как в работе [5].

Тогда для отраженной волны

$$\vec{E}_{рас}^{-} = \frac{4\pi i}{dh\beta_{mn}} \sum_{m,n=0}^{\infty} [(\hat{L}_1 \vec{d}_1^{\,э} + \hat{L}_2 \vec{d}_2^{\,э}) - ik\mu_0 (\hat{P}_1 \vec{d}_1^{\,м} + \hat{P}_2 \vec{d}_2^{\,м})]\, e^{i\beta_{m,n} z}; \tag{23}$$

$$\vec{H}_{рас}^{-} = -\frac{4\pi i}{dh\beta_{mn}} \sum_{m,n=0}^{\infty} [(\hat{K}_1 \vec{d}_2^{\,м} + \hat{K}_2 \vec{d}_2^{\,м}) + ik\varepsilon_0 (\hat{H}_1 \vec{d}_1^{\,м} + \hat{C}_2 \vec{d}_2^{\,м})]\, e^{i\beta_{m,n} z},$$

где $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$, $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$, $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$— функциональные матрицы. В выражениях (23) рассеянная волна формально является суммой бесконечного числа волн. Реальное поле в дальней зоне будет иметь вид конечной суммы, так как на больших расстояниях от рассеивателя не затухнут лишь такие волны (23), для которых выполняется соотношение

$$(\pi m/d)^2 + (\pi n/h)^2 \leqslant k^2\varepsilon_0\mu_0.$$

Найденные выражения для внутренних и рассеянных полей позволяют определить в нулевом приближении структуру поля внутри рассеивателей и в дипольном — структуру рассеянного поля в волновой зоне, а также исследовать особенности взаимодействия сферических неоднородностей с прямоугольным волноводом [5].

Список литературы: 1. *Стреттон Дж.* Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948. — 540 с. 2. *Хижняк Н. А.* Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред//Журн. техн. физики. — 1958. — 28. — С. 1592—1609. 3. *Левин Л.* Современная теория волноводов. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954. — 318 с. 4. *Хижняк Н. А.* Рассеяние электромагнитных волн на малых телах и в волноводе//Радиотехника. — 1967. — Вып. 4. — С. 88—97. 5. *Козарь А. И., Хижняк Н. А.* Резонансное рассеяние электромагнитных волн на диэлектрической сфере в волноводе//Изв. вузов. Радиоэлектроника. — 1975. — 18. — С. 29. — 35.

Поступила в редколлегию 17.04.86

УДК 537.87

А. А. ЗВЯГИНЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, *Д. О. БАТРАКОВ*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ПОЛЕЙ, РАССЕЯННЫХ ИМПЕДАНСНЫМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Возросшие тенденции к использованию в системах спутниковой связи сигналов с ортогональной поляризацией стимулируют совершенствование методов анализа поляризационной структуры электромагнитного поля. Удобной формой представления состояния поляризации является предложенный ранее метод описания поляризационных диаграмм числами на двойной комплексной плоскости [1]. Метод использовали для расчета дифракции эллиптически поляризованных волн на плоских ленточных решетках, что позволило получить ряд практически важных результатов [2].

Электродинамические свойства многих реальных объектов с достаточной точностью можно описать на основе понятия эквивалентного поверхностного импеданса [3]. Рассеяние эллиптически поляризованных волн такими объектами сопровождается сложными электродинамическими процессами, анализ которых требует использования строгих методов решения краевых задач и привлечения специфических вычислительных методов.