УДК 530.1

И. В. ГОРБАЧ

МЕТОД МОДОВОГО БАЗИСА В ТЕОРИИ РЕЗОНАТОРОВ С КУСОЧНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе [1] развивается новый подход к постановке и решению внутренних граничных задач классической электродинамики: спектральный метод в иной форме представляется более эффективным для рассмотрения нестационарных процессов. Решение задачи записывается в виде разложения по базису координатных вектор-функций оператора Максвелла с неизвестными временными коэффициентами. Собственные вектор-функции данного оператора определены для резонатора с произвольной формой поверхности, на которой поле подчинено граничным условиям на идеальной электрической стенке, в виде постановки граничных задач на собственные значения. Обобщим этот подход для случая, когда произвольная идеальная поверхность S резонансного объема V кусочная.

Исходной является постановка начально-граничной задачи для нестационарного электромагнитного поля в резонансном объеме V, ограниченном кусочной поверхностью S и заполненном неоднородной нестационарной средой, при этом $S = S_L + S_{\perp}$, где S_L — поверхность резонансного объема, на которой поле подчинено граничным условиям типа $[\vec{n}, \vec{H}] | S_L = 0$, а $S_{\perp}$ — поверхность, на которой поле подчинено граничным условиям типа $[\vec{n},\ \vec{E}]|_{S_\perp}=0$. Условием типа $[\vec{n},\ \vec{H}]|_{S_L}=0$ иногда пользуются в теории дифракции в качестве модели открытых частей, когда они эффективно отражают набегающие на них волны. Тогда получим

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\left[\frac{\nabla\mu}{\mu},\ \vec{B}\right]+\frac{4\pi}{c}\mu(\vec{j}+\vec{j}^0); \tag{1а}$$

$$\operatorname{rot}\vec{D}=-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\left[\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon},\ \vec{D}\right]; \tag{1б}$$

$$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi(\rho+\rho^0)\,(2\text{а});\ \operatorname{div}\vec{B}=0; \tag{2б}$$

$$[\vec{n},\ \vec{D}]|_{S_\perp}=0,\ (\vec{n},\ \vec{B})|_{S_\perp}=0; \tag{3а}$$

$$[\vec{n},\ \vec{B}]|_{S_L}=0,\ (\vec{n},\ \vec{D})|_{S_L}=0. \tag{3б}$$

Здесь $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S; $\vec{j}^0$, ρ^0 — функции сторонних источников; $\vec{j}$, ρ — плотности тока и заряда, индуцированных полем в проводящей среде внутри резонатора; $\sigma(\vec{r},\ t)\neq 0$, $\varepsilon(\vec{r},\ t)\neq\neq 0$, $\mu(\vec{r},\ t)\neq 0$ — вещественные дифференцируемые функции, имеющие физический смысл проводимости, электрической и магнитной проницаемости. В начальный момент времени $t=t_0$ поле должно быть задано в любой точке внутри резонатора: $\vec{D}(\vec{r},\ t_0)=\vec{D}(\vec{r})$; $\vec{B}(\vec{r},\ t_0)=\vec{B}(\vec{r})$. Решение уравнений (1) — (3) в электродинамике находят при условии ограниченности энергии электромагнитного поля внутри резонатора в классе квадратично интегрируемых функций. Слева в этих уравнениях выделены роторный и дивергентный операторы пространственного дифференцирования, свойства которых хорошо изучены. Объединим их с граничными условиями на поверхности S и используем обобщенный таким образом линейный дифференциальный оператор для построения базиса в гильбертовом функциональном пространстве $L_2(V)$ с метрикой

$$(x_1,\ x_2)=(1/8\pi V)\int_V(\varepsilon_0\vec{D}_1\vec{D}_2^*+$$
$$+\mu_0\vec{B}_1\vec{B}_2^*)\,dV, \tag{4}$$

где $\varepsilon_0(\vec{r},\ t)$, $\mu_0(\vec{r},\ t)$ — вещественные дифференцируемые функции; X_1 — столбец $(\vec{D}_1,\ \vec{B}_1)$, а X_2 — столбец $(\vec{D}_2,\ \vec{B}_2)$.

Таким образом, имеем роторные и дивергентные обобщенные операторы в виде

$$\hat{R}_0^e X=\{\hat{R}X,\ \hat{S}_{\text{II}}X=0\};\ \hat{R}_0^h X=\{\hat{R}X,\ \hat{S}_\perp X=0\}; \tag{5}$$

$$\hat{D}_0^e X=\{\hat{D}x,\ \hat{S}_{\text{II}}x=0\};\ \hat{D}_0^h y=\{\hat{D}y,\ S_\perp y=0\}. \tag{6}$$

$$\hat{R}=\begin{pmatrix}\hat{0} & (i/\varepsilon_0)\operatorname{rot}\\ (-i/\mu_0)\operatorname{rot} & 0\end{pmatrix},\ \hat{D}=\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div},\ \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}\right),$$

где X — столбец $(\vec{D}, \vec{B})$; x — столбец $(\vec{D}, 0)$; y — столбец $(0, \vec{B})$;

$$\hat{S}_{\parallel} = \begin{Vmatrix} [\vec{I}, \vec{n}] & \hat{0} \\ \vec{n} & \hat{0} \end{Vmatrix}; \quad \hat{S}_{\parallel} X = \begin{Vmatrix} [\vec{n}, \vec{D}]|_{S_\perp} & \hat{0} \\ (\vec{n}, \vec{D})|_{S_L} & \hat{0} \end{Vmatrix} = \hat{S}_{\parallel} x;$$

$$\hat{S}_{\perp} = \begin{Vmatrix} \hat{0} & \vec{n} \\ \hat{0} & [\vec{I}, \vec{n}] \end{Vmatrix}; \quad \hat{S}_{\perp} X = \begin{Vmatrix} (\vec{n}, \vec{B})|_{S_\perp} & \hat{0} \\ [\vec{n}, \vec{B}]|_{S_L} & 0 \end{Vmatrix} = \hat{S}_{\perp} y.$$

На произвольной паре векторов X_1, X_2 из области действия оператора $\hat{R}_0^e$ построим согласно (4) билинейные формы $(\hat{R}_0^e X_1, X_2)$, $(X_1, \hat{R}_0^e X_2)$ и образуем их разность. Воспользуемся векторным тождеством, теоремой Гаусса—Остроградского, свойством циклической перестановки векторов в смешанном произведении и граничными условиями (3). В результате получим условие самосопряженности для оператора $\hat{R}_0^e$ (5): $(\hat{R}_0^e X_1, X_2) - (X_1, \hat{R}_0^e X_2) = 0$ (7). Отсюда следует, что в пространстве H, определяющем область действия оператора $\hat{R}_0^e$, имеется полная система собственных векторов, X_p — столбец $(\vec{D}_p, \vec{B}_p)$ как решений операторного уравнения $\hat{R}_0^e X_p = k_p X_p$ (8), где k_p — собственные числа, которым отвечают собственные векторы $X_p(\vec{r})$; p — тройной индекс nmq. С использованием введенных определений пару роторных уравнений Максвелла запишем совместно с граничными условиями в виде единого операторного уравнения

$$\hat{R}_0^e X = i \begin{pmatrix} \dfrac{\mu}{c\varepsilon_0} \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \left[\dfrac{\nabla \mu}{\mu \varepsilon_0}, \vec{B}\right] + \dfrac{4\pi\mu}{c\varepsilon_0} (\vec{j} + \vec{j}^0) \\ \dfrac{\varepsilon}{c\mu_0} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \left[\dfrac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon \mu_0}, \vec{D}\right] \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Дивергентные уравнения с граничными условиями будут

$$\hat{D}_0^e x = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} (\rho + \rho^0), \quad \hat{D}_0^h y = 0. \tag{10}$$

Строя базис собственных вектор-функций обобщенных роторного и дивергентного операторов в гильбертовом функциональном пространстве $L_2(V)$, используем фундаментальное свойство, которое заключается в разбиении его на три взаимно ортогональные подпространства [2]: $L_2(V) = \mathring{J} \oplus \mathring{G} \oplus U$ **(11)**. Подпространство $\mathring{J}$ представляет собой замыкание в $L_2(V)$ линеала гладких вихревых векторов, у которых равна нулю на границе S тангенциальная их составляющая либо нормальная. Подпространство $\mathring{G}$ — замыкание в $L_2(V)$ линеала градиентов гладких функций, таких, что на границе S равна нулю сама функция или ее нормальная производная. Подпространство U — замыкание $L_2(V)$ линеала градиентов гармонических функций, непрерывно дифференцируемых в V. При такой постановке задачи условие конечности энергии в нее выполняется автоматически. Кроме того, в (11)

$$\overset{\circ}{J}=\overset{\circ}{J}_E\oplus\overset{\circ}{J}_H,\ \overset{\circ}{G}=\overset{\circ}{G}_E\oplus\overset{\circ}{G}_H,\ U=U_E\oplus U_H,$$

где индексы E, H обозначают соответственно систему электрических и магнитных вектор-функций.

Полагая в задаче, что свободные параметры подчиняются условию $\nabla\varepsilon_0=\nabla\mu_0=0$, и используя самосопряженность обобщенных дифференциальных операторов, строим базис искомых вектор-функций, X_p — столбец $(\vec{D}_p,\ i\vec{B}_p)$. Отыскиваем полную систему вихревых вектор-функций электрического типа $\overset{\circ}{J}_E$, решая операторное уравнение (8). В этом случае имеем

$$\operatorname{div}\vec{D}^e_p=0; \tag{12а}$$

$$\operatorname{div}\vec{B}^e_p=0,\ (\vec{z}^0,\ \vec{B}^e_p)=0; \tag{12б}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B}^e_p=-k^e_p\varepsilon_0\vec{D}^e_p; \tag{13а}$$

$$\operatorname{rot}\vec{D}^e_p=-k^e_p\mu_0\vec{B}^e_p; \tag{13б}$$

$$[\vec{n},\ \vec{D}^e_p]\,|_{S_\perp}=0,\ (\vec{n},\ \vec{B}^e_p)\,|_{S_\perp}=0; \tag{14а}$$

$$[\vec{n},\ \vec{B}^e_p]\,|_{S_L}=0,\ (\vec{n},\ \vec{D}^e_p)\,|_{S_L}=0. \tag{14б}$$

Все собственные числа k^e_p являются вещественными, а их спектр дискретный. Последовательность собственных векторов $\{X^e_p\}^{\infty}_{-\infty}$, отвечающая последовательности собственных чисел $\{k^e_p\}^{\infty}_{-\infty}$, образует базис, а два собственных вектора $X^e_p=x^e_p+y^e_p$, $X^e_{p'}=x^e_{p'}+y^e_{p'}$ ортогональны, т. е.

$$(X^e_p,\ X^e_{p'})=(x^e_p,\ x^e_{p'})+(y^e_p,\ y^e_{p'})=\delta^p_{p'}N_pN_{p'},$$

где $\delta^p_{p'}$ — символ Кронекера; $N_i=\|X_i\|_{L_2(V)}$, $i=(nmq)$, $(n'm'q')$.

Рассматриваем систему уравнений (12) — (14) при $k^e_p\neq 0$. Из (12б), (13а) находим

$$\vec{B}^e_p(\vec{r}_\perp,\ z)=[\vec{z}^0,\ \nabla_\perp]\,\Pi^e_p(\vec{r}_\perp,\ z);$$

$$\vec{D}^e_p(\vec{r}_\perp,\ z)=\left(-\frac{1}{k^e_p\varepsilon_0}\right)\left(\nabla_\perp\frac{\partial}{\partial z}-\vec{z}^0\Delta_\perp\right)\Pi^e_p(\vec{r}_\perp,\ z),$$

где $\Pi^e_p(\vec{r}_\perp,\ z)$ — скалярный потенциал. С учетом (13б)

$$\left\{\Delta_\perp+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(k^e_p\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2\right\}\Pi^e_p(\vec{r}_\perp,\ z)=0.$$

Поскольку переменные разделяются и $\Pi_p^e(\vec{r}_\perp,\ z) = \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) Z_q(z)$, в результате имеем систему уравнений:

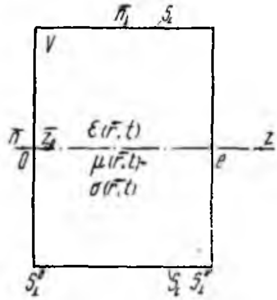
$$(1/\varepsilon_0\mu_0)\, \Delta_\perp \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) + (k^e_{nm})^2 \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) = 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_q(z) + (\gamma_q^e \sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 Z_q(z) = 0,$$

k^e_{nm}, γ_q^e — свободные параметры задачи.

Изучим резонансный объем V, представленный на рисунке, где $S_\perp = S^0_\perp + S^l_\perp$. Используя граничные условия на этих поверхностях, получаем $Z_q(z) = B_q^e \cos(\pi q/l) z$. Здесь $B_q^e = \mathrm{const}$; $\pi q/l = \gamma_q^e \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $q = 0,\ 1,\ 2\ldots$. Если ввести обобщенный оператор $\Delta^e_\perp \Phi(\vec{r}_\perp) =$

$$= \left\{ (-1/\varepsilon_0\mu_0)\, \Delta_\perp \Phi(\vec{r}_\perp),\ \vec{r}_\perp \in L;\ \left.\frac{\partial\Phi(\vec{r}_\perp)}{\partial n}\right|_{\vec{r}_\perp \in L} = 0 \right\},$$



областью действия которого является пространство $L_2(V)$ вещественных скалярных функций координат $\Phi(\vec{r}_1)$ с метрикой

$$(\Phi_1,\ \Phi_2) = \varepsilon_0\mu_0/4\pi S_\perp \int\limits_{S_\perp} \Phi_1\Phi_2 dS_\perp,$$

то из его самосопряженности следует, что в области своего действия он имеет базис, определяемый из решения задачи

$$\Delta_\perp \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) + (k^e_{nm}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) = 0; \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_{nm}(\vec{r}_1)}{\partial n}\right|_{\vec{r}_\perp \in L} = 0,$$

где $(k^e_{nm})^2 > 0$ — дискретный спектр вещественных собственных чисел $\Delta^e_\perp$; $\Phi_{nm}(\vec{r}_\perp)$ — собственные функции, соответствующие $(k^e_{nm})^2$.

Таким образом, можно записать вихревые нормированные вектор-функции электрического типа:

$$\vec{D}^e_p(\vec{r}_\perp,\ z) = \sqrt{\frac{(2-\delta^0_q)\,\mu_0/\varepsilon_0}{(k^e_{mn}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 + (\pi q/l)^2}} \left\{ \nabla_\perp \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) \frac{\pi q}{l} \times \right.$$

$$\left. \times \sin\frac{\pi q}{l} z - \vec{z}^0 (k^e_{nm}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp) \cos\frac{\pi q}{l} z \right\}; \tag{16а}$$

$$\vec{B}^e_p(\vec{r}_\perp,\ z) = -\sqrt{2-\delta^0_q}\, [\vec{z}^0,\ \nabla_\perp \Phi_{nm}(\vec{r}_\perp)] \cos\frac{\pi q}{l} z, \tag{16б}$$

где $\Phi_{nm}(\vec{r}_\perp)$ ищутся из (15), а $q = 0,\ 1,\ 2\ldots$.

Аналогично построив ортонормированную систему вектор-функции магнитного типа, получим

$$\vec{D}^h_p(\vec{r}_\perp,\ z) = -\sqrt{2}\, [\vec{z}^0,\ \nabla_\perp \psi_{nm}(\vec{r}_\perp)] \sin\frac{\pi q}{l} z; \tag{17а}$$

$$\vec{B}_p^h(\vec{r}_\perp, z) = -\sqrt{\frac{2\varepsilon_0/\mu_0}{(k_{nm}^h\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 + (\pi q/l)^2}}\left\{\nabla_\perp\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\pi q}{l}\cos\frac{\pi q}{l}z + \vec{z}^0(k_{nm}^h\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)\sin\frac{\pi q}{l}z\right\}, \qquad (17)$$

где $q = 1, 2, 3\ldots$, а функции $\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)$ ищутся из задачи

$$\Delta_\perp\psi_{nm}(\vec{r}_\perp) + (k_{nm}^h\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2\psi_{nm}(\vec{r}_\perp) = 0;$$

$$\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)|_{\vec{r}_\perp\in L} = 0. \qquad (18)$$

При $k_0^{e(h)} = 0$ ему отвечают невихревые векторы электрического и магнитного типов соответственно:

$$x_p^g(\vec{r}_\perp, z) = (\nabla\Phi_p^g(\vec{r}_\perp, z), 0);\ y_p^g(\vec{r}_\perp, z) = (0, \nabla\psi_p^g(\vec{r}_\perp, z)). \qquad (19)$$

Условия ортогональности являются ортогональным дополнением подпространства вихревых векторов, имеем

$$(x_p^g, y_p^g) = (x_p^g, x_p^e) = (x_p^g, y_p^e) = (y_p^g, x_p^e) = (y_p^g, y_p^e) = 0. \qquad (20)$$

Для отыскания собственных векторов оператора $\hat{R}_0^e$ с нулевым собственным числом воспользуемся свойствами дивергентного оператора. Применительно к векторам (19) уточним определение обобщенного дивергентного оператора (6):

$$D_0^e x_p^g = \left\{(1/\varepsilon_0)\Delta\Phi_p^g,\ \Phi_p^g\Big|_{S_\perp} = 0,\ \frac{\partial\Phi_p^g}{\partial n}\Big|_{S_L} = 0\right\};$$

$$\hat{D}_0^h y_p^g = \left\{(1/\mu_0)\Delta\psi_p^g,\ \frac{\partial\psi_p^g}{\partial n}\Big|_{S_\perp} = 0,\ \psi_p^g\Big|_{S_L} = 0\right\}.$$

Из самосопряженности дивергентного оператора следуют постановки задачи для производящих функций в виде однородных уравнений Гельмгольца с краевыми условиями. Таким образом, невихревые вектор-функции из подпространства $\overset{\circ}{G}$

$$\vec{D}_p^g(\vec{r}_\perp, z) = \frac{k_{nm}^e\mu_0}{\sqrt{(k_{nm}^e\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 + (\pi q/l)^2}}\left\{\nabla_\perp\Phi_{nm}(\vec{r}_\perp)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{\pi q}{l}z + \vec{z}^0\frac{\pi q}{l}\Phi_{nm}(\vec{r}_\perp)\cos\frac{\pi q}{l}z\right\}; \qquad (21)$$

$$\vec{B}_p^h(\vec{r}_\perp, z) = \frac{k_{nm}^h\varepsilon_0\sqrt{2-\delta_q^0}}{\sqrt{(k_{nm}^h\sqrt{\varepsilon_0\mu_0})^2 + (\pi q/l)^2}}\left\{\nabla_\perp\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\pi q}{l}z - \vec{z}^0\frac{\pi q}{l}\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)\sin\frac{\pi q}{l}z\right\},$$

где функции $\Phi_{nm}(\vec{r}_\perp)$, $\psi_{nm}(\vec{r}_\perp)$ находим из задач (15), (18). При этом нулевое собственное число дивергентного оператора не рассматривалось. Введя его, определим вектор-функции из подпространства U, которое в нашей задаче является пустым.

Итак, построен базис координатных вектор-функций в гильбертовом функциональном пространстве $L_2(V)$ для резонансных односвязных объемов произвольной формы поперечного сечения с кусочной поверхностью S (16), (17), (21).

Для получения временных коэффициентов спектрального разложения поля в модовом базисе спроектируем уравнения Максвелла (9), (10) на элементы пространства $L_2(V)$. Постановку и решение задачи о временных коэффициентах рассмотрим на примерах.

Пусть среда, заполняющая резонатор, является однородной, недиссипативной ($\sigma(\vec{r}, t) = 0$) и бездисперсной, а также $\vec{j}^0(\vec{r}, t) \equiv 0$. Проницаемости представим в виде $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\theta(t)$; $\mu(t) = \mu_0 f(t)$, где функции времени $\theta(t)$, $f(t)$ должны быть положительно определены. Запишем разложение искомого поля в модовом базисе:

$$X(\vec{r}, t) = 2\sum_{p>0}[e_p(t)\, x_p(\vec{r}) + h_p(t)\, y_p(\vec{r})], \tag{22}$$

где $e_p(t)$; $h_p(t)$ — искомые коэффициенты разложения вихревой части (коэффициент градиентной части—нулевой). Начальные условия для поля представляются в виде задания временных коэффициентов при $t = t_0$, т. е. $e_p(t_0) = e_p^0$, $h_p(t_0) = h_p^0$ (23). Используем (7), (9) для получения эволюционных уравнений, где в качестве X_1 берем поле $X(\vec{r}, t)$, а в качестве X_2 последовательно подставляем элементы базиса $X_{\pm p}(\vec{r})$. Используя соотношения типа (7) в виде, соответствующем сопряженным векторам $X_p(\vec{r})$, $X_{-p}(\vec{r})$, определение скалярного произведения (4), условия ортонормировки и ортогональности векторов (20), имеем систему уравнений для искомых временных коэффициентов:

$$\begin{aligned} &\frac{de_p(t)}{dt} + i\,\frac{k_p c}{\mu_0 f(t)}\, h_p(t) = 0; \\ &\frac{dh_p(t)}{dt} + i\,\frac{k_p c}{\varepsilon_0\theta(t)}\, e_p(t) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Исключив из (24) одну из неизвестных функций, например $e_p(t)$, $h_p(t)$, запишем дифференциальное уравнение второго порядка для

$$\frac{d^2}{dt^2} h_p(t) + \frac{1}{\theta(t)}\frac{d}{dt}\theta(t)\,\frac{d}{dt} h_p(t) + \frac{\omega_0^2}{f(t)\,\theta(t)}\, h_p(t) = 0 \tag{25}$$

и формулу

$$e_p(t) = i\,\frac{\varepsilon_0\theta(t)}{k_p c}\,\frac{dh_p(t)}{dt}, \tag{26}$$

где $\omega_0^2 = (k_p c/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})^2$. Пусть среда, заполняющая резонатор, будет стационарной. Тогда $\theta(t) = f(t) = 1$, а выражение (25) превращается в уравнение гармонического осциллятора, примером которого может служить томсоновский колебательный контур без потерь. Учитывая начальные условия (23), а также условия равенства начальной фазы нулю, вычисляем из (25), (26) $h_p(t) = h_p^0 \cos \omega_p t$; $e_p(t) = -i\varepsilon_0 h_p^0 \sin \omega_p t$. Таким образом, частным случаем будут монохроматические колебания в резонаторе.

Если $\theta(t) = f(t) \neq 0$, то с помощью соотношения (25) описывается параметрическое воздействие на колебательные системы. Введем обозначения

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\theta(t)} \frac{d\theta(t)}{dt}; \quad \varphi_2(t) = \omega_0^2/\theta(t) f(t);$$

$$h_p(t) = Z(t)\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi_1(t)\, dt}.$$

Положим, что функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — периодические функции времени. Тогда (25) преобразуется в уравнение Хилла: $d^2 Z(t)/dt^2 + \psi(t) \times Z(t) = 0$ (27). Здесь периодическая функция $\psi(t) = [\varphi_2(t) - \frac{1}{2} d \times \varphi_1(t)/dt - \frac{1}{4}\varphi_1^2(t)]$. Если в частном случае $\psi(t) = \omega_0^2(1 + m\cos\Omega t)$, то уравнение (27) преобразуется в уравнение Матье, m — глубина модуляции среды. Анализируя эти решения, получаем информацию о параметрических взаимодействиях в колебательной системе, а именно об условиях параметрического резонанса, комбинационных частотах, которые в общем случае не совпадают с собственными частотами резонатора.

Таким образом, вычислено полное поле (22) в резонансном объеме с кусочной поверхностью. Применяемый метод можно эффективно использовать для исследования электромагнитных колебаний в резонаторах с кусочной поверхностью, если резонатор заполнен нестационарной нелинейной средой, например для изучения распределенных резонансных систем с параметрическим взаимодействием.

Список литературы: 1. *Третьяков О. А.* Метод модового базиса // Радиотехника и электрон.— 1986.— 31, № 6.— С. 1071—1082. 2. *Вейль Г.* Избранные труды.— М.: Наука, 1984.— 510 с.

Поступила в редколлегию 17.11.86