Проблемы бионики
1999. Вып. 51. С. 60–66

УДК 681.5.01

Т.Б. ШАТОВСКАЯ

ОЦЕНКА ПРЕДЕЛА ОШИБОК В ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ В ГРЕБНЕВЫХ И РОБАСТНЫХ МЕТОДАХ

Для решения практических задач идентификации и управления сложными технологическими объектами (процессами) существует достаточно большое количество алгоритмов. Однако, несмотря на это, возникает немало препятствий их эффективного использования. Каждый алгоритм ориентирован, как правило, на решение конкретного класса задач и обеспечивает эффективность решения лишь при выполнении некоторых теоретических предположений. Выбор того или иного алгоритма для конкретного объекта представляет определенную трудность, связанную с анализом и оценкой их эффективности в зависимости от класса объекта и его статистических характеристик. В связи с нелинейным характером алгоритмов идентификации и управления их аналитическое исследование представляет достаточно сложную задачу. Наиболее доступными для исследования качественных и количественных показателей эффективности использования алгоритмов в автоматизированных системах управления технологическими процессами являются методы имитационного моделирования и методы оценки чувствительности.

В статье исследуется проблема чувствительности алгоритмов идентификации к степени изменения статистических характеристик исходных данных, а также оценивается эта чувствительность к степени обусловленности последних и к виду закона распределения. Рассматривается класс статических моделей.

Возможности многих методов идентификации ограничены, поскольку реальные данные не укладываются в рамки идеальных моделей. Так, несоблюдение предпосылок полного ранга исходных данных, наличие ошибок, распределенных по негауссовскому закону, и ошибок измерений больших, чем ошибки модели, приводят к неустойчивым решениям.

В таких условиях метод МНК дает смещенные оценки. Альтернативным МНК методом является смещенное оценивание, которое в настоящее время находит широкое применение. Для уменьшения длины оценки МНК в случае мультиколлинеарности используются сжатые оценки. Представителями такого класса являются оценки James и Stein, оценка дробного ранга (обобщенная инверсная оценка) [2].

Теоретический анализ не позволяет однозначно ответить на вопрос о преимуществах какой-либо из процедур [4,5]. С этой целью проведено экспериментальное сравнение наиболее типичных представителей смещенных оценок. Исследования (таблица) показали, что в большинстве случаев, связанных с мультиколлинеарностью, гребневые оценки превосходят по эффективности сжатые, дробного ранга, главных компонент и характеристического корня. Однако и в классе гребневых оценок невозможно указать процедуру, во всех случаях обеспечивающую одинаково высокую эффективность оценивания.

Сравнительный анализ некоторых смещенных оценок по среднеквадратичной ошибке оценивания (MSE)

Cond X`X	1	5	50	100
Оценка				
P_1	1,20	4,24	46,83	103,19
P_2	1,89	4,81	22,57	60,25
P_3	1,51	6,94	72,23	160,97
P_4	2,61	14,10	150,71	322,55
P_5	2,05	9,50	99,44	228,38
P_6	2,81	9,91	114,65	240,33
P_7	2,10	11,49	133,00	278,78
P_8	3,32	17,46	180,70	362,65

Примечание:

P_1 - обычная гребневая оценка;

P_2 - обобщенная направленная гребневая оценка;

P_3 - обобщенная гребневая оценка;

P_4 - гребневая оценка с выбором фактора деформации по значению индекса стабильности;

P_5 - однопараметрическая гребневая оценка;

P_6 - сжатая оценка;

P_7 - оценка дробного ранга,

P_8 - оценка МНК;

характеристики тестового примера: m=5, n=100, σ^2 = 1,0;

вектор коэффициентов α равен собственному вектору, соответствующему λ_{max}.

Не менее важным требованием к процедуре оценивания является слабая чувствительность к виду закона распределения ошибок. Известно, что МНК утрачивает свойство эффективности, если распределение ошибки отлично от нормального, однако он сохраняет чувство наилучшего оценивателя в классе линейных несмещенных оценок [1]. Чувствительность МНК к "негауссовости" распределений резко ограничивает возможность его использования при идентификации реальных процессов.

В подобных случаях альтернативой МНК являются методы, обладающие свойством робастности (устойчивости). В литературе большое внимание уделяется разработке и исследованию робастных оценок параметра положения, масштаба, коэффициента корреляции, регрессии. Различают два вида робастности. Первый - терпимость к ненормальности на хвостах распределений - определяют как робастность к предпосылкам. Второй вид - высокая эффективность, невзирая на ненормальность хвостов, - определяют как робастность к эффективности. В задаче параметрической идентификации второе свойство является необходимым условием обоснованного выбора алгоритма. Для получения эффективных оценок параметров модели при негауссовых распределениях используются оценки максимального правдоподобия с неквадратичной функцией потерь. Вместо квадратичной рассматривается некоторая выпуклая функция ρ( ), что приводит к минимизации суммы:

$$\sum_{t=1}^{n} \rho\left(y_t - \sum_{j=1}^{m} x_{tj} \tilde{a}_j \right),$$

где $\tilde{a} = \left\{ \tilde{a}_j \right\}_{j=1}^{m}$ - М-оценки неизвестных параметров модели. Частным случаем робастной оценки МП являются L(v) - оценки, разработанные для распределений с плотностью $f(x_j, v) = Ae^{-\sigma|x|^{v}}, 0 < v < 2$, которые имеют более тяжелые хвосты, чем нормальное, а L(v) - оценка минимизирует функцию

$$Q(v, \tilde{a}) = \sum_{t=1}^{n} \left| y_t - \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_j x_{tj} \right|^{v} = \sum_{t=1}^{n} |E_t|^{v}.$$

При v<2 процедура оценивания выступает как фильтр выбросов. Функция Q(v, $\tilde{a}$) для v≥1 имеет единственный локальный минимум, который совпадает с глобальным; 0<v<1 функция может иметь несколько локальных минимумов. При v=1 L(v) - оценки соответствуют оценкам метода наименьших модулей:

$$\sum_{t=1}^{n} |E_t| \to \min.$$

Оценим связь между статистическими характеристиками объекта и качественными показателями методов построения модели на основании функции чувствительности. В этом случае последовательность действий представим в следующем виде. Зададимся статистическими характерисиками матрицы входных переменных X(n×p), которая состоит из таких юказателей, как вид закона распределения и его параметры (математическое ожидание, дисперсия, эксцесс, асимметрия), количество входных переменных *p*, количество измерений *n*, корреляция между измерениями, корреляция между входными переменными, погрешности измерений или отношение сигнал / шум.

Зададимся различными структурами модели (линейная без квадратов и членов взаимодействия, линейная с членами взаимодействия $X_j \bullet X_l$, $j \neq l$ и квадратами X^2_j, $j, l = \overline{1, p}$, т.е. Y=f(X,B,E)). Зададимся величиной ошибки E (отношение сигнал / шум). Зададим вектор параметров модели B(p×1). По модели Y=f(X,B,E) получим вектор Y(n×1).

Используем какой-либо метод оценивания (наименьших квадратов, обобщенный метод наименьших квадратов, робастные методы, гребневые и т.д.). На основании данных вход-выход (X,Y) получаем оценки вектора $\hat{B}$ в соответствии с выбранным методом. Далее оцениваем показатели эффективности метода.

Так, среднеквадратическая ошибка оценки $\hat{B}$ вычисляется по формуле

$$E(L_j^2) = E(b_j - \hat{b}_j)^1 (b_j - \hat{b}_j).$$

Строим зависимость показателей эффективности L в функции статистических характеристик матрицы X.

Для этой цели целесообразно использовать методы активного планирования эксперимента. В каждой точке плана оцениваются величины L и парамстры A зависимости $L=F_1(X,B,E)$. Проводится интерпретация результатов и оценивается влияние каждой статистической характеристики на эффективность метода. Изменяя параметры матрицы X, получаем различные значения функции $L=F_1(X,A,E)$. Таким образом, формируем базу знаний для конкретного метода. В процессе моделирования оценка показателей качества методов идентификации имеет погрешность, которая обусловлена неточностями в оценке закона распределения, в задании параметров модели, моделируемых погрешностей, корреляций и т.д.

В данной работе предлагается методика оценки значимости параметров A по отношению к показателю эффективности методов L с использованием функций чувствительности.

Пусть статическая модель технологического объекта описывается функцией Y=f(X,B,E). Вектор входных переменных X может иметь различную размерность при различных j и i, $X_i=(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ip})$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,p}$. Вектор параметров модели, по которым предполагается определить чувствительность, имеет вид B=($b_1,b_2,\ldots,b_k$), где k – количество параметров, участвующих в оценке чувствительности. Вектор выходов модели имеет вид

$$Y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ik}), i = \overline{1,n}.$$

Выходные показатели качества алгоритмов представлены как L(b)=($L_1,L_2,\ldots,L_k$).

Предположим, что зависимость L(b) достаточно гладкая. При небольших вариациях вектора B вокруг фиксированного значения b_0 показатели L приближенно представим гиперплоскостью:

$$L_v = L_{v0} + \sum_{z=1}^{m} \frac{dL_j}{db_z}(b_z - b_{z0}),$$

где b_{z0} - значение параметра в фиксированной точке;

b_z - значение параметра в варьируемой точке;

L_{v0} - значение показателя качества метода в фиксированной точке;

L_v, v=1,2,…,k - значения показателя качества в варьируемой точке.

Погрешности ΔL_v в определении показателей L_v, вызванные неточностью Δb_z параметров b_z, вычисляются по формуле

$$\Delta L_v = \sum_{z=1}^{m} \frac{dL_v}{db_z} \Delta b_z ,$$

позволяющей при необходимости определить пределы ошибок ΔL_v. Для решения данной задачи необходимо получить статистические оценки $\hat{L_v}$ и $\frac{d\hat{L_v}}{db_z}$ и их дисперсий $\sigma^2(\hat{L_v})$ и $\sigma^2(\frac{dL_v}{db_z})$. Производные по параметрам b_z будем определять как коэффициенты регрессионных гиперплоскостей, построенных по результатам N - кратного испытания модели в Z - периферийных точках пространства b_z, составляющих модифицированный насыщенный двухуровневый ортогональный план. Значение $\hat{L_{v0}}$ будет содержать систематическую погрешность в случае, если зависимость L(v) не линейна. С целью увеличить точность получения оценок $\frac{dL_v}{db_z}$ необходима организация зависимых испытаний с получением положительной корреляции между оценками. Чувствительность по параметрам оценим с помощью результатов эксперимента в центре плана.

Оценки $\hat{L_v}$, $\frac{d\hat{L_v}}{db_z}$, $\sigma^2(\hat{L_v}),\sigma^2(\frac{dL_v}{db_z})$ определяются следующим образом.

План эксперимента кратно повторяется при независимых реализациях случайных факторов X. При каждом испытании вычисляется значение выхода модели в нескольких периферийных точках плана. По значениям Y_i вычисляются значения $\hat{L}_v$ и их производные по данным испытания модели на j-реализации плана.

Таким образом, основными этапами в определении погрешности оценок эффективности алгоритмов идентификации являются: задание структуры исходной модели; организация эксперимента по заданным факторам; определение способа генерации для испытания тест-выборок по заданной корреляционной матрице; генерация корреляционной матрицы с заданными свойствами; определение выхода модели; определение оценок $\hat{L}_v$, $\frac{d\hat{L}_v}{db_z}$, $\sigma^2(\hat{L}_v), \sigma^2(\frac{dL_v}{db_z})$; интерпретация результатов.

Для определения производных $\frac{dL_v}{db_z}$ организовывается насыщенный двухуровневый ортогональный план. Размерность матрицы планирования определяется количеством столбцов k и строк m. Эти величины связаны между собой соотношением $\min(m=2^z)>k$, $z \in 1,2\ldots$ Количество варьируемых переменных k определяется исследуемой моделью и может принимать произвольные значения. План эксперимента N - кратно повторяется при независимых реализациях случайных факторов X.

При каждом повторении вычисляются значения Y_i выходов моделей. Вне зависимости от того, как генерируются реализации случайных факторов X, вычисляются показатели качества L_v и их производные $\frac{dL_v}{db_z}$.

Чтобы получить несмещенные оценки показателей качества L_v и оценки чувствительности этих показателей по параметрам плотности вероятности случайных факторов X, необходимо провести несколько испытаний в центре плана. В этом случае оценки показателей в центре плана могут содержать меньшую систематическую погрешность при нелинейной зависимости L(b) [3]. Погрешности в показателях качества алгоритмов зависят от количества вводимых факторов, диапазона их изменений, количества наблюдений. Наличие погрешностей в оценках эффективности алгоритмов приводит к ошибочной классификации методов идентификации. В этом случае целесообразно для каждого критерия оценки ввести взвешенный параметр, который бы устранил погрешности [2].

Данный подход используется при разработке системы принятия решений по выбору метода идентификации в автоматизированных системах управления технологическими предприятиями различных классов.

Список литературы: 1. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир, 1973. 302 с. 2. *Sen A., Sinha N.K.* On-line system identification algorithm combining stochastic approximation and pseudo-inverse // Automatic. 1987. N4. P .425-429. 3. *Sen P.K.* Nonparametric simultaneous inference for some MANOVA models / Handbook of Statistic. Vol.1. Holland, 1980. P. 120-125. 4. *Статистические* методы повышения качества / Под ред. Хитоси Куме. М.: Финансы и статистика, 1991. 120 с. 5. *Смоляк С.А., Титаренко Б.П.* Устойчивые методы оценивания. М.: Статистика, 1980. С.98-115.

Поступила в редколлегию 23.09.98.