

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ АВТОМОБИЛЬНО-
ДОРОЖНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЩАПОВ П.Ф.
АВРУНИН О.Г.

ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ КОНТРОЛЯ
И ДИАГНОСТИКИ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Монография

Харьков
ХНАДУ
2011

УДК 658.562: 621.38
ББК 39.79
Щ 12

Рецензенти: **Ю.Ф. Павленко**, профессор, д.т.н., лауреат государственной премии Украины (Национальный научный центр «Институт метрологии»);
А.М. Крюков, профессор, д.т.н.,
(Академия внутренних войск Министерства внутренних дел Украины).

Щ 12 Щапов П.Ф., Аврунин О.Г. Повышение достоверности контроля и диагностики объектов в условиях неопределенности: монография. – Харьков : ХНАДУ. – 2011. – 192 с.

ISBN 978-966-303-346-4

В монографии рассматриваются методы и технические решения проблемы повышения достоверности контроля и диагностики объектов разной физической природы в условиях неопределенности. Решение этой комплексной научной задачи зависит как от повышения точности преобразований первичной информации в логические выводы, так и от правильности выбора вероятностной модели контролируемого параметра, максимально адекватной физическим особенностям объекта. В работе доказывается необходимость применения, наряду с традиционными средствами и методами контроля параметров, новых информационных технологий обучения систем контроля, уменьшающих неопределенность последующих решений. Рекомендуются для научных работников и инженеров – специалистов в области разработки методов и средств систем контроля и диагностики объектов.

Іл. 30. Табл. 21. Бібліогр. назв. 110

У монографії досліджуються методи та технічні рішення проблеми підвищення вірогідності контролю й діагностики об'єктів різної фізичної природи в умовах невизначеності. Розв'язання цього комплексного наукового завдання залежить як від підвищення точності перетворень первинної інформації в логічні висновки, так і від коректності вибору імовірнісної моделі контрольованого параметра, що з максимальною адекватністю відповідає фізичним особливостям об'єкта. У роботі обґрунтовується необхідність застосування, поряд із традиційними засобами й методами контролю параметрів, нових інформаційних технологій навчання систем контролю, що зменшують невизначеність послідовних висновків. Рекомендуються для науковців та інженерів-фахівців в галузі розробки методів і засобів систем контролю й діагностики об'єктів.

Ил. 30. Табл. 21. Бібліогр. наим. 110

УДК 658.562; 621.38
ББК 39.79

ISBN 978-966-303-346-4

© Щапов П.Ф., Аврунин О.Г., 2011
© ХНАДУ, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Основой повышения эффективности научных исследований для производства качественной продукции является совершенствование методов контроля и функциональной диагностики, расширения номенклатуры объектов и параметров контроля независимо от их физической или функциональной сложности. В отличие от объектов с повторяющимися свойствами (серийно выпускаемая продукция и типовые технологические операции), объекты с неоднозначными или меняющимися во времени свойствами (сельскохозяйственное сырье, технологические процессы, изоляция энергетического оборудования, биологические системы и т.д.) характеризуются значительной неопределенностью своих параметров. Для их контроля наряду с традиционными средствами и методами необходимо привлекать новые информационные технологии при обучении систем контроля, уменьшающих неопределенность последующих решений. Иначе достоверность и, следовательно, эффективность контроля останется невысокой.

Повышение достоверности контроля и диагностики объектов со случайными параметрами – это комплексная научная задача, решение которой зависит как от повышения точности преобразований первичной информации в логические выводы, так и от правильности выбора вероятностной модели контролируемого параметра, максимально адекватной физическим особенностям объекта.

Существующие тестовые, структурно-алгоритмические методы повышения достоверности контроля позволяют корректировать границы допусковых интервалов за счет адаптивных процедур увеличения точности измерений, при нормированной неопределенности контролируемых статических параметров [3-13]. Такие методы эффективны лишь при следующих ограничениях на класс объектов контроля и моделей преобразования первичной информации в логические решения:

– неопределенность контролируемых параметров ограничена сверху; обязательным является наличие образца объекта или физически реализуемых моделей контролируемых величин с заданными вероятностными свойствами;

– вид преобразования контролируемых величин регламентирован классами линейных или линеаризованных моделей;

– количество решений при контроле и диагностике – не более двух, в рамках параметрических тестов на значимость; многоальтернативное тестирование с использованием сложных гипотез отсутствует.

В то же время существует широкий класс объектов, обладающих динамическими свойствами, стохастичность параметров которых делает практически невозможным не только создание образцов, например, в медико-биологических исследованиях, но и физически реализуемых моделей контролируемых величин. Более того, возникают трудности с построением вероятностных моделей таких объектов из-за неполноты информации по видам их состояний. Это резко ограничивает возможности использования существующих и разработки новых методов повышения достоверности контроля и диагностики особенно, если свойства объектов могут случайным образом изменяться во времени.

Поэтому актуальными, имеющими важное значение для развития информационных технологий контроля, медицинской и технической диагностики, являются научная и прикладная проблемы повышения достоверности контроля и диагностики объектов со стохастическими параметрами, или параметрами, стохастические связанными с контролируемыми величинами.

Целью монографии является обоснование вероятностных теоретических основ разработки и внедрения статистических методов повышения достоверности контроля и диагностики объектов, стохастичность параметров которых обусловлена случайным факторным влиянием и ограниченностью первичной информации о физических свойствах объектов, в связи с чем рассмотрены:

– анализ информационных моделей стохастического влияния параметра контроля на контролируемые величины с учетом вида статистической неоднородности последних;

– развитие метода тестирования по малым выборкам, но с заданной достоверностью, стохастических контролируемых величин на их соответствие уровням допускаемой статистической неоднородности;

– усовершенствование информационной теории измерительного многопараметрического контроля по стохастическим контро-

лируемым величинам и разработка методов отбора максимально информативных подмножеств этих величин;

- развитие теории погрешностей для моделей преобразования стохастического параметра в случайные контролируемые величины при отсутствии ограничений на вид преобразования;

- разработка теории и метода оптимального, по максимуму достоверности, многоальтернативного распознавания уровней параметра контроля по вектору стохастических величин, с коррекцией допусковых интервалов на контролируемые уровни;

- развитие теории обнаружения изменений свойств стохастических сигналов и динамических систем, в части многоальтернативного контроля с заданной достоверностью количественных скачкообразных изменений спектральных характеристик сигналов;

- развитие теории контроля и диагностики динамических объектов с использованием нестационарных по среднему значению дрейфовых стохастических сигналов и разработка метода получения избыточной информации по составляющим остаточной дисперсии сигналов;

- развитие метода анализа информационных свойств статистических моделей результатов измерений при параметрическом тестировании случайных сигналов для оценивания информативности параметров контроля.

П.Ф. Щапов является автором разделов и подразделов 1.2 – 1.5; 2 – 5; 7.1 и 7.2, О.Г. Аврунин подразделов 6.2 – 6.4 и 7.3, подразделы 1.1; 6.1 и Введение написаны авторами совместно.

**1.1. Анализ существующих методов повышения
достоверности: общие подходы к уменьшению
неопределенности первичной информации
об объекте контроля и диагностики**

Качество процедуры контроля характеризуется достоверностью, которая количественно оценивается вероятностью того, что результат контроля соответствует действительному состоянию объекта контроля [1-3]. Основными причинами снижения достоверности могут быть [3]:

- несоответствие объекта контроля приписываемой ему модели (вызывает появление методической составляющей вероятностей ошибок контроля);
- наличие погрешностей измерения контролируемого параметра (вызывает появление инструментальной составляющей вероятностей ошибок контроля).

Так как полная вероятность ошибок контроля является дополнением достоверности до единицы, то уменьшение любой из составляющих вероятности ошибки приводит к повышению достоверности контроля. Существующие в настоящее время методы повышения достоверности направлены на уменьшение инструментальной составляющей вероятности ошибок. Модель объекта (математическая, вероятностная и т. д.) считается адекватной физическим свойствам или процессам функционирования реального объекта контроля. На рис 1.1 представлены базовые методы повышения достоверности по видам контроля.

1.1.1. Структурно-алгоритмические методы

Повышение достоверности, при использовании этих методов, достигается за счет коррекции соотношения между результатами измерения контролируемой величины и границами допускового интервала. На рис. 1.2 представлена общая классификация струк-

турно-алгоритмических методов [3], особенностью которых является применение как структурной так и информационной избыточности.

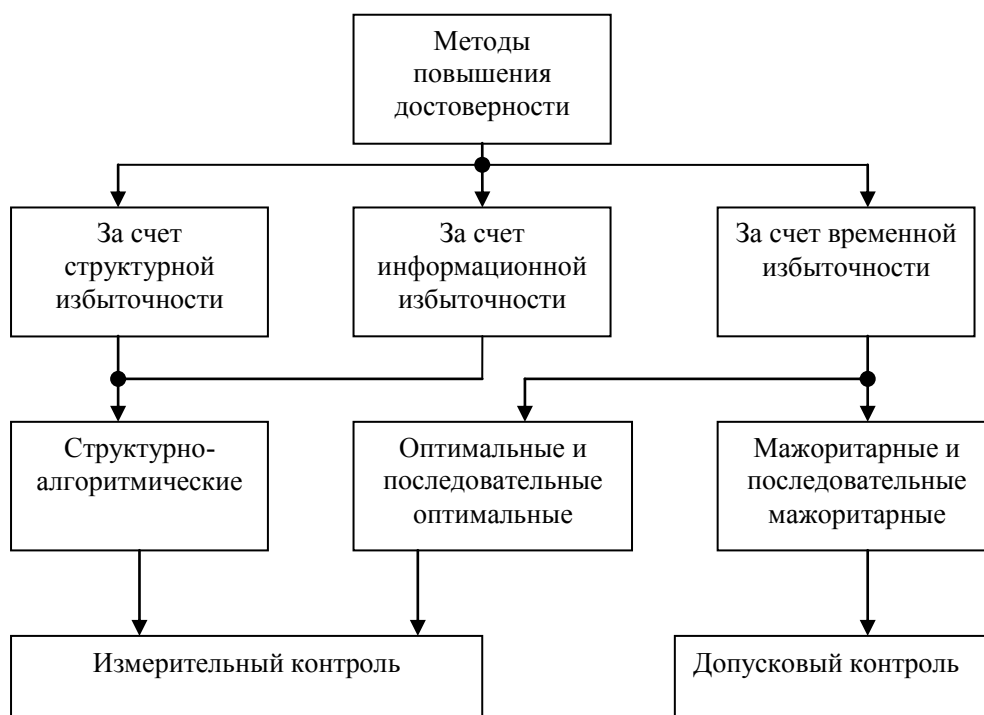


Рис. 1.1. Базовые методы повышения достоверности

Методы адекватного смещения **уставок** используют для коррекции соотношения между значением контролируемой величины X и граничными значениями допускового интервала (X_H, X_B) без влияния на характеристику измерительного канала. Обязательным условием коррекции является необходимость использования **образцовой** величины X_0 , однородной по отношению к контролируемой – X [4]. Коррекция помогает устранить влияние расхождения между действительной $\varphi(X)$ и номинальной $\varphi_0(X)$ функцией измерительного преобразования на величину смещения результата измерения относительно границ X_H, X_B . Возможность аддитивной и мультипликативной коррекции обеспечивается, соответственно, за счет определения вспомогательных величин: $b = \varphi(X_0) - \varphi_0(X_0)$, $c = \varphi(X_0) / \varphi_0(X_0)$.

Эффективность коррекции максимальна, если значение образцовой величины X_0 находится точно посередине допускового интервала. Влияет на эффективность коррекции и точность формирования величины X_0 .

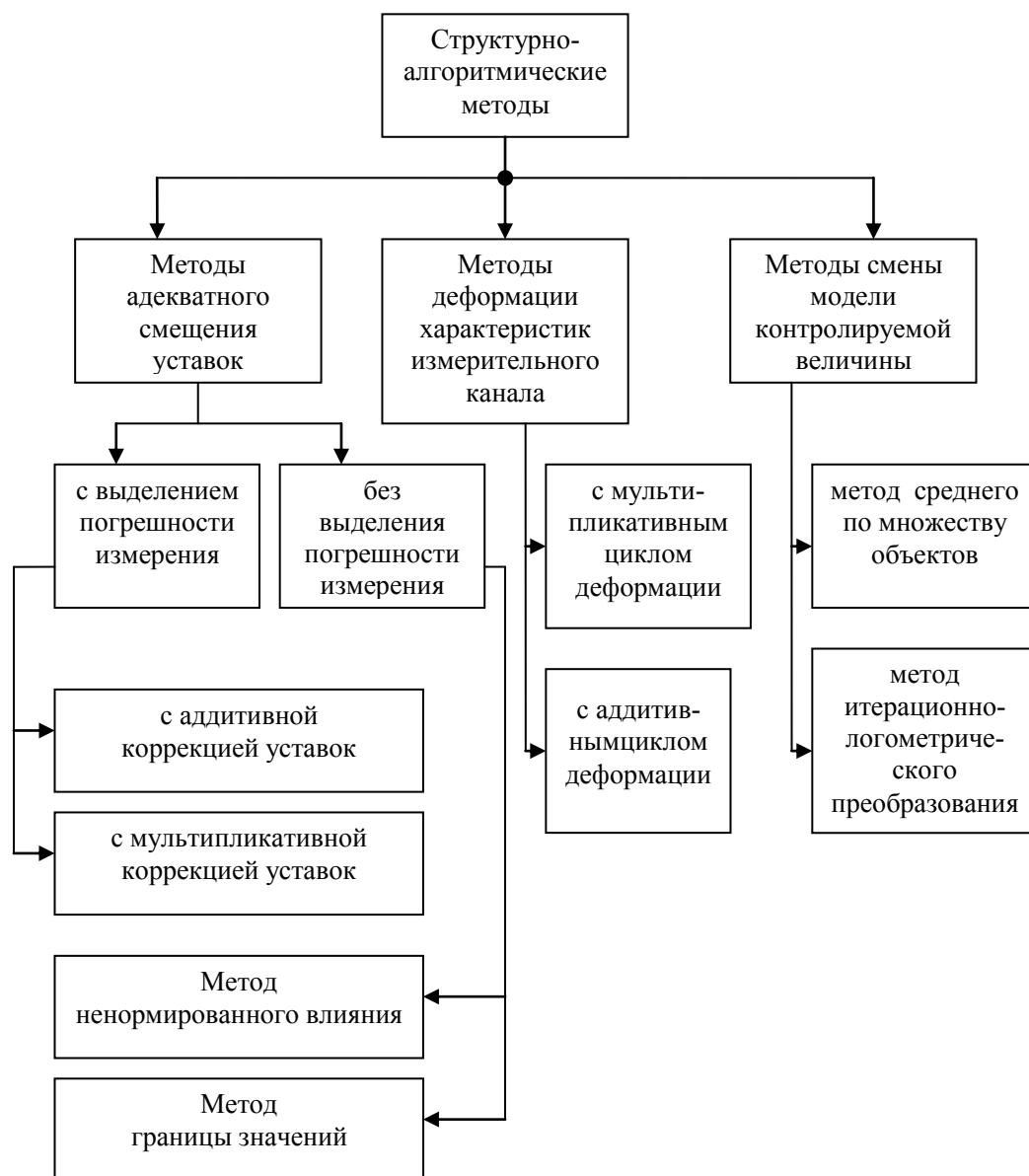


Рис. 1.2. Классификация структурно-алгоритмических методов

Сама процедура коррекции сводится к расчету коррекции уставок:

– при аддитивной коррекции

$$\begin{cases} \varphi_a(X_H) = \varphi_0(X_H) + b, \\ \varphi_a(X_B) = \varphi_0(X_B) + b; \end{cases}$$

– при мультипликативной коррекции

$$\begin{cases} \varphi_M(X_H) = \varphi_0(X_H) \cdot c, \\ \varphi_M(X_B) = \varphi_0(X_B) \cdot c. \end{cases}$$

Отметим, что обязательным условием коррекции является условие $X_H < X_0 < X_B$.

Анализ вероятностей ошибочных решений показывает [3], что при мультипликативной коррекции уставок с выделением погрешности эта вероятность более чувствительна к погрешности формирования образцовой (вспомогательной) величины, чем при аддитивной коррекции. Следует подчеркнуть, что нелинейность характеристики преобразования должна быть небольшой.

Методы адекватного смещения уставок без выделения погрешности направлены на уточнение характеристики преобразования в пределах граничных значений допускового интервала.

Метод ненормированного влияния использует, если возникают трудности в формировании величины X_0 или в обеспечении заданной точности ее воспроизведения. В этом случае достаточно обеспечить постоянство значений X_0 , а новые уставки формировать в виде: $\varphi_1(X_H^k) = \varphi_0(X_H) + \varphi(X_0)$, $\varphi_1(X_B^k) = \varphi_0(X_B) + \varphi(X_0)$

Принятие решения γ_0 : объект контроля в норме, осуществляют если выполняется условие $\varphi_1(X_H^k) < \varphi(X + X_0) < \varphi_1(X_B^k)$.

Если это условие не выполняется, то принимают решение γ_1 : объект контроля не в норме.

Недостаток метода – необходимость подачи на вход измерительного канала величины X_0 для каждого текущего значения величины X .

Кроме этого, характеристика преобразования $\varphi(X)$ должна обладать минимальной нелинейностью.

Если характеристика преобразования нелинейна, то используют метод граничных значений. В этом случае на вход измерительного канала подают две образцовые величины, соответствующие границам X_H , X_B допускового интервала. Решение γ_0 принимают, если для преобразованного текущего значения X выполняется условие $\varphi_1(X_H) < \varphi(X) < \varphi_1(X_B)$.

Общим недостатком рассмотренных структурно-алгоритмических методов первой группы является использование вспомогательных образцовых величин (X_0 , X_H , X_B) физически однородных по отношению к контролируемой величине X .

Структурно-алгоритмические методы второй и третьей группы основаны на применении тестовых методов повышения точности

измерений за счет избыточности модели функциональных преобразований или параметров моделей контролируемой величины, позволяющей получить дополнительную информацию не только об измеряемой величине, но и о погрешностях, допускаемых при измерениях [5]. Обязательным для этих методов является формирование величины, пропорциональной погрешности измерений.

Отличительной особенностью методов деформации характеристики измерительного канала является выделение двух вспомогательных величин $X_{01} = X_B$ и $X_{02} = X_H$, используемых, соответственно, для мультипликативной и аддитивной коррекции характеристики измерительного преобразования. Деформация характеристики осуществляется в несколько двухэтапных циклах, причем выбор начального этапа первого цикла зависит от того, какая из погрешностей (аддитивная или мультипликативная) является преобладающей при влиянии на результат контроля. Эффективность методов с деформацией характеристики выше, чем при аддитивной или мультипликативной коррекции уставок (при двух и более цифрах). Более того, возможен учет степени нелинейности характеристики измерительного преобразования. При мультипликативном цикле деформации мультипликативная погрешность измерения на достоверность не влияет. Если необходимо исключить влияние аддитивной погрешности, то предпочтителен метод с аддитивным циклом деформации. Недостаток – наличие образцовых вспомогательных величин X_{01} и X_{02} .

Методы со сменой параметров модели контролируемой величины используют образцовую величину X_0 , формируемую вспомогательной моделью измерительного преобразования, позволяющей оценить относительное изменение $Q(X_0)$ этого значения и уточнить уравнение преобразования по соотношению $\varphi[X_0, Q(X_0)] = \varphi(X)$.

Недостаток метода – данное соотношение необходимо обеспечивать во всем диапазоне контролируемой величины X , в качестве которой желательно использовать относительные величины.

Эффективность метода среднего по множеству объектов уменьшается, если появляются систематические погрешности в оценках контролируемого параметра. Тогда математическое ожидание относительной контролируемой величины не совпадает с серединой допускового интервала. Если рассматривать метод итерационно-логометрического преобразования, то его имеет смысл использовать

лишь в случае, когда характеристика преобразования монотонна и аппроксимируется линейной функцией.

Более интересным, с точки зрения многопараметровых моделей измерительного контроля абсолютных значений величины X , является тестовый алгоритм повышения точности измерения, использующий избыточность по модели преобразования

$$\begin{cases} \varphi(X) = a_1 + a_2 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^{n-1}, \\ \varphi_1(X) = a_1 + a_2 \cdot \varphi_{01}(X) + \dots + a_n \cdot [\varphi_{01}(X)]^{n-1} \\ \dots \\ \varphi_n(X) = a_1 + a_2 \cdot \varphi_{0n}(X) + \dots + a_n \cdot [\varphi_{0n}(X)]^{n-1}, \end{cases}$$

где $\varphi(X)$ – действительная функция преобразования, имеющая n параметров $a_1, \dots, a_n$,

$\varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)$ – вспомогательные модели преобразования с дополнительными (тестовыми) функциями преобразования $\varphi_{01}(X), \dots, \varphi_{0n}(X)$.

Реальные параметры $a_1, \dots, a_n$ находят из системы уравнений $\{\varphi_1(X), \dots, \varphi_n(X)\}$, а затем подставляют в уравнение для $\varphi(X)$.

Недостаток метода – наличие дополнительных преобразователей физической величины X с фиксированными образцовыми функциями преобразования $\varphi_{01}(X), \dots, \varphi_{0n}(X)$.

Полная классификация структурных методов повышения точности применительно к средствам измерения достаточно полно изложена в [6].

Общее достоинство перечисленных методов – это возможность осуществлять коррекцию погрешностей измерения непосредственно в процессе работы технических средств контроля, что особенно ценно для автоматизированных информационных систем контроля непрерывного действия [7-13].

Общий недостаток – это необходимость наличия в составе средств контроля образцов контролируемого параметра или физически реализуемых моделей контролируемых величин.

1.1.2. Методы, использующие временную избыточность

В этом случае, повышение достоверности осуществляется за счет увеличения времени контроля, используемого для многократных измерений контролируемого параметра. Задача контроля сводится к известной в теории статистических решений [14-16] проверке сложной гипотезы $H_0 : Y \in [a, b]$ против сложной альтернативы $H_1 : Y \notin [a, b]$, где a, b – границы допускового интервала.

Качество контроля оценивается средним риском R , который при отсутствии потерь от правильных решений определяется при многопараметрическом контроле по формуле [17]

$$R \approx \sum_{i=1}^N (C_1 \alpha_i + C_2 \beta_i) + C,$$

где C_1, C_2 – потери, обусловленные соответственно ошибками первого и второго рода,

α_i, β_i – вероятности этих ошибок по всем $i = 1, \bar{N}$ параметрам контроля.

Поскольку рассматриваемые алгоритмы контроля базируются на минимизации среднего риска, они являются оптимальными. Классификация методов повышения достоверности, использующих оптимальные алгоритмы обработки первичной информации представлены на рис 1.3

Оптимальный алгоритм основан на использовании теории статистических решений. Критериальная статистика является функцией измеренных значений [17]

$$\Lambda(y_1, \dots, y_n) = \frac{\sum_{y \in y_h, y_B} f(y_1, \dots, y_n | y) \cdot f(y) dy}{\sum_{y \notin y_h, y_B} f(y_1, \dots, y_n | y) \cdot f(y) dy}.$$

Для взаимно-независимых результатов измерений условная плотность вероятности выборки $f(y_1, \dots, y_n | y)$ может заменяться плотностью вероятности $\varphi(\cdot)$ погрешности измерений

$$f(y_1, \dots, y_n | y) = \prod_{i=1}^n \varphi(y_i - y).$$

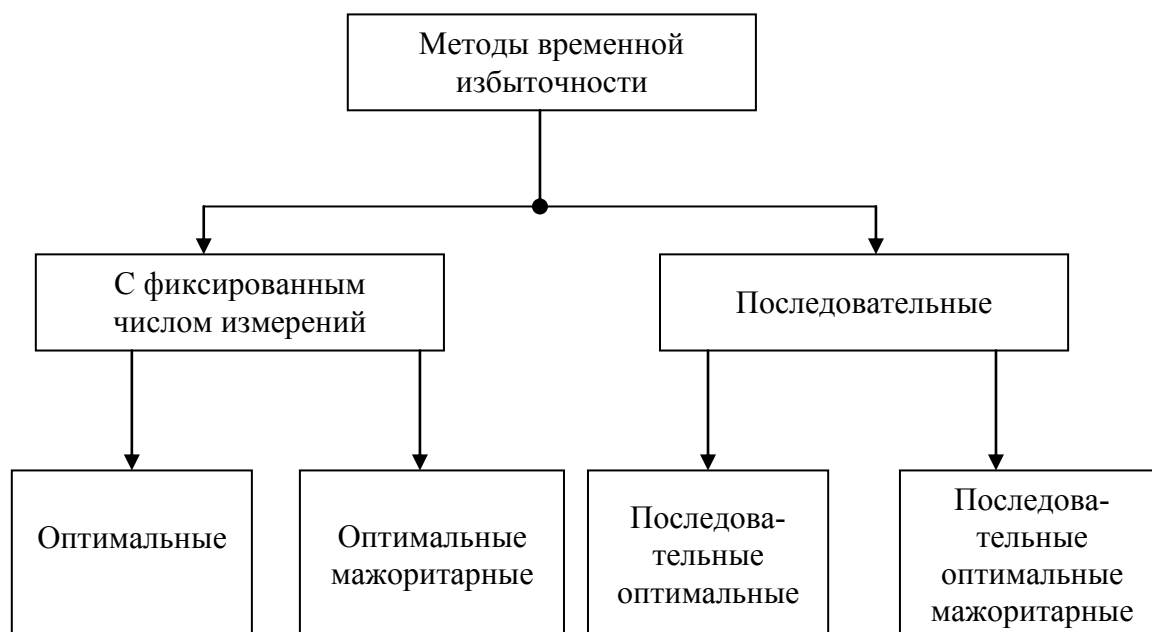


Рис. 1.3. Классификация методов, использующих временную избыточность

Выбор решений γ_0 и γ_1 производят по правилу выбора

$$\gamma_0 : \Lambda(y_1, \dots, y_n) \geq 1, \gamma_1 : \Lambda(y_1, \dots, y_n) < 1.$$

Такой выбор решений обеспечивает максимально возможную достоверность контроля, которая может быть повышена лишь путем уточнения вида и параметра плотности вероятности погрешностей и увеличения n числа многократных измерений.

Оптимальный алгоритм контроля может быть использован, когда значения параметра контроля невозможно измерить методами прямого измерения, а только методами измерения косвенного, с использованием уравнения измерения $y = f(\bar{X})$. Результат измерения и сама измеряемая величина будут отличаться значимой неопределенностью, причем неопределенность самой контролируемой величины Y является априорной и устранена быть не может.

Метод контроля, использующий оптимальный мажоритарный алгоритм повышения достоверности основан на проведении n проверок объекта контроля. В ходе каждой проверки устанавливают факт нахождения результата измерений параметра контроля в допусковом интервале $[a, b]$. После этого подсчитывают число проверок μ , дающих результат «в допуске». Определяют пороговое

целочисленное значение S , вычисляемое как функция заданных вероятностей ошибок контроля первого α и второго β рода, а также числа проверок n [17]. Принимают решение «годен», если $\mu \geq S$, и решение «не годен», если $\mu < S$. Достоверность контроля можно повысить при фиксированных α и β , увеличивая число проверок n .

Последовательный оптимальный алгоритм отличается от рассмотренного оптимального тем, что после каждого очередного измерения значение параметра Y производится выбор одного из трех решений: γ_0 , γ_1 , γ , где γ – продолжить измерение. Критериальной статистикой является оценка среднего значения контролируемого параметра по l предварительным измерениям ($l = \overline{1, n}$)

$$y_1^* = l^{-1} \sum_{j=1}^l y_j,$$

где число n всех измерений является случайной величиной, $n \in (1, \infty)$. Интервал допустимых значений $[y_{0H}, y_{0B}]$ находится внутри контрольного интервала $[y_{1H}, y_{1B}]$, так, что $y_{1H} < y_{0H}$, а $y_{1B} > y_{0B}$. Выбор решений осуществляют по правилу

$$\begin{aligned} \gamma_0 : y_1^* &\in [y_{0H}, y_{0B}]; & y_1^* &\in [y_{1H}, y_{1B}], \\ \gamma_1 : y_1^* &\notin [y_{0H}, y_{0B}]; & y_1^* &\notin [y_{1H}, y_{1B}], \\ \gamma_2 : y_1^* &\notin [y_{0H}, y_{0B}]; & y_1^* &\in [y_{1H}, y_{1B}]. \end{aligned}$$

Для расчета границ y_{0H} , y_{0B} , y_{1H} , y_{1B} , задаются требуемыми уравнениями вероятности ошибок α и β . Если для выбранной достоверности контроля ($P_d = 1 - \alpha - \beta$) число измерений необходимого для получения решений γ_0 и γ_1 велико (или экономически неоправданно), величину n – ограничивают. Достоверность контроля, естественно, снижается.

При использовании последовательного оптимального мажоритарного алгоритма устанавливают, в отличие от оптимального мажоритарного алгоритма, два целочисленных порога S и $(n - S + 1)$. Подсчитывают число исходов μ «в допуске» и $(i - \mu)$ «не в допуске» ($\mu = 1, i; i = 1, n$).

Принимают решение «годен», если $\mu = S$, «не годен», если $i - \mu = n - S + 1$ и решение продолжить контроль, если $S + i - n - 1 < \mu < S$.

Очевидно, на n -ом этапе могут быть приняты решения «годен» или «не годен». Повышение достоверности достигается увеличением n и уменьшением задаваемых вероятностей ошибок α и β .

Общее достоинство рассмотренных алгоритмов контроля – это возможность планирования контроля, исходя из задаваемой достоверности. Рассмотренные методы – универсальны, так как решают задачу повышения достоверности для измерительного и допускового многопараметрического контроля.

Общий недостаток – используемый в рассмотренных алгоритмах критерий минимизации среднего риска предполагает известными плотность распределения контролируемого параметра и условные плотности распределения результатов измерения контролируемых величин. Нарушение этого условия приводит к появлению неустранимой методической составляющей вероятностей ошибок контроля, и следовательно, всегда существует предел повышению достоверности контроля. Предел этот тем ниже, чем неадекватнее вероятностные модели параметра контроля и контролируемых величин физическим свойствам и особенностям объекта контроля.

Оптимальные алгоритмы получили развитие в составе информационно-измерительных технологий неразрушающего контроля [18-23] и мониторинга технического состояния промышленных систем [24, 25].

1.1.3. Общие подходы к повышению достоверности контроля и диагностики при неопределенности первичной информации

Достоверность – это базовый показатель качества неразрушающего контроля [26]. Повышение достоверности – это задача уменьшения неопределенности в получении первичной информации об изменениях свойств объекта контроля или диагностики.

Основными источниками неопределенности первичной информации о параметре контроля, содержащейся в результатах измерений контролируемых величин являются следующие факторы:

– погрешности технических измерений, проводимых, в ходе контроля, на базе нестандартизованных средств измерительной техники [27-35], включая несертифицированные средства неразрушающего контроля [36];

- сложность формализованного описания объекта контроля, особенно с учетом случайных воздействий внешней среды [16, 37-42];

- ограничения на сбор первичной измерительной информации на этапе обучения системы контроля и диагностики [18, 20, 21, 43-45];

- нестационарность контролируемых величин во времени, особенно для динамических объектов контроля и диагностики [22-25, 46-56].

Несмотря на неоднозначность перечисленных факторов, их объединяет то, что существуют они как единое целое в рамках неизвестной модели стохастического влияния количественных изменений параметров контроля на вероятностные свойства вектора контролируемых информационных сигналов. Теоретическое обоснование выбора такой модели, при создании систем контроля стохастических параметров, должно производиться на этапе обучения, обеспечивая минимальную неопределенность результатов многомерных преобразований на этапах контроля или диагностики, безотносительно к виду влияющих факторов. При этом следует учитывать, что выбор размерности вектора контролируемых сигналов и числа уровней контролируемого параметра определяют достоверность принятия решений и зависят от неполноты первичной информации о свойствах объекта контроля и диагностики, полученной на этапе обучения. И хотя современная информационная техника – это крупнейший раздел технической кибернетики [57], методы и теоретические разработки последней недостаточно эффективно используются для совершенствования информационно-измерительных технологий многоальтернативного контроля и функциональной диагностики объектов со случайными информационными сигналами. В основном, эти методы направлены на решение частных задач уменьшения эффекта факторного влияния на полноту измерительной информации.

Повышение точности не прямых измерений (многопараметрический контроль) проблематично, даже если применять стандартные методики оценивания результатов многократных измерений [58], причем с учетом вероятностных свойств случайных погрешностей [59-61], когда априори неизвестен вид действительной функции непрямого преобразования. Систематические погрешности

намного превысят случайные и достоверность контроля только уменьшится [37].

Если рассматривать существующие теоретические подходы к формализованному описанию объектов контроля и диагностики в условиях случайных факторных влияний, то следует указать на параметрические модели дисперсионного и регрессионного анализа [61-64], используемые для описания статических объектов наблюдения. Для описания динамических объектов используют как альтернативу вероятностно-статистическим методам, теорию нечетких множеств [65] или вводят нечеткую меру, по аналогии с вероятностной [66]. Однако, такая замена достаточно спорна, поскольку наряду с теоретическим обоснованием [67] возможности сравнения методов обработки нечетких множеств с вероятностными, имеются и теоретические доказательства невозможности такого сравнения [68]. Если вернуться к параметрическим моделям факторного влияния, то следует указать на их ограниченность, из-за учета вероятности ошибки только первого рода. Это не позволяет выявлять, с заданной вероятностью, эффекты случайного изменения условий измерительного эксперимента на этапе обучения и приводит к появлению статистически неоднородных массивов первичной измерительной информации [69].

Существующие теоретические подходы к вопросу выбора вектора контролируемых величин, при ограничениях на объемы первичной информации о свойствах объекта контроля, хорошо разработаны для альтернативных моделей принятия статистических решений в рамках многомерного дискриминантного анализа [14-16, 18]. Однако, не получили теоретического обоснования многоальтернативные модели принятия статистических решений, что не позволяет, при ограничениях на объемы обучающих выборок и при заданных погрешностях измерительных преобразований, находить оптимальные соотношения между числом уровней параметра контроля и размерностью вектора контролируемых величин, хотя получены определенные результаты при использовании адаптивных процедур принятия решений на основе интервальных моделей [70].

Переходя к существующим теоретическим разработкам в области использования, для принятия решений, случайных измерительных сигналов, несущих информацию о свойствах динамических объектов контроля и диагностики, следует отметить два базовых

направления. Во-первых, работы, посвященные оптимальному синтезу информационных систем в условиях априорной неопределенности [25, 56, 71-74]. Во-вторых, работы, затрагивающие теоретические аспекты распознавания и обнаружения изменений свойств динамических сигналов и систем [16, 46, 75, 76]. Используемые, в рамках этих базовых направлений, случайные сигналы являются реализациями случайных процессов с тем или иным типом нестационарности, наличие или отсутствие которой выявляется в ходе альтернативного тестирования. Теория многоальтернативного тестирования таких сигналов при ограничениях на время наблюдения – не разработана. Это не позволяет, с заданной достоверностью в рамках условной шкалы, оценивать количественно качественные изменения состояний объектов контроля и диагностики.

Проведенный в 1.1.1 и 1.1.2 анализ существующих методов повышения достоверности показывает, что эти методы эффективны для хорошо организованных объектов контроля и диагностики.

Объекты со стохастическими параметрами относятся к плохо организованным (диффузным) [57], и как показывают результаты анализа данного пункта, требуют статистического подхода к организации всех этапов синтеза системы многопараметрического контроля и вероятностной функциональной диагностики.

В первую очередь это относится к этапу обучения, особенно, если невозможно создание стандартных образцов параметров и физически реализуемых моделей состояний сложных объектов.

Как следует из результатов анализа, нерешенными в разработке методов повышения достоверности, остаются вопросы:

- создания физических моделей стохастического параметра, адекватно воспроизводящих его уровни при заданной достоверности их контроля;
- обучения системы контроля по метрологически несовершенным физическим моделям параметра;
- создания математической модели преобразования стохастических контролируемых величин в несмещенную, состоятельную и эффективную оценку параметра;
- получения избыточной информации об изменениях параметров и состояний сложных объектов по изменениям вероятностных свойств контролируемых величин.

1.2. Анализ информационных свойств системы многопараметрического контроля стохастических сложных объектов

Функциональное назначение системы многопараметрического контроля – это обеспечение максимальной полноты получения информации о параметре объекта по контролируемым физическим величинам, коррелированным с этим параметром.

То, что первичная информация после преобразования принимает форму количественных суждений о состоянии объекта, не мешает рассматривать любую многопараметрическую систему контроля, диагностики, как систему информационную. Степень общности процессов измерения и контроля, в информационном отношении велика, что открывает возможность их совместного исследования и получения ряда соотношений, справедливых и при измерениях, и при контроле [77]. В обоих случаях обязательной является операция сравнения с эталонной величиной (измерение [78]) или нормой (контроль [3, 57]) и, кроме того, существует статистическая зависимость между оцениваемыми значениями контролируемой физической величины (состояниями объекта) до и после проведения измерений [4, 77, 79].

Рассмотрим некоторый сложный объект (например, технологический процесс), характеризующийся параметром Y (контролируемая величина) и пусть $X_1, \dots, X_k$ – измеряемые физические величины (контролируемые величины), отражающие свойства физического объекта. Пусть Y – случайная величина в том смысле, что отсутствует возможность точного, метрологически обоснованного воспроизведения любого ее заданного значения в диапазоне A_Y всех ее возможных изменений. Однако, дисперсия величины Y в любой точке диапазона – конечна и постоянна ($\sigma_Y^2 = \text{const}$), а для математических ожиданий Y и $\{X_i\}_1^k$ существует функциональная, но априори неизвестная связь

$$M[Y] = F(M[X_1], \dots, M[X_k]). \quad (1.1)$$

Кроме этого, для любой из контролируемых величин существует условная плотность $f(X_i | Y_j, X_l, l \neq i)$, отражающая

стохастическую связь между величиной X_i и оставшимися контролируемыми величинами при условии, что $Y = Y_j = \text{const}, j = 1, 2, \dots$. Все величины принадлежат множеству вещественных чисел, и их количество теоретически считается неограниченным, хотя по техническим причинам, имеет место условие $k < \infty$.

Рассмотрим обобщенную структурную схему получения и преобразования измерительной информации о значении контролируемого параметра Y по результатам измерения $X_1^*, \dots, X_k^*$ значений контролируемых величин, рис. 1.4.

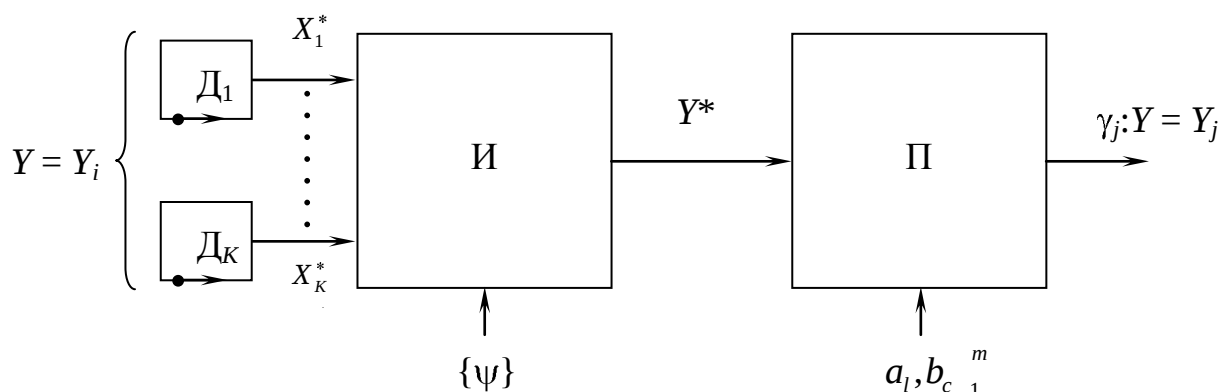


Рис. 1.4. Структурная схема информационных преобразований

Блок И (измерение) осуществляет преобразование измеренных значений $X_1^*, \dots, X_k^*$ контролируемых величин, полученных первичными преобразователями (датчиками) $D_1, \dots, D_k$, в оценку Y^* значения параметра Y

$$Y^* = \hat{F} X_1, \dots, X_n | a_1, \dots, a_p, \quad (1.2)$$

где $a_1, \dots, a_p$ – коэффициенты математической модели $\hat{F}$ – преобразования (1.1).

Оценка коэффициентов $a_1, \dots, a_p$ производится на этапе изучения объекта контроля по выборке объема n для каждой из фиксированных величин $Y_j, j = \overline{1, m}$ уровней параметра Y (этап обучения системы контроля). Блок П (принятия решений) осуществляет выбор одного γ_j $a_l, b_c 1^m$ из множества $\gamma_l 1^m$ решений о значении Y , после сравнения Y^* с нормой $a_l, b_l, l = \overline{1, m}$ в соответствии с правилом выбора решения

$$\forall Y^* \left[Y^* \in a_j, b_j \rightarrow Y^* \in Y_j \right]. \quad (1.3)$$

Множество $\{\Psi\}$ – это факторы, влияющие на правильность выбора модели преобразования $\bar{F}$ и на точность оценивания коэффициентов $a_1, \dots, a_p$ этой модели.

Найдем оценку количества информации о параметре Y , предполагая, что ширина Δ допусковых интервалов a_j, b_j , $j = \overline{1, k}$ одинакова, а общее их число равно k . В этом виде количество информации определяется разностью исходной $H(Y)$ и условной $H(Y|Y_j)$ энтропии [4, 77]

$$I = H(Y) - H(Y|Y_j),$$

$$\text{где } H(Y) = - \sum_{j=1}^k \left[\int_{a_j}^{b_j} f(y) dy \right] \ln \left[\int_{a_j}^{b_j} f(y) dy \right],$$

$f(y)$ – плотность распределения величины Y в диапазоне A_y .

Условную энтропию определим через условную вероятность $P(Y_i|Y_j)$ того, что истинное значение $M(Y) = Y_i$, в то время как результат контроля (решение γ_j) дал значение $Y = Y_j$:

$$H(Y_i|Y_j) = - \sum_{i=1}^k P(Y_i|Y_j) \ln P(Y_i|Y_j).$$

При равновероятном распределении значений $Y_1, \dots, Y_k$ и нормальном законе распределения отклонения Y^* от действительного значения $M[Y] = \text{const}$, если дисперсия этого отклонения равна σ_y^2 , имеем [77]

$$H(Y) = \ln \frac{A_y}{\Delta}; \quad H(Y|Y_j) = \ln \frac{\sigma_y \sqrt{2\pi e}}{\Delta}.$$

Оценка снизу количества информации, с учетом двух последних выражений [4], имеет вид

$$I = \ln \frac{A_y}{\sigma_y \sqrt{2\pi e}}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь СКО σ_y , предполагая, что модель $\hat{F}(\cdot)$ представлена линейной множественной регрессией [80]

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i.$$

Пусть, для простоты анализа абсолютные случайные погрешности определения коэффициентов $a_0, \dots, a_k$ одинаковы и имеют дисперсию Δ_ψ^2 , что обусловлено фактором ψ (ограниченность обучающей выборки объемом n). И пусть контролируемые величины $X_1, \dots, X_k$ являются независимыми и имеют одинаковую размерность и дисперсии $\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = \dots = \sigma_{X_k}^2 = \sigma_X^2$.

В этом случае дисперсия σ_y^2 может быть представлена выражением

$$\sigma_y^2 = \Delta_\psi^2 (1 + k \sigma_X^2) n^{-1}.$$

При многократных измерениях параметра Y (число измерений равно N) имеем

$$\sigma_y^2 = \Delta_\psi^2 \left(1 + \frac{k}{N} \sigma_X^2 \right) n^{-1}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (1.4) получим:

$$I = \ln \frac{A_y}{\Delta_\psi \sqrt{2\pi e \left(\frac{1}{k} + \frac{\sigma_X^2}{N} \right)}} \sqrt{\frac{n}{k}}. \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) можно рассматривать, как количество ожидаемой измерительной информации [4] о контролируемой величине Y при неустранимой дисперсии σ_X^2 входных измеряемых величин $X_1, \dots, X_k$. Существование этой дисперсии (одинаковой, в данном примере, для всех входных величин) не мешает увеличивать

количество измерительной информации, для задач контроля, за счет увеличения k этих величин. Однако, в этом случае, отношение объема обучающих выборок n к числу k входных величин должно оставаться величиной либо постоянной, либо тоже увеличиваться. Это означает, что объем обучающей выборки должен расти, по мере привлечения для контроля новых входных величин. Фактически должно соблюдаться условие

$$n / k = \text{const}, \quad (1.6)$$

которое хорошо согласуется с известными положениями теории классификации сигналов в условиях неопределенности [14, 81-83] и дискриминантного анализа [84, 85]. Наличие в знаменателе, под знаком логарифма в выражении (1.5), смещения Δ_{Ψ} указывает на то, что этап обучения системы контроля или диагностики играет важную роль. Он определяет величину неустранимых систематических смещений при оценках коэффициентов модели измерительного преобразования $\hat{F}(\cdot)$. Уменьшить эти смещения, а, следовательно, повысить достоверность контроля за счет увеличения количества информации, можно лишь увеличивая объем обучающей выборки n . Повышение лишь числа N многократных измерений не устраняет негативные эффекты факторов $\{\Psi\}$.

Завершая анализ информационных свойств системы контроля (диагностики) объектов со случайными параметрами, следует сказать, что величины k , n , N , а также число уровней m контролируемого параметра не могут выбираться поодиночке. Они взаимосвязаны в рамках модели (1.5) и выбор их – это оптимизационная задача, в которой критерием качества является количество возможной ожидаемой информации. Теоретические основы оптимального синтеза системы информационного обеспечения алгоритмов и процедур принятия решений при неопределенности измерительных сигналов разработаны, в настоящее время, для узких и частных задач. Общей теории формирования таких систем – нет. Особенно это касается эффектов возникновения неопределенности из-за ограниченности, иногда большой, обучающих выборок, на стадии планирования измерительных экспериментов при изучении сложных объектов многопараметрического контроля и вероятностной диагностики.

1.3. Анализ моделей контролируемых величин в условиях статистических неоднородностей измерительного эксперимента

1.3.1. Общая модель контролируемой величины

Реализация требований обеспечения заданной полноты информации в системах контроля наталкивается на трудности принципиального характера:

- контролируемые физические характеристики (параметры контроля) могут быть настолько сложными, что для них отсутствуют даже стандартные образцы;
- уровни измеряемых непосредственно контролируемых физических величин привязаны к априорно неопределенным состояниям физического объекта измерительного контроля и не могут быть воспроизведены однозначно для любого из фиксированных состояний.

Физическая сложность параметров контроля может быть обусловлена требованиями их максимальной информативности в отношении качественных изменений объекта контроля и такие параметры, чаще всего, являются комплексными физическими величинами, недоступными прямым измерениям. Что же касается контролируемых величин (или информационных признаков [78]), то для промышленных объектов контроля (технологические линии, промышленное оборудование, механические системы и т.д.) эти показатели представляют собой случайные процессы с разными типами нестационарности [86].

В любом случае, речь идет об объектах контроля, для которых число информационных признаков теоретически стремится к бесконечности, а уровни конечного числа параметров контроля не могут быть воспроизведены с метрологической точностью для любого из нормативных состояний объекта контроля.

Сокращение числа параметров контроля из-за невозможности обеспечения точности измерений их уровней приводит к потере значительной части информации. Это выражается в том, что параметры – не информативные в одном, например, нормальном состоянии объекта контроля, приобретают особое значение в других состояниях. Возникла необходимость планирования этапов сбора и переработки первичной информации со сложными взаимосвязями,

отражающими структуру объекта контроля на уровне усложненных математических моделей преобразования информации.

Такие модели могут служить основой нормативного подхода при оценке качественного состояния объекта контроля как объекта многофакторного, для которого любой измерительный эксперимент должен включать математические методы планирования в условиях неконтролируемых факторных влияний (или неоднородностей [69]), искажающих результаты такого эксперимента.

При технологическом измерительном контроле, например, источниками неоднородностей дискретного типа могут являться различия в составе сырья, элементах технологического оборудования, способах обработки первичной информации и т.п. Природа дискретных источников неоднородностей – качественная, приводящая к случайным погрешностям измерительного эксперимента.

Источниками неоднородностей непрерывного типа являются постепенные параметрические изменения свойств контролируемого объекта, приводящие к искажению сигналов измерительной информации в форме дрейфа или нестационарности среднего значения, дисперсии, спектральных составляющих. Чаще всего это вызвано старением элементов технологического оборудования или элементов средств измерений. Природа источников неоднородностей непрерывного типа – количественная, приводящая к неслучайным систематическим погрешностям измерительного эксперимента.

Независимо от типа неоднородностей можно говорить о неустраняемых влияющих факторах, которые, однако, можно учесть, планируя измерительные эксперименты, как на этапе обучения системы измерительного контроля и диагностики, так и на этапах практического использования этой системы в рамках управления обеспечением качества в ходе промышленного производства продукции и эксплуатации сложных технических систем.

Вся доступная исследователю информация об изменениях состояния объекта контроля содержится в векторе контролируемых величин $\overline{X}$, составляющие которого доступны прямым измерениям (однократным или многократным).

Пусть x_{li} – результат i -го измерения составляющей X_l , $l = \overline{1, N_l}$ в момент времени t_i (N_l – число измерений по l -ой составляющей). Общая модель стохастического влияния параметра контроля Y и

множества $X_v^{n-1}, v \neq l$, физических показателей на входную величину X_l имеет вид

$$X_l(t)/Y = F_l(Y, t) + \varepsilon_l \left[Y, X_v^{n-1}, t \right] + \varepsilon_l(t), \quad (1.7)$$

где F_l – основная информационная составляющая модели (1.7),

ε_l – дополнительная информационная составляющая,

$\varepsilon_l(t)$ – остаточная случайная составляющая.

Вторая составляющая ε_l может использоваться для моделирования дискретных неоднородностей, превращающих эту составляющую в дискретную случайную величину, функционально зависящую от времени наблюдений t .

Основная информационная составляющая F_l может моделировать непрерывные неоднородности в виде неуправляемого дрейфа вектора Y во времени t .

Будем рассматривать в дальнейшем три модели неопределенности результатов измерений контролируемых величин, определяемых типом неоднородности измерительного эксперимента:

1) статическая величина с неоднородностями дискретного типа

$$X_l/Y = F_l(Y) + \varepsilon_l \left[X_v^{n-1} \right] + \varepsilon_l; \quad (1.8)$$

2) динамическая величина с неоднородностями дискретного типа

$$X_l(t)/Y = F_l(Y) + \varepsilon_l \left[X_v^{n-1}, t \right] + \varepsilon_l; \quad (1.9)$$

3) динамическая величина с неоднородностями непрерывного и дискретного типов

$$X_l(t)/Y = F_l(Y, t) + \varepsilon_l \left[X_v^{n-1}, t \right] + \varepsilon_l. \quad (1.10)$$

В общей модели (1.7) третья составляющая $\varepsilon_l(t)$ отражает инструментальную погрешность технических средств контроля.

Вторая составляющая отражает неопределенность, обусловленную факторным влиянием Y и X_v^{n-1} на информационный признак X_l . Первая составляющая моделирует влияние функции преобразования, вид и параметры которой также неопределенны, однако могут быть заменены функциональной моделью, степень неадекватности которой также порождает неопределенность в рамках систематической погрешности.

1.3.2. Математическая модель статической контролируемой величины с неоднородностями дискретного типа

Под объектом контроля будем понимать материальный (физический) объект, обладающий многочисленными особенностями (физическими свойствами), которые находятся в многосторонних и сложных взаимосвязях, причем одно или несколько из этих свойств могут быть измерены.

Под моделью объекта контроля будем понимать математическое описание, отражающее как особенности объекта, так и неопределенность оценки его качественного состояния по результатам измерения контролируемых величин, характеризующих отдельные свойства объекта.

Такая модель должна обеспечивать максимально возможную величину первичной информации применительно к двум задачам, решаемым в ходе создания системы контроля:

1. Анализ вероятностной структуры объекта контроля (этап обучения);
2. Синтез оптимальной, по максимуму достоверности принятия решений, системы многопараметрического контроля (этап контроля и диагностики).

Каждая из задач может быть реализована в рамках своего варианта модели (1.8) контролируемых величин.

1.3.2.1. Модель контролируемой величины на этапе обучения.

Физический объект контроля представлен множеством $\pi = \pi_1, \dots, \pi_k$ своих состояний (уровней параметра Y), по каждому из

которых имеется $n_j, j = \overline{1, k}$, выборки для вектора $\overline{X}$. Общее число представленных для анализа значений вектора $\overline{X}$ равно $N = \sum_{j=1}^k n_j$.

Технические средства контроля осуществляют прямые измерения величин $X_1, \dots, X_n$, представляя значения этих величин в форме точечных оценок $\overline{X}^*$ вектора $\overline{X}$. По результатам многократных N измерений осуществляют многомерный статистический анализ выборочных значений вектора $\overline{X}$, позволяющий:

а) выбрать модель условной n -мерной плотности распределения $f(\overline{X} / Y)$ вектора $\overline{X}$;

б) ранжировать составляющие вектора контролируемых величин $\overline{X}$ по информативности относительно изменений уровней $y_1, \dots, y_k$ параметра Y ;

с) минимизировать количество составляющих вектора $\overline{X}$ при сохранении максимальной величины ожидаемой информации о значениях уровней $y_1, \dots, y_k$ параметра контроля Y , при минимуме неопределенности результатов измерения.

Перечисленные задачи могут быть решены в рамках многофакторного дисперсионного анализа [84,85] результатов многократных измерений составляющих $X_1, \dots, X_n$ при условиях $Y \in y_j, j = \overline{1, k}$ и априорном предположении о невырожденном нормальном распределении вектора показателей контроля $\overline{X}$ для всех y_j .

Такой анализ позволяет представить результат измерения любого из k показателей $X_1, \dots, X_n$ в виде линейной комбинации с n влияющими факторами (фактор Y и $(n-1)$ факторов, которыми являются оставшиеся показатели контроля)

$$X_i = z_1 \beta_{1i} + \dots + z_n \beta_{ni} + \varepsilon_i, \quad (1.11)$$

где $\beta_{1i}, \dots, \beta_{ni}$ – известные постоянные коэффициенты,

$i = \overline{1, N}$; $z_1, \dots, z_n$ – переменные, зависящие от соответствующих влияющих факторов.

Вид дисперсионного анализа результатов измерений зависит от выбора коэффициентов $\beta_{ji}, j = \overline{1, n}$ и определяет конкретную математическую модель объекта измерения:

1. Модель многофакторной перекрестной классификации (параметрическая или компонент дисперсий) – если β_{ji} могут принимать только значение 0 или 1;

2. Модель множественной регрессии – если $\beta_{ji} \in -\infty, \infty$ для всех $j = \overline{1, k}$ и $i = \overline{1, n}$;

3. Ковариационная модель – если часть коэффициентов β_{ji} может принимать значение только 0 или 1, а остальная часть – любые значения на интервале $[-\infty, \infty]$.

На рис. 1.5 представлена структурная схема процесса обработки результатов N -кратных измерений составляющих вектора $\overline{X}$ для K состояний (например, уровней параметра контроля Y) физического объекта контроля.

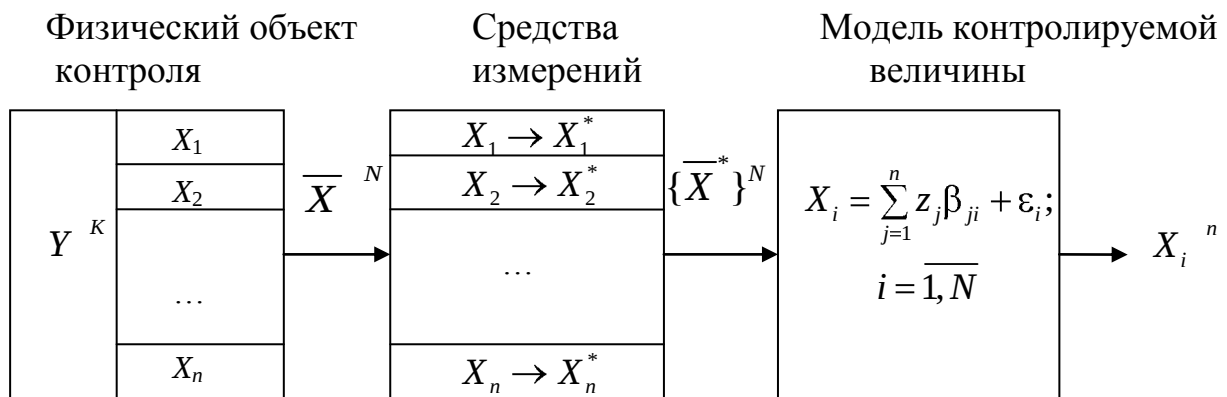


Рис. 1.5. Структурная схема процесса обработки результатов многократных измерений на этапе анализа обучающих выборок

В отношении случайного остатка ε_i модели (1.11) следует отметить, что его дисперсия σ_ε является мерой остаточной энтропии значений X_i после измерения [4, 87] и выбор модели контролируемой величины должен быть таким, чтобы эта дисперсия была минимальной.

1.3.2.2. Модель контролируемой величины на этапе контроля.

Синтез системы принятия решений для этапа контроля предусматривает решение следующих задач:

1. Выбор модели дискриминации результатов однократных измерений составляющих нового вектора $\overline{X}$ с целью отнесения

этого вектора к одному из K кластеров (или классов) $\bar{X}^{(j)}$, $j = \overline{1, K}$, определяющих уровень y_j параметра контроля

$$\forall \bar{X} \left[\bar{X} \in \bar{X}^{(j)} \rightarrow \bar{X} \in y_j \right];$$

2. Выбор оптимального, по максимуму ожидаемой информации, числа кластеров μ и числа уровней y_j при фиксированных для всех $j \in \overline{2, K}$ остаточных дисперсий σ_ε модели (1.11) $2 \leq \mu \leq K$;

3. Оценка достоверности результатов дискриминации.

Модель дискриминации должна обладать определенной робастностью (нечувствительностью) к нарушению априорных предположений о нормальности законов распределения составляющих вектора $\bar{X}$, а коэффициенты модели должны однозначно определяться на этапе обучения, включая дисперсионный анализ результатов N -кратных измерений.

Поскольку максимум ожидаемой информации об уровне y_j параметра Y соответствует максимуму его функции правдоподобия $L_j(\bar{X}^*)$, то выбор кластера $\bar{X}^{(j)}$ осуществляют из условия

$$\bar{X}^* \in \bar{X}^{(j)}, \text{ если } L_j \bar{X}^* = \sup \left[L \bar{X}^* \right], \quad (1.12)$$

где $L \bar{X}^* = L_1 \bar{X}^*, L_\mu \bar{X}^*$.

На рис. 1.6 представлена структурная схема обработки результатов однократных измерений на этапе контроля.

Поскольку $y_j^* \in y_1, \dots, y_\mu$, то формально, абсолютная погрешность измерения определяется выражением [1, 4]

$$\Delta = y_j^* - y_j,$$

и может рассматриваться как дискретная случайная величина, для которой

$$P \Delta \neq 0 = P y_j^* \neq y_j / y_j = \alpha, \quad (1.13)$$

где α – вероятность ошибки дискриминации первого рода.

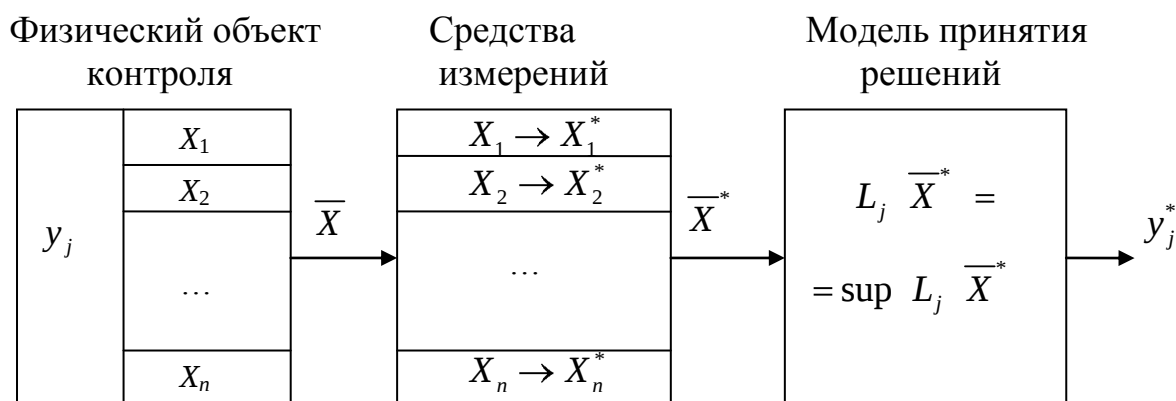


Рис. 1.6. Структурная схема обработки результатов однократных измерений на этапе измерительного контроля

Из (1.13) следует, что погрешность измерения Δ определяет достоверность контроля (через вероятность ошибки α). Таким образом, использование процедур принятия решений об уровне параметра контроля, не поддающегося прямым, метрологически обоснованным измерениям, может рассматриваться как метод непрямого (косвенного) измерения. Реализация этого метода может осуществляться в рамках вычислительных процедур обучения и дискриминации на базе многомерной вероятностной модели для системы случайных величин $Y, X_1, \dots, X_n$.

1.3.3. Математическая модель динамической контролируемой величины с неоднородностями дискретного типа

Для таких объектов физические контролируемые величины являются функциями времени наблюдения и представляют собой непрерывные случайные процессы с той или иной степенью нестационарности, обусловленной случайным характером второго слагаемого в рамках модели (1.9). Говорить об эргодичности такого процесса нельзя, поскольку неоднородность дискретного типа проявляется в скачкообразных случайных изменениях средних значений множества X_v^{n-1} контролируемых величин, стохастически связанных с информативными величинами X_l .

Если измеряемая физическая величина представляет собой случайный процесс $\xi(t)$, то, для получения статистических выводов

о характеристиках этого процесса для фиксированных состояний $\pi_1, \dots, \pi_K$ объекта контроля, целесообразно представить $\xi(t)$ усеченной реализацией на интервале наблюдения T

$$x(t) = \begin{cases} \xi(t), & t \leq T \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Такую реализацию можно заменить суммой квазидетерминированных случайных процессов [88]

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \vartheta_i \varphi_i(t), \quad (1.14)$$

где $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ – совокупность неизвестных (случайных) параметров модели преобразования,

$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – заданные детерминированные функции.

Модель (1.14) позволяет представить процесс $\xi(t)$ в пространстве параметров $\vartheta_i, i = \overline{1, n}$, числовые характеристики которых являются функциями состояний $\pi_1, \dots, \pi_K$. Параметры ϑ_i модели называют координатами случайного процесса [88], которые технически допускают два вида преобразований:

- 1) дискретизация реализации $x(t)$ через интервалы корреляции τ_0 [89] для получения выборки $x_1, \dots, x_N$;
- 2) фильтрация $x(t)$ с помощью набора фильтров, импульсные переходные характеристики которых согласованы с корреляционной функцией процесса $\xi(t)$ [88] (для получения независимых сигналов на выходах фильтров).

В любом случае модель (1.14) переводит задачу контроля любого из K состояний в дискриминацию вектора параметров модели $\bar{\vartheta}_n = \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$. Если состояниям $\pi_1, \dots, \pi_K$ соответствуют уровни $y_1, \dots, y_K$ физического параметра Y объекта контроля, то на этапе обучения необходимо оценить минимальное число отсчетов $N_{\min}$, обеспечивающее заданную достоверность контроля. На этапе контроля, как и на этапе обучения, можно использовать, для нормировки вектора $\bar{\vartheta}_n$, нормализующие преобразования [85] параметров модели ϑ_i в статистики S_i , средние значения

$\bar{S}_i, i = \overline{1, n}$ которых являлись бы функциями уровней y_j , а дисперсии $\sigma_{S_i}^2$ не зависели бы от номера состояния $j = \overline{1, K}$.

На рис. 1.7 и 1.8 представлены структурные схемы обработки многомерных (по состояниям) процессов $\xi(t)^K$ – этап обучения и одномерного (по j -му состоянию) процесса $\xi(t)$ – этап контроля, соответственно.

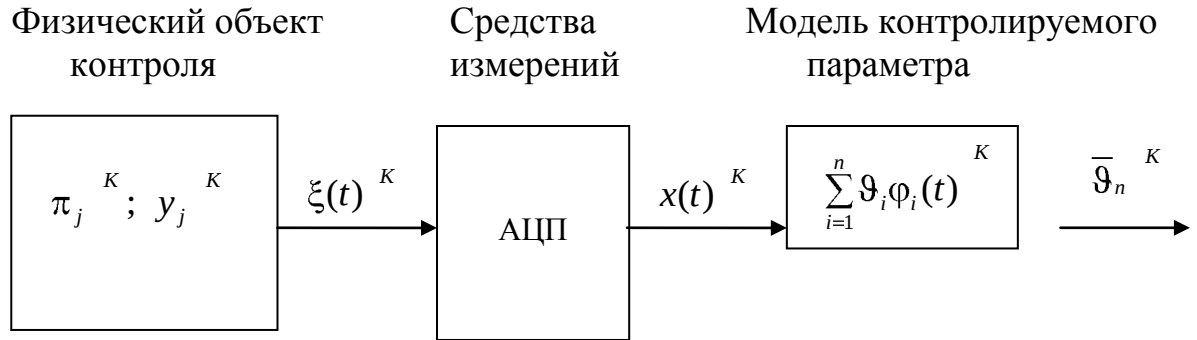


Рис. 1.7. Структурная схема обработки процессов $\xi(t)^K$ на этапе обучения

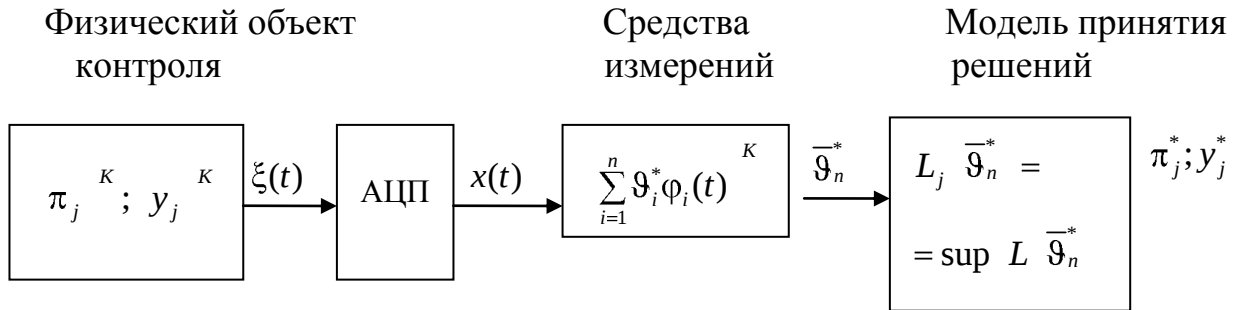


Рис. 1.8. Структурная схема обработки процессов $\xi(t)$ на этапе контроля

Средство измерения – аналогово-цифровой преобразователь (АЦП). Нормализующие преобразования – опущены.

Для этапа контроля, естественно, должно выполняться условие

$$\forall \bar{\theta}_n \left[\bar{\theta}_n \in \bar{\theta}_n^{(j)} \rightarrow \bar{\theta}_n \in y_j \right]. \quad (1.15)$$

1.3.4. Математическая модель контролируемой величины в условиях неоднородностей непрерывного и дискретного типов

Такая величина представлена упорядоченной во времени последовательностью результатов измерений, в отношении которых можно сказать следующее:

- составляющая F_l модели (1.10) вносит априорную неопределенность в форме тренда (долгосрочного влияния) [90], отражающего постепенные параметрические изменения физических свойств объекта контроля;

- составляющая ε_l определяет краткосрочные, более или менее регулярные, колебания результатов измерения относительно тренда из-за неустраняемого факторного влияния стохастических связей между параметром Y и множеством физических свойств объекта контроля в виде подмножества $\{X_l\}^{n-1}$;

- в отличие от динамического объекта с дискретной неоднородностью данная модель характеризуется очень большой длительностью времени наблюдения и соответствует объектам профилактического контроля (подконтрольной эксплуатации) [25, 91].

Наиболее адекватна рассматриваемой модели объекта измерения – модель временного ряда [25, 90, 92].

В плане анализа неопределенности модели (1.10) могут возникнуть дополнительные трудности, если измерения делаются через неравные интервалы, что чаще всего и бывает на практике.

1.3.4.1. Модель динамической контролируемой величины на этапе обучения

При стационарности случайного остатка ε_l t модели (1.7) основные вероятностные свойства этой модели определяют слагаемые F_l и ε_l и общая модель (1.7) трансформируется в модель (1.10). На этапе обучения необходимо помнить, что в разложении (1.10) первое и второе слагаемые не являются независимыми, а стохастически связаны через параметр контроля Y . Это означает, что аддитивность модели (1.10) обеспечена на

уровне только средних значений, что позволяет заранее задаться (исходя из свойств физического объекта) видом функции $F_l \cdot$. Дисперсионный анализ функционального влияния времени t на функцию $F_l \cdot$ возможен лишь в рамках всех трех слагаемых модели (1.10).

На рис. 1.9 представлена структурная схема процесса обучения.

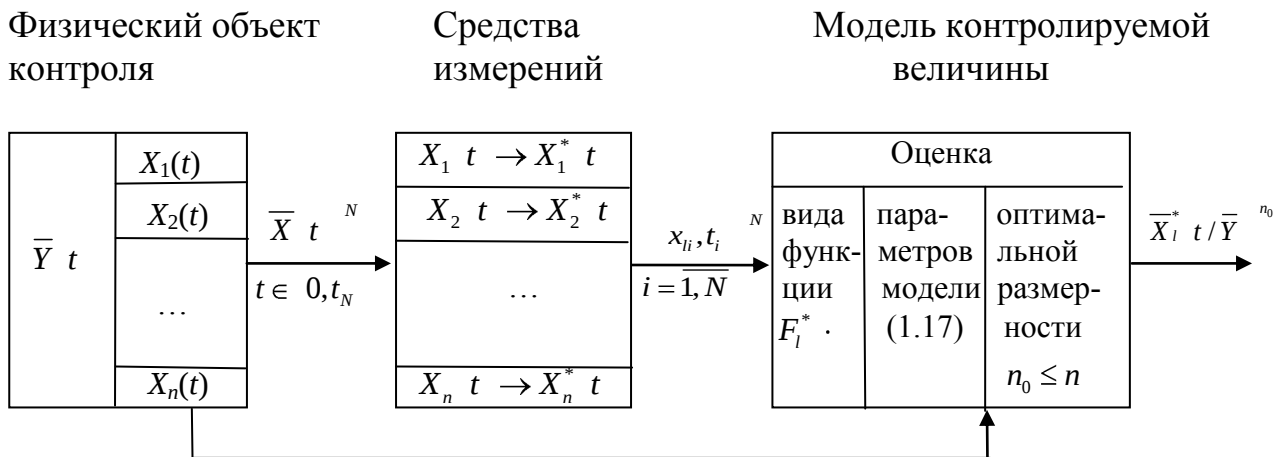


Рис. 1.9. Структурная схема анализа вероятностных свойств контролируемой величины на этапе обучения системы контроля

1.3.4.2. Модель динамического объекта измерения на этапе контроля

Этап контроля предусматривает, формально, решение трех задач для момента времени $t_k > t_N$:

1) оценку реального функционального состояния объекта контроля в виде величины $Y \ t_k$;

2) прогнозирование функционального состояния в виде величины $Y^* \ t_k + \theta$ для времени $t_{N+1} = t_N + \theta$;

3) прогнозирование остаточного ресурса θ_γ , обеспечивающего нормальное функциональное состояние объекта с доверительной вероятностью γ [93] при норме Y_H , $P[Y^* \ t_k + \theta_\gamma \in Y_H] = \gamma$.

На рис. 1.10 дана структурная схема процесса контроля, обеспечивающего решение перечисленных задач.

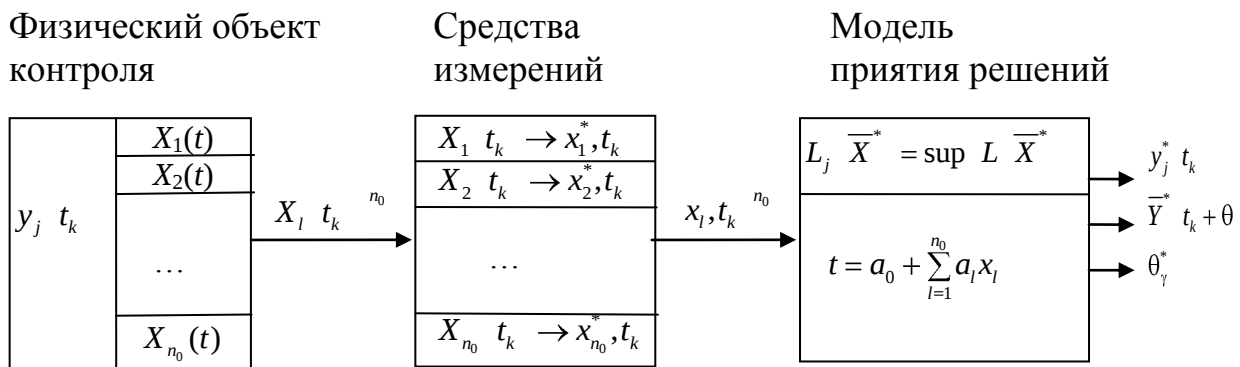


Рис. 1.10. Структурная схема обработки результатов однократных измерений на этапе контроля и технической диагностики

1.4. Анализ влияния систематической и случайной составляющих неопределенности измерения на достоверность контроля

Рассмотрим случай параметрического измерительного контроля [1], когда решение о принадлежности результата оценивания y_j^* уровню y_j параметра контроля Y принимается исходя из условия

$$y_j^* \in y_j, \text{ если } y_j^* \in [a_j, b_j], \quad (1.16)$$

где $[a_j, b_j]$ – гарантийный допуск [94].

Пусть $\xi = y_j$ – непрерывная случайная величина с нормальным законом распределения

$$\xi \sim N(m_\xi, \sigma_\xi^2), \quad (1.17)$$

где $m_\xi = M \xi$; $\sigma_\xi^2 = M \left[\xi - m_\xi \right]^2$.

Результат оценивания (измерения) y_j^* будем рассматривать как случайную величину y с нормальным законом распределения

$$y \sim N(m_y, \sigma_y^2), \quad (1.18)$$

причем m_ξ – систематическая погрешность, обусловленная смещением

$$\Delta_M = m_y - m_\xi \neq 0, \quad (1.19)$$

вызванным дискретным источником неоднородностей (смещением центра вектора показателей $\bar{X}$ в ходе обучения на малой, $N \ll \infty$, выборке).

Абсолютная погрешность Δ измерения является случайной величиной

$$\Delta \sim N(\Delta_M, \sigma_\Delta^2). \quad (1.20)$$

Дисперсия σ_Δ^2 погрешности может быть представлена двумя составляющими

$$\sigma_\Delta^2 = \sigma_y^2 + \Delta_M^2. \quad (1.21)$$

Если a_k, b_k – контрольный допуск на уровень y_j , то при аддитивном характере погрешностей Δ вероятности ошибок первого α_j и второго β_j рода имеют вид

$$\alpha_j = \Phi(x) + \Phi(kx) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tilde{k}\tilde{x}}^{\tilde{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{x-t}{z}\right) + \Phi\left(\frac{kx+t}{z}\right) \right] dt, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \beta_j = & \Phi\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1+z^2}}\right) + \Phi\left(\frac{\tilde{k}\tilde{x}}{\sqrt{1+z^2}}\right) - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tilde{k}\tilde{x}}^{\tilde{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{x-t}{z}\right) + \Phi\left(\frac{kx+t}{z}\right) \right] dt, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\text{где } x = \frac{b_j - m_\xi}{\sigma_\xi}; \quad k = \frac{m_\xi - a_j}{b_j - m_\xi}; \quad z = \frac{\sigma_\Delta}{\sigma_\xi}; \quad \tilde{x} = \frac{b_k - m_\xi}{\sigma_\xi}; \quad \tilde{k} = \frac{m_\xi - a_k}{b_k - m_\xi}.$$

Вероятность $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ является нормированной функцией Лапласа (интеграл Лапласа [97]).

Из (1.13) и (1.16) следует, что

$$z = \frac{\sqrt{\sigma_y^2 + \Delta_M^2}}{\sigma_\xi}. \quad (1.24)$$

При равновероятном законе распределения всех μ уровней параметра Y , достоверность контроля выбранного, для примера, j -го уровня равна

$$P = 1 - \frac{\alpha}{\mu} - \beta \left(\frac{\mu - 1}{\mu} \right). \quad (1.25)$$

Из (1.22), (1.23) и (1.25) следует, что только при $z = 0$ достоверность максимальна и равна, при условии $a_k, b_k \subset [a_j, b_j]$

$$P = 1 - \frac{1}{\mu} \left[\Phi_{\chi} + \Phi_{k\chi} - \Phi_{\tilde{\chi}} - \Phi_{\tilde{k}\tilde{\chi}} \right]. \quad (1.26)$$

При любом же отличие z от нуля, достоверность контроля только уменьшается, так как растет вероятность ошибок α_j и β_j .

Из (1.24) наглядно видно, что условие $z = 0$ невыполнимо, так как неопределенность не может быть меньше величины σ_Δ , из (1.21), для которой: $|\Delta_M| > 0$.

Таким образом, уменьшением лишь аппаратной погрешности средств прямого измерения контролируемых величин $X_1, \dots, X_n$ невозможно существенно повысить достоверность контроля, так как не уменьшается методическая составляющая вероятностей ошибок.

Более того, величина систематического смещения Δ_M тем больше, чем менее представительна обучающая выборка как по множеству векторов $\overline{X}^N$, так и по размерности вектора $\overline{X}$.

1.5. Обобщение результатов анализа

Как отмечалось в 1.2, полнота информации при контроле и диагностике объектов со случайными параметрами зависит от оптимального сочетания числа k контролируемых величин, количества уровней m параметра контроля, объема обучающих выборок n , числа N многократных измерений. Кроме этого, важное значение имеет выбор математической модели преобразования вектора контролируемых величин. Критерием оптимизации служит количество ожидаемой измерительной информации о значении уровня контролируемой величины. Проблема повышения достоверности – это проблема оптимального синтеза системы контроля и диагностики, и она возникает тогда, когда объем обучающих выборок n – существенно ограничен. Эта проблема усугубляется, если множество контролируемых величин – взаимно коррелировано и отсутствуют условия, обеспечивающие воспроизводимость заданных значений этих величин, что ограничивает использование существующих методов повышения достоверности, требующих применения физически реализуемых образцов и моделей контролируемых величин с известными вероятностными свойствами (подраздел 1.1).

Объекты контроля и диагностики с априорно неопределенными параметрами – это, в первую очередь, динамические многосвязные объекты с различного рода процессами многоступенчатого преобразования энергии (технологические линии и установки, двигатели внутреннего сгорания, высоковольтное энергетическое оборудование и т.д.). Примерами статических объектов могут быть сыпучие материалы со сложной биохимической структурой (сельскохозяйственное сыпучее технологическое сырье, семена подсолнечника и т.д.).

В табл. 1.1 представлены характеристики физических объектов контроля и диагностики, использованные для иллюстрации теоретических разработок и выводов при анализе и синтезе моделей преобразования первичной информации, повышающих достоверность принятия решений.

Условно, такие объекты разделены на статические и динамические, хотя контролируемые величины для первых (сыпучие материалы с биохимической структурой) зависят от времени.

Таблица 1.1

Характеристики типичных объектов контроля и диагностики с априори случайными параметрами

Тип объекта контроля и диагностики	Тип неоднородностей контролируемых величин	Физический объект контроля и диагностики	Контролируемые параметры	Контролируемые величины	Решаемая задача (область применения)
Статический (система параметрического контроля)	Дискретные	Сыпучий материал с биохимической структурой	Комплексные показатели качества и состава	Геометрические, теплофизические, электрофизические	Входной контроль состава сыпучего сырья
Динамический (система динамического контроля и диагностики)	Дискретные и непрерывные	Механическая система	Уровни функциональных нарушений	Случайные процессы нестационарные по спектру и по среднему значению	Контроль и вибрационная диагностика
		Технологический процесс			Обнаружение нарушений (неразрушающий контроль)
		Биологическая система			Функциональная диагностика и прогнозирование нарушений

Эта зависимость, хотя и слабая, проявляется при длительном хранении сыпучих материалов, что дает основание отнести такие объекты к статическим, в пределах нормативных сроков хранения, гарантирующих стабильность биохимических и физико-механических характеристик материалов.

Переходя от физических объектов контроля и диагностики к контролируемым величинам и параметрам, следует отметить, что трудности метрологического обеспечения при измерениях контролируемых величин (или при их оценке) не снимают с повестки дня вопросы повышения достоверности при создании систем контроля или диагностики сложных объектов.

Это особенно актуально, когда модель стохастического параметра – априори неопределена, и возникают трудности в выборе процедур обучения систем контроля и диагностики (подраздел 1.3) при параметрической неопределенности моделей преобразования первичной информации (подраздел 1.4). Последнее, как показал анализ (подраздел 1.5) приводит к неустранимым (инструментальными средствами) методическим составляющим вероятностей ошибок контроля.

Анализ, проведенный в подразделах 1.1 – 1.5 указывает на пробел в последовательности процедур, образующих нормативную структуру процесса измерения априори случайных контролируемых величин. И пробел этот – субъективизм и недостаточное применение хорошо разработанного, сложного, но объективно универсального многомерного статистического анализа для синтеза адекватных моделей как физических величин с вероятностной многомерной структурой, так и процедур их непрямого измерения. Эти величины существуют объективно, отражая наиболее важные стороны качества, технического состояния и функциональных связей реальных производственных объектов контроля и диагностики.

Фактически, при хорошо изученной вероятностной модели априорно неопределенных значений физических величин можно и нужно использовать для синтеза функций их преобразования стандартные параметрические процедуры принятия решений, прекрасно работающие в статистической радиотехнике [88] и дискриминантном анализе [101].

Переходя от проблемы выбора адекватных преобразования первичной информации к проблеме построения адекватных моделей

принятия решений при контроле и диагностике, следует подчеркнуть, что эта проблема возникает, когда объемы обучающих выборок, используемых для параметрического синтеза моделей преобразования – существенно ограничены (этап обучения системы контроля). К сожалению, эта проблема теоретически изучена лишь в рамках вероятностных моделей оптимального синтеза информационных систем [72, 73, 87, 88], метрологического обеспечения систем контроля и диагностики [3], информационно-измерительных технологий неразрушающего контроля [18, 19, 21, 55], оптимального синтеза распознающих систем [81, 103, 104]. Более полные вероятностно-статистические модели объектов контроля – отсутствуют, что не позволяет, при ограниченных обучающих выборках, планировать процессы получения информации о свойствах параметра контроля по значениям вектора контролируемых величин.

Что касается, собственно, использования методов планирования измерительных экспериментов для изучения объекта контроля или диагностики, то существующие разработки в теории многофакторных экспериментов, относящихся к плохо организованным (диффузным) системам [57] или системам с конечным числом влияющих факторов [61, 63, 64, 69], опираются на модели параметрического тестирования с использованием лишь уровня значимости (вероятности ошибок первого рода). Теория тестирования контролируемых величин с учетом вероятности ошибок не только первого, но и второго рода – отсутствуют. Это не позволяет планировать с заданной достоверностью процедуры оптимального выбора числа контролируемых сигналов и уровней параметра контроля и прогнозировать возможные изменения свойств объекта контроля и диагностики.

И, наконец, несмотря на существование хорошо разработанной информационной теории измерений [4, 77, 79, 87], отсутствуют теоретические обоснования применения методов этой теории для анализа и оптимального синтеза моделей принятия решений при ограничениях на объемы информации на этапе обучения систем контроля и диагностики.

ВЫВОДЫ

1. Проанализированы причины снижения достоверности контроля. Отмечено, что основную роль играет методическая составляющая вероятностей ошибок контроля, устранить которую при наличии систематических погрешностей преобразования информации – невозможно. Показано, что эта составляющая появляется из-за неадекватного воспроизведения стохастического параметра на этапе обучения системы контроля. Выделено три модели стохастических контролируемых величин: дискретная, непрерывная и смешанная. Вид модели указывает на характер случайного изменения среднего значения при постоянной или изменяющейся дисперсии. Представлены модели преобразований вектора контролируемых величин, стохастически зависящих от параметра контроля, при обучении и принятии решений системой контроля в статическом и динамическом режимах;

2. Установлено, что существующие методы повышения достоверности контроля применимы к объектам с нормативно заданными свойствами при параметрически известных вероятностных моделях дестабилизирующих факторов. Обязательным является наличие образца объекта или модели контролируемых величин с заданными метрологическими свойствами, что создает структурную и информационную избыточность. Задача использования моделей стохастических параметров и величин – не решена. Предположено, на примере нестандартных образцов состава сыпучих материалов, тестировать стохастические контролируемые величины на статистическую однородность с использованием случайной модели факторного влияния (модели компонент дисперсий). Это позволяет задавать независимо вероятности ошибок не только первого, но и второго рода, при контроле средних значений воспроизводимых случайных величин и повышать до заданного значения достоверность их контроля, варьируя число групп образцов. Отобранные образцы могут применяться в составе систем контроля со структурно-алгоритмическими моделями повышения достоверности;

3. Проведенный анализ существующих методов повышения достоверности показывает, что наряду со структурно-информа-

ционной применяется и временная избыточность за счет увеличения числа операций многократного тестирования контролируемых величин. Однако отсутствуют методы отбора максимально информативного подмножества контролируемых величин при ограниченной информации о вероятностных свойствах стохастического параметра. Предложено оценивать количество ожидаемой информации при преобразованиях, воспроизводимых нестандартными образцами, контролируемых величин в оценку параметра контроля, с учетом случайности коэффициентов преобразования. Это позволяет выбирать, по максимуму информации подмножество контролируемых величин, обеспечивающих максимально возможную достоверность контроля;

4. Проведенный анализ требований к характеристикам точности преобразователей выходных величин объекта контроля в контролируемые величины, при выборе модели повышения достоверности, показывает важность учета аддитивного и мультипликативного смещений действительной функции преобразования относительно номинальной. Однако, для большинства нестандартных преобразователей оценка аддитивной и мультипликативной составляющих отклонений превращается в проблему при неопределенности входной величины.

Методы такого оценивания, особенно по ограниченному числу совместных измерений и нелинейности преобразований – отсутствуют. Предложено использовать, в этом случае, метод дисперсионного анализа кусочно-линейных моделей преобразования со случайными коэффициентами. Это позволяет количественно оценить эффекты аддитивного и мультипликативного смещений действительной функции преобразования и рассчитать составляющие погрешностей по входу и по выходу, используя нестандартные образцы и модели случайных параметров и величин;

5. Установлено, что отсутствуют методы устранения систематических погрешностей в допусковых интервалах, если не определен вид функции преобразования контролируемых величин в оценку параметра, а особенно, если эти величины априорно случайны. Предложено применять статистические решающие правила для распознавания уровней параметра в заданных допусковых интервалах. Это позволяет повысить достоверность за счет

устранения систематических погрешностей (смещение оценок) и оптимального выбора числа уровней параметра контроля, с учетом дисперсии и взаимной корреляции контролируемых величин. Контроль при этом становится многоальтернативным.

6. Анализ методов повышения достоверности контроля и диагностики динамических объектов показал, что независимо от вида модели стохастических сигналов, их тестирование является альтернативным, при простых основной и альтернативной гипотезах. Многоальтернативное тестирование при сложных гипотезах – отсутствует. Предложено ввести многоальтернативное тестирование стохастических контролируемых сигналов на основе стабилизации дисперсий их информативных параметров по видам состояний объектов. Это позволит, сохраняя временную избыточность, установить одинаковые по ширине допусковые интервалы для средних значений параметров, задавая заранее требуемую достоверность контроля по каждому из состояний. Это обеспечит увеличение достоверности, так как возрастет разрешающая способность системы контроля и диагностики обнаруживать менее значимые нарушения;

7. Установлено, что существующие методы повышения достоверности контроля и диагностики, применяемые для обнаружения скачкообразных и дрейфовых изменений стохастических сигналов, базируются на использовании временной избыточности. Информационная избыточность, при отсутствии образцов и моделей сигналов – не применяется. Предложено, используя ковариационный анализ дискретизированных стохастических сигналов, выделять аддитивную и мультипликативную составляющие их остаточной дисперсии. Это позволит получить дополнительную информацию в режиме реального времени, что повысит достоверность контроля.

Построение любой системы контроля или диагностики объектов со случайными параметрами начинается с этапа предварительного изучения всех, доступных количественной оценке, свойств, отражающих изменения качественного состояния объекта. Такое изучение становится проблематичным, когда объект контроля является сложной или, с вероятностной точки зрения, плохо организованной диффузной системой [57]. Получение информации о качественных состояниях такого объекта с помощью измеряемых физических величин, являющихся контролируемыми величинами системы контроля, возможно при выполнении двух условий:

1. Контролируемые величины должны быть информативными, в отдельности и по множеству, по отношению к изменениям средних значений контролируемых случайных параметров, оставаясь достаточно нечувствительными к воздействию стохастических влияющих факторов;

2. Математическая модель обратного преобразования контролируемых величин в значение оценки параметра контроля должна быть адекватной физической модели их взаимного влияния, что выражается в отсутствии смещений оценок. Кроме этого, с увеличением объема информации о свойствах объекта контроля, дисперсия этих несмещенных оценок должна только уменьшаться.

Оба условия выполнимы, если имеется возможность воспроизведения несмещенных, хотя и случайных значений контролируемых величин, при фиксированном уровне параметра контроля, на этапе обучения системы контроля. Однако, в реальных условиях формирования образцов состава сыпучих материалов, такое воспроизведение достаточно неадекватно, так как сопряжено с выполнением требования нормирования неконтролируемых факторных воздействий, эффекты влияния которых необходимо учитывать в ходе контроля, а значит и обучения

(градуировки) системы контроля. Более того, количество воспроизводимых значений, даже одного уровня параметра контроля, может быть непредставительным, что автоматически порождает непредставительность выборок значений контролируемых величин. Последнее влияет на точность формирования номинальной функции непрямого преобразования при обучении (градуировке) системы контроля. Это особенно наглядно проявляется в задачах синтеза систем экспресс-контроля параметров состава сыпучих органических материалов, например, зерна пшеницы, когда отсутствуют стандартные образцы контролируемых параметров, однако существуют нормативные методики достаточного трудоемкого количественного анализа для оценки уровней этих параметров. Неопределенность контролируемых величин в этом случае соответствует модели статической величины с неоднородностями дискретного типа согласно (1.8), а стохастически влияющими факторами являются сортность, физико-механические, электрофизические характеристики и т.д.

Контролируемые параметры – относительная влажность, кислотность, масличность и т.д. Контролируемые величины – физические показатели, реализуемые в виде выходных сигналов преобразователей неразрушающего контроля [54, 98]. Нестандартные образцы формируются на основе случайных, по сортности, проб зерна.

Решение проблемы снижения статистической неоднородности контролируемых величин (проблемы выбора представительных серий, по уровням параметра, образцов) требует решения таких задач:

- Разработки метода проверки контролируемых величин, одновременно, на отсутствие и на наличие дискретной неоднородности нормативно-заданного уровня, с учетом вероятностей ошибок тестирования не только первого, но и второго рода;

- определения условий выбора, воспроизводимых образцами, уровней параметра, исключающих ненормированное увеличение смещений функций первичных измерительных преобразований, особенно, если последние существенно нелинейны;

- оценки информативности контролируемых величин по отношению к изменениям параметра контроля.

2.1. Тестирование контролируемых величин на отсутствие или наличие дискретной неоднородности

Под контролируемой величиной будем понимать прямо измеряемую физическую величину (показатель контроля X), используемую как аргумент функции косвенного измерительного преобразования для получения информации об уровнях априорно неопределенной величины (контролируемого параметра Y).

Рассмотрим фактор U , уровни которого дискретны, случайны и влияют на величину X , даже при поддержании постоянного значения уровня параметра Y , который также можно рассматривать как влияющий фактор с дискретными, но неслучайными уровнями.

Рассмотрим модель измерительного эксперимента, в ходе которого устанавливают взаимнооднозначное соответствие между величинами X и Y при учете влияния фактора U . В таком эксперименте необходимо предусмотреть возможность сочетания конечного числа уровней фактора Y (уровни: $y_1, \dots, y_c$) и фактора U (уровни: $u_1, \dots, u_r$). Модель результата наблюдения величины X имеет вид [84]

$$X_{tij} = \xi + U_t + Y_i + W_{ti} + Z_{tij}, \quad (2.1)$$

где ξ – среднее значение результата наблюдения,

U_t – отклонение X_{tij} от ξ , обусловленное влиянием фактора U ($t = \overline{1, r}$),

Y_i – отклонение X_{tij} от ξ , вызванное влиянием фактора Y ($i = \overline{1, c}$),

W_{tij} – отклонение X_{tij} от ξ , обусловленное взаимодействием U и Y ,

Z_{tij} – случайный остаток $j = \overline{1, n}$, а n – число многократных наблюдений показателя X при фиксированном сочетании уровней факторов Y и U .

Модель (2.1) является случайной [84], по фактору U , причем случайной величиной может являться и W_{tij} . Начальными условиями для модели (2.1) являются

$$\sum_t U_t = 0; \quad \sum_i Y_i = 0; \quad \sum_t \sum_i W_{ti} = 0; \quad \sum_t \sum_i \sum_j Z_{tij} = 0;$$

$$M[U_t^2] = \sigma_U^2; \quad M[W_{ti}^2] = \sigma_W^2; \quad M[Y_i^2] = \sigma_Y^2; \quad M[Z_{tij}^2] = \sigma^2.$$

Кроме этого все U_t , Y_i , W_{ti} и Z_{tij} – взаимонезависимы, а для Z_{tij} предполагается нормальность ее закона распределения вероятностей.

Результаты всех $N = rcp$ измерений значений контролируемой величины X можно разместить в таблице с r строками и со столбцами. В каждой ячейке этой таблицы имеется, к тому же, по n значений результатов x_{tij} (табл. 2.1).

Таблица 2.1

**Таблица результатов двухфакторного эксперимента
с неизменными уровнями параметра контроля**

Уровни фактора U	Уровни фактора Y				
	y_1	...	y_i	...	y_c
U_1	x_{11j}	...	x_{1ij}	...	x_{1cj}
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
u_t	x_{t1j}	...	x_{tij}	...	x_{tcj}
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
u_r	x_{r1j}	...	x_{rij}	...	x_{rcj}

Определим средние значения для результатов измерений по строкам, столбцам и в ячейках через слагаемые модели (2.1):

- среднее строк $\bar{X}_t = \xi + U_t + \bar{Z}_t$;
- среднее столбцов $\bar{X}_i = \xi + Y_i + \bar{Z}_i$;
- среднее ячеек $\bar{X}_{ti} = \xi + U_t + Y_i + W_{ti} + \bar{Z}_i$;
- общее среднее $\bar{X} = \xi + \bar{Z}$.

Выделим три группы параметров, ответственных за эффекты факторного влияния по строкам, столбцам и ячейкам таблицы результатов x_{tij}

$$\begin{cases} \bar{X}_t - \bar{X} = U_t - \bar{U} + W_t - \bar{W} + \bar{Z}_t - \bar{Z} , \\ \bar{X}_i - \bar{X} = Y_i - \bar{Y} + W_i - \bar{W} + \bar{Z}_i - \bar{Z} , \\ \bar{X}_{ti} - \bar{X}_t - \bar{X}_i + \bar{X} = W_{ti} - \bar{W}_t - \bar{W}_i + \bar{W} + Z_{ti} - \bar{Z}_t - \bar{Z}_i + \bar{Z} , \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\quad (2.3)$$

$$\quad (2.4)$$

где $\bar{U} = r^{-1} \sum_t U_t$, $\bar{Y} = c^{-1} \sum_i Y_i$, $\bar{W}_t = c^{-1} \sum_i W_{ti}$, $\bar{W}_i = r^{-1} \sum_t W_{ti}$ и $\bar{W} = rc^{-1} \sum_t \sum_i W_{ti}$.

Из этих выражений следует, что математические ожидания средних квадратов отклонений $\{x_{tij}\}$, обусловленных изменчивостью между строками, столбцами и их взаимодействием равны

$$M[\bar{S}_U] = \sigma^2 + n\sigma_W^2 + nc\sigma_U^2, \quad (2.5)$$

$$M[\bar{S}_Y] = \sigma^2 + n\sigma_W^2 + nr\sigma_Y^2, \quad (2.6)$$

$$M[\bar{S}_W] = \sigma^2 + n\sigma_W^2. \quad (2.7)$$

Математическое ожидание среднего квадрата отклонений для остатка равно $M[\bar{S}_Z] = \sigma^2$. Следует, так же, отметить, что выражение (2.6) получено в предположении случайности отклонения Y_i .

Из уравнений (2.5...2.7) следует, что гипотезу об отсутствии факторного влияния дискретной неоднородности ($H_0: U_1 = U_2 = \dots = U_r = 0$) можно проверить, сравнивая средние квадраты $\bar{S}_U$ и $\bar{S}_W$ в форме F -статистики и $(r-1)$ и $(r-1)(c-1)$ степенями свободы [84]

$$F_U = \bar{S}_U / \bar{S}_W. \quad (2.8)$$

Эта статистика, при справедливости гипотезы H_0 , имеет плотность центрального F -распределения.

Найдем выражение для плотности распределения этой статистики, когда гипотеза H_0 не выполняется, а справедлива альтернативная гипотеза $H_1: U_1 \neq U_2 \neq \dots \neq U_r = 0$.

Как уже отмечалось, случайными величинами в модели (2.1) являются U_t и остаток Z_{tij} . Если фактор U влияет только на показатель X (уровни параметра Y поддерживаются постоянными в соответствии с нормативными требованиями), то случайным можно считать и слагаемое W_{ti} , отвечающее за взаимодействие между U и Y . Тогда из уравнения (2.2) и (2.4) следует, что их суммы квадратов отклонений имеют вид

$$S_U = nc \sum_t \left[U_t + \bar{W}_t + \bar{Z}_t - \bar{U} + \bar{W} + \bar{Z} \right]^2; \quad (2.9)$$

$$S_W = n \sum_t \sum_i \left[W_{ti} + \bar{W} + \bar{Z}_{ti} + \bar{Z} - \bar{W}_t + \bar{W}_i + \bar{Z}_t + \bar{Z}_i \right]^2. \quad (2.10)$$

Из (2.9) следует, что случайная величина $v_U = U_t + \bar{W}_t + \bar{Z}_t$ имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную

$$\sigma_{v_U}^2 = nc^{-2} \sigma^2 + c^{-1} \sigma_W^2 + \sigma_U^2. \quad (2.11)$$

Из (2.10) следует, что случайная величина $v_W = W_{ti} + \bar{W} + \bar{Z}_{ti} + \bar{Z}$ имеет, также, нулевое математическое ожидание, но дисперсию, равную

$$\sigma_{v_W}^2 = n^{-1} \sigma^2 + \sigma_W^2. \quad (2.12)$$

Поскольку под знаками сумм (2.9) и (2.10) стоят квадраты нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, определенными, соответственно, уравнениями (2.11) и (2.12), суммы S_U и S_W представляют собой линейно преобразованные случайные величины с χ^2 -распределениями, имеющими $(r-1)$ и $(r-1)(c-1)$ степеней свободы

$$S_U \sim \chi_{r-1}^2 \sigma^2 + n \sigma_W^2 + nc \sigma_U^2, \quad (2.13)$$

$$S_W \sim \chi_{(r-1)(c-1)}^2 \sigma^2 + n \sigma_W^2. \quad (2.14)$$

Выражения (2.13) и (2.14) позволяют доказать, что в случае справедливости альтернативной гипотезы H_1 , статистика диспер-

сионного отношения (2.8) является линейнопреобразованной случайной величиной с центральным F -распределением, имеющим $(r-1)$ и $(r-1)(c-1)$ степеней свободы

$$F_U \sim F_{r-1; r-1(c-1)} \cdot \left[\frac{\sigma^2 + n\sigma_W^2 + nc\sigma_U^2}{\sigma^2 + n\sigma_W^2} \right]. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) можно представить в более простом виде

$$F_U \sim F_{r-1; r-1(c-1)} \cdot \left[1 + nc \left(\frac{\sigma_U^2}{\sigma^2 + n\sigma_W^2} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Определим теперь условия, обеспечивающее выбор минимальных r (количество уровней дискретной неоднородности) и N (общего числа нестандартных образцов).

Введем гипотезы:

h_0 : неоднородность результатов измерений для показателя X статистически не значима;

h_1 : неоднородность – значима.

Гипотезы h_0 и h_1 отличаются от гипотез H_0 и H_1 , поскольку могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{cases} h_0 : \sigma_U^2 = \sigma_H^2, \\ h_1 : \sigma_U^2 = \sigma_H^2 + \sigma_M^2, \end{cases} \quad (2.17)$$

где σ_H^2 – дисперсия величин $\{x_{tij}\}$ вследствие неточности нормативного метода оценивания уровней параметра Y ,

σ_M^2 – дисперсия, обусловленная дискретной неоднородностью величин $\{x_{tij}\}$.

Введем переменные

$$\delta_0^2 = \frac{\sigma_H^2}{\sigma_H^2 + n\sigma_W^2}, \quad (2.18)$$

$$\delta_1^2 = \frac{\sigma_H^2 + \sigma_M^2}{\sigma_H^2 + n\sigma_W^2}. \quad (2.19)$$

Тогда гипотезы h_0 и h_1 , с учетом (2.16), (2.18) и (2.19) будут иметь вид

$$h_0 : F_U \sim F_{r-1; r-1 \quad c-1} \cdot [1 + nc\delta_0^2], \quad (2.20)$$

$$h_1 : F_U \sim F_{r-1; r-1 \quad c-1} \cdot [1 + nc\delta_1^2]. \quad (2.21)$$

Обозначим через γ_0 и γ_1 решения, соответствующие выбору после тестирования гипотезы h_0 или h_1 [58, 88]

$$\begin{cases} \alpha = P \gamma_1 / h_0, \\ \beta = P \gamma_0 / h_1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Используя F -статистику (2.8) запишем выражение для критериальной статистики тестирования

$$F = \frac{\sum_{t=1}^r \overline{X}_t - \overline{X}^2}{\sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^n \overline{X}_{ti} - \overline{X}_t - \overline{X}_i + \overline{X}^2} c \quad c-1. \quad (2.23)$$

Введем пороговую статистику F_0 и правило выбора решения

$$\begin{cases} \text{выбирать } \gamma_0, \text{ если } F \leq F_0, \\ \text{выбирать } \gamma_1, \text{ если } F > F_0. \end{cases} \quad (2.24)$$

С учетом (2.22) выражения (2.24) должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} P[F > F_0 | \delta_1^2] \geq 1 - \beta, \\ P[F > F_0 | \delta_0^2] \leq \alpha. \end{cases} \quad (2.25)$$

Из (2.20), (2.21) и (2.25) получим

$$\begin{cases} P\left[F_{(r-1);(r-1)(c-1)} > F_0 [1 + nc\delta_1^2]^{-1}\right] \geq 1 - \beta, \\ P\left[F_{(r-1);(r-1)(c-1)} > F_0 [1 + nc\delta_0^2]^{-1}\right] \leq \alpha. \end{cases} \quad (2.26)$$

Преобразуем выражение (2.26), используя β -процентную и $(1-\alpha)$ – процентную точки F -распределения [84]

$$\begin{cases} F_{(r-1);(r-1)(c-1);\beta} \geq F_0 \cdot 1 + nc\delta_1^2^{-1}, \\ F_{(r-1);(r-1)(c-1);(1-\alpha)} \leq F_0 \cdot 1 + nc\delta_0^2^{-1}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Рассмотрим неравенства (2.27) совместно и получим

$$\begin{aligned} 1 + nc\delta_0^2 \cdot F_{(r-1);(r-1)(c-1);(1-\alpha)} &\leq \\ &\leq F_0 \leq 1 + nc\delta_1^2 \cdot F_{(r-1);(r-1)(c-1);\beta}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Значение F_0 , удовлетворяющее левой и правой частям неравенства (2.28) обеспечивается условием

$$\frac{F_{(r-1);(r-1)(c-1);(1-\alpha)}}{F_{(r-1);(r-1)(c-1);\beta}} \leq \frac{1 + nc\delta_1^2}{1 + nc\delta_0^2}. \quad (2.29)$$

Заменив δ_0^2 и δ_1^2 согласно (2.18) и (2.19), окончательно получим

$$\frac{F_{(r-1);(r-1)(c-1);(1-\alpha)}}{F_{(r-1);(r-1)(c-1);\beta}} \leq 1 + \frac{\sigma_M^2}{\sigma_H^2 \left(1 + \frac{1}{nc}\right) + \sigma_W^2 \frac{1}{c}}. \quad (2.30)$$

Проанализируем полученное неравенство. При увеличении числа уровней параметра контроля правая часть неравенства (2.30) стремится к виду

$$\frac{\delta_1^2}{\delta_0^2} = 1 + \frac{\sigma_M^2}{\sigma_H^2}, \quad (2.31)$$

а левая часть – к отношению процентных точек χ^2 -распределения с одним и тем же, $(r-1)$, числом степеней свободы

$$\frac{F_{(r-1);(r-1)(c-1);(1-\alpha)}}{F_{(r-1);(r-1)(c-1);\beta}} \rightarrow \frac{\chi_{r-1,1-\alpha}^2}{\chi_{r-1,\beta}^2}. \quad (2.32)$$

С учетом (2.31) и (2.32) условие (2.30) примет вид

$$\frac{\chi_{r-1,1-\alpha}^2}{\chi_{r-1,\beta}^2} < \frac{\delta_1^2}{\delta_0^2}. \quad (2.33)$$

Из (2.33) видно, что существует минимально возможное число уровней фактора дискретной неоднородности U , позволяющего с заданной заранее достоверностью

$$P_D = 1 - \alpha + \beta / 2, \quad (2.34)$$

принять решение о наличии или отсутствии влияния неоднородности на выбранный показатель контроля X , если $F_0 = \delta_1^2 / \delta_0^2$.

Если число уровней r ограничено возможностями эксперимента, то неравенство (2.33) позволяет оценить достоверность тестирования, задаваясь условием $\alpha = \beta$ и применяя таблицы процентных точек для χ^2 -распределения [84].

Особый случай $r = 2$. Тогда отношение процентных точек для F -распределения с $(r - 1)$ и $(r - 1)(c - 1)$ степенями свободы в левой части неравенства (2.30), можно заменить отношением квадратов процентных точек для t -распределения Стьюдента

$$\frac{t_{c-1,(1-\alpha)/2}^2}{t_{c-1,\beta/2}^2} \leq 1 + \frac{\sigma_M^2}{\sigma_H^2 \left(1 + \frac{1}{nc}\right) + \sigma_W^2 \frac{1}{c}}. \quad (2.35)$$

В этом случае невозможно определить минимальное число уровней (c) параметра контроля обеспечивающего выполнение неравенства (2.35), так как левая часть этого неравенства меньше 1 при любых c (если $\alpha = \beta$). Выбор числа c возможен лишь в случае, если $\beta > 1 - \alpha$, что приводит тестирование к процедуре проверки только основной гипотезы h_0 , то есть к тесту на значимость [99]. Из этого следует, что условием выбора r является: $r \geq 3$.

Оценку отношения δ_1^2 / δ_0^2 можно получить непосредственно по статистике F (2.33). Тогда методика тестирования, формально, должна включать два этапа:

1. Получение численного значения статистики F согласно (2.33) и при фиксированных r , c и n ;

2. Оценивание минимального значения $r_{\min}$ и повторение измерительного эксперимента при фиксированных $r_{\min}$, c и n , что обеспечит выбор одного из решений γ_0 или γ_1 с заранее заданной достоверностью P_d . Минимальное число образцов в этом случае

$$N_{\min} = r_{\min}nc. \quad (2.36)$$

Решения γ_0 и γ_1 принимают в соответствии с правилом выбора: γ_0 , если $F_U \leq F_0$ и γ_1 , если $F_U > F_0$, где F_U определяется выражением (2.8), а F_0 – задается априорно.

Тестирование контролируемых величин позволит их ранжировать по степени повышения нечувствительности к неоднородностям измерительного эксперимента в соответствии с уменьшением их F -статистик (2.23), или увеличением их минимальных объемов выборок (2.36).

2.2. Исследование влияния нелинейности функции первичного преобразования на точность воспроизведения значений контролируемой величины

Как отмечалось в подразделе 2.1, использование, для обучения системы контроля, нестандартных образцов может быть затруднено из-за сложного факторного влияния на воспроизводимость значений контролируемых величин. Однако, можно проанализировать условия, выполнение которых позволяет применять метрологически несовершенные процедуры первичного преобразования получения несмещенных, в границах допусковых интервалов, значений контролируемой величины.

2.2.1. Вероятностная модель многопараметрических измерений

Пусть объект контроля (например, сыпучий материал) характеризуется набором контролируемых величин $X_1, \dots, X_p$, полученных с помощью первичных измерительных преобразователей и пусть y – уровень параметра контроля Y , отражающего заданное свойство материала.

Модель уравнения измерения, в виде множественной регрессии y на величины $X_1, \dots, X_p$, имеет вид [96]

$$y_i = \sum_{j=1}^p X_{ji} \alpha_j, \quad (2.37)$$

где $\alpha_j, j = \overline{1, p}$ – постоянные коэффициенты,

$i, i = \overline{1, n}$ – номер измерения при $y = \text{const}$.

Предположим, что в i -ом наблюдении $(y_i, X_{1i} \dots X_{pi})$ переменных, полученное значение y_i отличается от действительного значения η_i на величину абсолютной погрешности e_i

$$y_i = \eta_i + e_i, \quad (2.38)$$

причем $M e_i = 0, M [e_i^2] = \sigma^2$ и все $e_i, i = \overline{1, n}$ независимы.

Допустим теперь, что наблюдаемые значения регрессоров (показателей контроля) X_{ji} отличаются от действительных значений $\tilde{X}_{ji}$ на величину абсолютной погрешности ε_{ji} с $M [\varepsilon_{ji}] = 0, j = \overline{1, p}, i = \overline{1, n}$

$$X_{ji} = \tilde{X}_{ji} + \varepsilon_{ji}. \quad (2.39)$$

Линейные соотношения между истинными (действительными) значениями измеряемой η_i и контролируруемыми $\tilde{X}_{ji}$ переменными будут в соответствии с уравнением (2.37)

$$\eta_i = \sum_{j=1}^p \tilde{X}_{ji} \alpha_j. \quad (2.40)$$

Будем предполагать, что $p+1 \cdot p+1$ – ковариационная матрица погрешностей

$$e_i, \varepsilon_{li}, \dots, \varepsilon_{pi} \quad , \quad (2.41)$$

в i -ом наблюдении является одной и той же при всех i .

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \sigma_{00}^2 & \sigma_{01}^2 & \dots & \sigma_{0p}^2 \\ \sigma_{10}^2 & \sigma_{11}^2 & \dots & \sigma_{1p}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p0}^2 & \sigma_{p1}^2 & \dots & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, наконец, что случайные векторы погрешностей (2.41) – независимы. Из выражения (2.39) имеем

$$\tilde{X}_{ji} = X_{ji} - \varepsilon_{ji}, \quad (2.42)$$

Подставив (2.42) в (2.40), получим $\eta_i = \sum_{j=1}^p X_{ji} - \varepsilon_{ji} \alpha_j$, и далее с учетом (2.38)

$$y_i = \sum_{j=1}^p X_{ji} \alpha_j + e_i^*, \quad e_i^* = e_i - \sum_{j=1}^p \alpha_j \varepsilon_{ji}. \quad (2.43)$$

Так как $e_i^*, i = \overline{1, n}$ зависят только от i -го вектора погрешности (2.41), то отсюда и из предположения независимости этих векторов следует, что все e_i^* – независимы и, как следует из (2.43), $M[e_i^*] = 0$. Дисперсия $D[e_i^*]$ погрешностей e_i^* не зависит от i и равна

$$D[e_i^*] = \sigma_{00}^2 + \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \sigma_{jj}^2 - 2 \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \sigma_{j0}^2.$$

2.2.2. Свойства вероятностной модели при неопределенности значений воспроизводимых величин

Если калибровочные значения $\tilde{X}_{ji}$ контролируются с погрешностями ε_{ji} , то функциональная зависимость величины η_i от независимых переменных $\tilde{X}_{ji}$ должна быть строго линейной, поскольку в этом случае, как следует из (2.43), математическое ожидание

$$M[e_i^*] = 0, \quad (2.44)$$

что обеспечивает несмещенность оценки y_i по отношению к действительному значению η_i . Если функциональная зависимость η_i от $\tilde{X}_{ji}$ нелинейна, выражена в форме, например, квадратичной регрессии, то

$$y_i = \sum_{j=1}^p X_{ji}^2 \alpha_j.$$

Когда y_i и X_{ji} – оценки действительных величин η_i и $\tilde{X}_{ji}$, то в выражении для погрешности e_i^* появляется квадратичный член, зависящий от ε_{ji}^2

$$e_i^* = e_i - 2 \sum_{j=1}^p X_{ji} \varepsilon_{ji} \alpha_j + \sum_{j=1}^p \varepsilon_{ji}^2 \alpha_j,$$

что нарушает условие (2.44) и делает оценку y_i смещенной по отношению к действительному значению контролируемой величины η_i . Кроме того, возрастает дисперсия оценок y_i , что снижает их эффективность.

Рассмотрим теперь более подробно линейное соотношение (2.40), устанавливающее связь между действительными величинами

η_i и регрессорами (калиброванными значениями). Значения $\tilde{X}_{ji}$ даны в этом случае, без погрешностей их оценивания ε_{ji} . Для простоты анализа рассмотрим однопараметрическую модель ($p = 1$)

$$\eta_i = \tilde{X}_{1i} \alpha_i. \quad (2.45)$$

Подставляя значения η_i и $\tilde{X}_{ji}$ из (2.38) и (2.39), соответственно, в уравнение (2.45), получим

$$y_i = \alpha_i X_{1i} + e_i - \alpha_1 \varepsilon_{1i}. \quad (2.46)$$

Случайная величина X_{1i} (результат измерения калиброванной величины $\tilde{X}_{1i}$) коррелирована с ошибкой $(e_i - \alpha_1 \varepsilon_{1i})$. Ее ковариация отличается от нуля

$$\text{cov}[X_{1i}, e_i - \alpha_1 \varepsilon_{1i}] = M[X_{1i}, e_i - \alpha_1 \varepsilon_{1i}] = -\alpha_1 \sigma_\varepsilon,$$

где σ_ε – среднеквадратическое отклонение погрешностей ε_{1i} , $i = \overline{1, n}$, причем

$$\sigma_\varepsilon > 0. \quad (2.47)$$

Условие (2.47) превращает регрессию (2.37) в структурное соотношение (2.46), которое регрессией уже не является [96], однако позволяет оценить коэффициенты α_i модели (2.1) в ходе многократных измерений [96], когда выполняется условие $M[\varepsilon_{ji}] = 0$.

ВЫВОДЫ

1. Выполнение условий $M e_i = 0$, $M [\varepsilon_{ji}] = 0$ исключает появление систематической погрешности при оценке действительного значения уровня Y , как среднего арифметического $y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, когда используют n независимых одинаковых образцов сыпучего материала, позволяющих, с помощью p преобразователей, получить p значений регрессоров X_{ji} , $j = \overline{1, p}$, $i = \overline{1, n}$. При этом точность оценки угловых коэффициентов α_j тем выше, чем больше число контрольных образцов n и тогда структурное соотношение (2.46) сходится по вероятности к уравнению измерения (2.37).

2. Зону допуска (допусковый интервал) при параметрическом контроле следует выбирать на линейном участке функции преобразования, особенно, если действительный вид зависимости оценки уровня y от контролируемых переменных X_{ji} нелинейный и в этом случае обеспечивается несмещенность функции преобразования, поскольку выполняется условие (2.44).

3. Практическая значимость выводов 1 и 2 заключается в том, что они справедливы для любых процедур обучения (градуировки) систем контроля, когда вместо стандартных контрольных образцов используются образцы значений контролируемой величины на основе реальных веществ и материалов. Тогда набор из n метрологических нестандартных образцов одного и того же значения y позволяет смоделировать «оценку» стандартного образца, для которого погрешность воспроизведения величины y в ε_{ij} раз меньше, чем для любого одиночного нестандартного образца.

4. Теоретическое исследование двухфакторной модели перекрестных классификаций результатов измерительного эксперимента с многократными наблюдениями контролируемой величины позволило количественно выделить эффекты влияния случайной дискретной неоднородности нестандартных образцов на фоне неслучайных изменений значений этой величины и разработать метод тестирования контролируемых величин, используемых при обучении системы контроля.

5. Доказано, что тестовая статистика (2.23) является линейной функцией случайной величины с центральным F -распределением, что позволяет проверять сложную гипотезу о факторном влиянии дискретной неоднородности на контролируемые величины.

6. Доказано, теоретически, что эта проверка может осуществляться при заранее задаваемых вероятностях ошибок как первого, так и второго рода, что дает возможность тестирования контролируемых величин на их чувствительность к изменениям уровней неоднородности. Получены точное, (2.29), и асимптотическое (2.23), неравенства, позволяющие планировать выбор оптимальных сочетаний числа уровней дискретной неоднородности и воспроизводимых уровней контролируемой величины, обеспечивающих заданную достоверность тестирования при минимальном числе воспроизводимых значений.

7. Получены теоретические результаты математического моделирования влияния неточности воспроизведения уровней параметра контроля на систематическую и случайную погрешности синтезированной при обучении регрессионной модели первичного измерительного преобразования. Определено условие (2.44) выбора значений параметра контроля для группы нестандартных образцов, уменьшающее систематическую погрешность при оценке уровня параметра контроля, когда функция первичного преобразования имеет нелинейные участки.

8. Предложена математическая модель (2.59) количественной оценки информативности контролируемых величин, в двухфакторном эксперименте с одновременным влиянием дискретной неоднородности эксперимента и изменений уровней параметра контроля.

9. Доказано, что для оценки информативности можно использовать и F -статистику (2.52), несмотря на то, что она имеет плотность нецентрального F -распределения.

Уменьшение неопределенности многопараметрического преобразования контролируемых величин в оценку уровня параметра контроля повышает достоверность последнего [3-13]. Однако, применение, при обучении, нестандартных образцов, ограниченное их количество, использование нестандартных первичных преобразователей [27, 31-35, 98] порождает дополнительную неопределенность оценок уровней параметра контроля, что выражается в появлении неустранимой методической составляющей вероятностей ошибок контроля.

Снижение этой дополнительной неопределенности при синтезе полиномиальной модели преобразования требует решения таких задач:

- информационного анализа полиномиальных моделей преобразования со случайными переменными и разработки эффективного критерия оптимизации этих моделей, по максимуму получаемой информации о значениях уровней параметра контроля;
- оценки отклонения от линейности действительных функций первичного преобразования при неопределенности входной и выходной величин, с учетом случайности коэффициентов этих функций;
- оценки стандартной неопределенности первичного преобразования с разделением на аддитивную и мультипликативную составляющие, когда коэффициенты модели преобразования, а также входные и контролируемые переменные – случайные величины.

3.1. Анализ полиномиальных моделей преобразования при неопределенности входных величин

3.1.1. Базовые модели со случайными переменными. Выбор критерия адекватности модели

Как уже отмечалось в разделах 1 и 2, оценка контролируемого параметра Y производится на основании результатов измерения $x_1, \dots, x_p$ значений контролируемых величин $X_1, \dots, X_p$ с последующим функциональным преобразованием этих значений в оценку Y^* . Эта процедура соответствует модели не прямых измерений, где $X_1, \dots, X_p$ являются аргументами или переменными [96], а модель преобразования выбирается исходя из метода непрямого измерения (косвенное, совокупное и т.д.) [78]. Используем для выбора модели измерительного преобразования метод косвенного измерения, для которого такая модель имеет вид [78]

$$Y = F(X_1, \dots, X_m), \quad (3.1)$$

где m – количество входных физических величин, подвергаемых прямым измерениям.

При отсутствии информации о виде физической модели для выбора функциональной связи $F(\cdot)$, такая связь предполагается стохастической [96], для которой модель (3.1) формально может быть записана в виде множественной линейной регрессии со случайными регрессорами [96]

$$Y = \beta_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-1} u_{p-1} + \varepsilon, \quad (3.2)$$

где $\beta_0, \dots, \beta_{p-1}$ – коэффициенты модели,

$u_0, \dots, u_{p-1}$ – случайные регрессоры,

ε – случайный остаток, свойства которого аналогичны свойствам остатка Z_{tij} дисперсионной модели (2.1),

p – количество параметров модели.

Существует несколько вариантов модели (3.2) со случайными регрессорами:

1. Функциональная модель [96]. В ней предполагается, что регрессор u_j , $j = 1, (p-1)$, измеряется с погрешностью δ_{ji} и вместо u_i в модели (3.2) используют результаты измерений

$$X_j = u_j + \delta_{ji}. \quad (3.3)$$

Тогда модель (3.2) может быть представлена в одной из двух форм

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j M[X_j] + \varepsilon, \quad (3.4)$$

или

$$M Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j u_j; \quad (3.5)$$

2. Модель с ошибками в переменных. Это вариант функциональной модели, в которой случайный фактор связан не только с погрешностями δ_i в измерениях переменных X_j , $j = 1, (p-1)$, но и с ошибками определения значений Y ;

3. Структурная модель. В такой модели переменные Y и u_j – случайны, а связь, в виде априорно неизвестной функции F · существует не между математическими ожиданиями этих переменных, а между их случайными значениями. Входная переменная Y – известна с точностью до значений

$$Y = V + \varepsilon, \quad (3.6)$$

где V – неизвестно.

Модель принимает вид условной регрессии

$$M[Y | u_j] = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j u_j, \quad (3.7)$$

где все u_j заменяются их оценками X_j , определяемыми из (3.3);

4. Модель регрессии второго рода. Эта модель, называемая еще моделью компонент дисперсий, является разновидностью структурной модели, в которой помимо Y и u_j случайными являются и коэффициенты $\beta_0, \dots, \beta_{p-1}$;

5. Модель контролируемых переменных [96]. Это вариант предыдущей модели, однако здесь, хотя регрессоры и случайны, средние значения этих регрессоров – контролируются.

Для определения понятия адекватности модели (3.2) используем такие вероятностные свойства оценок $\bar{Y}^*$ как несмещенность и состоятельность, количественно отражающих систематическую и случайную погрешности преобразования уровней величины Y [80, 84].

Пусть смещение оценки $\bar{Y}^*$ модели (3.2) обусловлено недостатком (или избыточностью) регрессоров (показателей контроля), а дисперсия $\bar{Y}^*$ – зависит от дисперсии остатка ε .

Рассмотрим две модели с разным числом регрессоров:

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^S \beta_j X_j, \quad (3.8)$$

$$Y = \beta_0 + \sum_{j=1}^r \beta_j X_j + \delta, \quad (r < S). \quad (3.9)$$

Условие $r < S$ порождает дополнительный случайный остаток δ в модели (3.9).

Пусть $X_j, j = \overline{1, S}$ – случайные величины с $M[X_j] = \theta_j$ и пусть в i -ом повторяющемся эксперименте величина X_j обозначается как X_{ji} , а ее значение, в этом случае, обозначается как x_{ji} .

При использовании модели (3.9) вместо модели (3.8), оценка неопределенности результата $\bar{Y}_i$ должна учитывать и неопределенность оценок $\theta_j^* = \bar{X}_j, j = \overline{1, r}$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_i = & \beta_0 + \sum_{j=1}^r \beta_j \bar{X}_j + \sum_{j=r+1}^S \beta_j \theta_j + \\ & + \sum_{j=1}^r \beta_j X_{ji} - \bar{X}_j + \sum_{j=1}^S \beta_j X_{ji} - \theta_j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Выражение (3.10) можно представить теперь как

$$\bar{Y}_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^r \beta_j \bar{X}_{ji} - \bar{X} + \varepsilon, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta_0 + \sum_{j=1}^r \beta_j \bar{X}_j + \sum_{j=1}^s \beta_j \theta_j, \\ \varepsilon = \sum_{j=1}^s \beta_j X_{ji} - \theta_j. \end{cases} \quad (3.12)$$

В (3.12) α_0 является случайной величиной, а $M \varepsilon = 0$.

Поскольку количество повторяющихся измерительных экспериментов ($i = 1, n$, где $n \ll \infty$) – ограничено, то величины θ_j неизвестны.

Выбор числа регрессоров должен осуществляться в рамках условной регрессии

$$M \left[Y_i \mid x_{ji}, j = \overline{1, r} \right] = \alpha_0 + \sum_{j=1}^r \beta_j x_{ji} - \bar{x}_j. \quad (3.13)$$

В этом случае (модель (3.13)) α_0 является уже постоянной величиной, причем – $M \varepsilon = 0$ независимо от того, сколько регрессоров участвует в синтезе модели (3.13).

Это означает, что если переменные X_j модели (3.9) не контролируются, вопрос адекватности модели измерения – это вопрос снижения случайного остатка δ (или остатка ε в модели (3.2)) до минимального, статистически обоснованного уровня.

3.1.2. Информационный анализ регрессионной модели

Рассмотрим модель (3.2) в виде множественной регрессии, линейной относительно постоянных коэффициентов $\beta_0, \dots, \beta_{p-1}$, оценками которых являются величины $b_0, \dots, b_{p-1}$. В качестве переменных $u_1, \dots, u_{p-1}$ используем показатели контроля $X_1, \dots, X_{p-1}$

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{j=1}^{p-1} b_j X_j. \quad (3.14)$$

Если абсолютная погрешность измерения значений Y распределена нормально, то независимо от закона распределения уровней

параметра Y [95], количество ожидаемой измерительной информации об этих уровнях равно [84]

$$I = 0,5 \log_2 \left(1 + \sigma_Y^2 / \sigma_{\Delta Y}^2 \right), \quad (3.15)$$

где σ_Y и $\sigma_{\Delta Y}$ – стандартные отклонения величины Y и погрешности ее измерения, соответственно.

Если при обучении модели измерения (3.14) используют конечное множество $\bar{X}_i, i = 1, n$, векторов $X_i = X_{1i}, \dots, X_{p-1,i}$, соответствующих множеству Y_i значений уровней величины Y , то оценками дисперсий $\sigma_Y^2, \sigma_{\Delta Y}^2$ будут [95]

$$S_Y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Y_i - \bar{Y}^2, \quad (3.16)$$

$$S_{\Delta Y}^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n Y_i - \bar{Y}_i^2. \quad (3.17)$$

Если воспользоваться выборочным множественным коэффициентом корреляции R_p между Y_i и $\bar{Y}_i$ [96], то отношение $\sigma_Y^2 / \sigma_{\Delta Y}^2$ в (3.15) заменится, с учетом (3.16) и (3.17) на оценку

$$\frac{S_Y^2}{S_{\Delta Y}^2} = \frac{n-p}{1-R_p^2} \frac{1}{n-1}, \quad (3.18)$$

где $1-R_p^2 = \sum_i Y_i - \bar{Y}_i^2 / \sum_i Y_i - \bar{Y}^2$.

С учетом (3.18) выражение (3.15) примет вид

$$I = 0,5 \log_2 \left(1 + \frac{n-p}{1-R_p^2} \frac{1}{n-1} \right). \quad (3.19)$$

Для коррекции количества информации I используем в качестве R_p скорректированный коэффициент детерминации $\bar{R}_p^2$, связанный с R_p^2 соотношением [96]

$$\bar{R}_p^2 = 1 - \frac{1 - R_p^2}{\frac{n}{n-p}}. \quad (3.20)$$

Заменим R_p^2 в выражении (3.19) на $\bar{R}_p^2$ с учетом уравнения (3.20), получим

$$I = 0,5 \log_2 \left(1 + \frac{n}{1 - \bar{R}_p^2} \frac{1}{n-1} \right). \quad (3.21)$$

Учтем, что дисперсия $\sigma_{\Delta Y}^2$ сама является оценкой, функционально зависящей от выборочной остаточной дисперсии (3.17). Неопределенность, теперь, результата измерения новых, не калиброванных с помощью n образцов, уровней параметра контроля Y связана с ошибкой предсказания по регрессии (3.14) и увеличивает выборочную остаточную дисперсию $S^2 = S_{\Delta Y}^2$. Эта новая, увеличенная дисперсия погрешности равна

$$S^{*2} = S^2 \left[1 + \frac{1}{n-p} + \frac{1}{n-p} \sum_{i,j=1}^{p-1} \frac{L_{ij}}{\det L} (X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j) \right],$$

где $\det L$ – детерминант ковариационной матрицы

$$L = \begin{vmatrix} l_{11} & \dots & l_{1(p-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{(p-1)1} & \dots & l_{(p-1)(p-1)} \end{vmatrix},$$

L_{ij} – его алгебраические дополнения.

Элемент l_{ij} матрицы L является выборочной ковариацией между регрессорами X_i и X_j

$$l_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n (X_{iv} - \bar{X}_i)(X_{jv} - \bar{X}_j),$$

где $\bar{X}_i, \bar{X}_j$ – оценки средних значений, $i \neq j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Учтем замену S^2 на S^{*2} и используя выражение (3.21) запишем количество ожидаемой измерительной информации по регрессии (3.14), когда коэффициенты $b_0, \dots, b_{p-1}$ оцениваются по выборке из n калибровочных значений, а измеренные величины не входят в систему этих калибровочных значений

$$I = 0,5 \log_2 \left[1 + \frac{n}{n-1} \frac{1}{1 - \bar{R}_p^2} \cdot \left[1 + \frac{n-p}{n-p-1} + \frac{n-p-1}{\sum_{i,j=1}^{p-1} \frac{L_{ij}}{\det L} (X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)} \right]^{-1} \right] \quad (3.22)$$

Отметим, что при $n \rightarrow \infty$, количество измерительной ожидаемой информации максимально, но ограничено сверху из-за неустраняемой остаточной дисперсии

$$S^2 \bar{R}_p^2 < 1 : I_\infty = 0,5 \log_2 \left[1 + \frac{1}{1 - \bar{R}_p^2} \right].$$

Если обеспечить несмещенность калибровочных значений Y_i при использовании многократных образцов (выводы 1 и 2 подраздела 2.2 раздела 2), то выполняются условия

$$\begin{cases} Y_i = \bar{Y}_i, \\ Y_j = \bar{Y}_j, \end{cases}$$

и выражение (3.22) имеет вид

$$I_0 = \frac{1}{2} \log \left[1 + \frac{\frac{n}{n-1} \frac{n-p}{n-p+1}}{1 - \bar{R}_p^2} \right]. \quad (3.23)$$

Количество информации I_0 можно использовать как целевую функцию для отыскания (по максимуму I_0) оптимального сочетания регрессоров $X_1, \dots, X_{p-1}$.

С другой стороны, сравнивая правые части выражений (3.15) и (3.23), запишем

$$\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_{\Delta Y}} \right)^2 = \frac{n}{1 - \bar{R}_p^2} \frac{n-p}{n-1} \frac{p}{n-p+1}. \quad (3.24)$$

Равенство (3.24) можно использовать для расчета нижней границы $\sigma_{\Delta Y}^{(H)}$ среднеквадратической погрешности по измеряемой величине Y , когда последняя распределена по равномерному закону в диапазоне Δ_Y

$$\sigma_{\Delta Y}^{(H)} = \Delta_Y \sqrt{\frac{1 - \bar{R}_p^2}{12n} \frac{n-1}{n-p} \frac{p}{n-p+1}}.$$

Величина $\sigma_{\Delta Y}^{(H)}$ также может служить целевой функцией оптимизации для модели (3.14) градуировочной характеристики, но в этом случае оптимизация должна вестись по минимуму $\sigma_{\Delta Y}^{(H)}$.

3.1.3. Оптимизация регрессионной модели по максимуму ожидаемой информации

Исследуем и сравним вероятностные модели целевых функций:

- а) статистической – в виде скорректированного коэффициента детерминации $\bar{R}_p^2$;
- б) информационный – в виде второго слагаемого

$$\beta_p = \frac{n}{1 - \bar{R}_p^2} \frac{n-p}{n-1} \frac{p}{n-p+1}, \quad (3.25)$$

под знаком логарифма в выражении (3.23) для ожидаемого количества информации I_0 .

Рассмотрим влияние на величины $\bar{R}_p^2$ и β_p введение дополнительных регрессоров в уравнение градуировочной характеристики (3.14).

Из теоремы [96] следует, что добавление q регрессоров к имеющимся p регрессорам влияет на F -статистику, используемую для проверки основной гипотезы

$$H_0 : b_1 = b_2 = \dots = b_{p-1} = \dots = b_{p+q} = 0.$$

Выражение, тогда, для критериальной F -статистики имеет вид

$$F = \left(\frac{R_{p+q}^2 - R_p^2}{1 - R_{p+q}^2} \right) \left(\frac{n - p - q}{q} \right). \quad (3.26)$$

Используя (3.20), получим условие увеличения скорректированного коэффициента детерминации при добавлении в правую часть градуировочной характеристики (3.14) q дополнительных регрессоров

$$\bar{R}_{p+q}^2 = 1 - \frac{1 - R_p^2}{\frac{n}{qF + n - p - q}} \geq \bar{R}_p^2. \quad (3.27)$$

Из (3.27) следует, что в этом случае F -статистика (3.26) не может быть меньше единицы, т.е. $F \geq 1$. Это означает, что возрастание величины $\bar{R}_p^2$ при добавлении q регрессоров будет наблюдаться, только если $F > 1$.

Из (3.25) и (3.27) следует, что

$$\beta_{p+q} = \left(\frac{qF + n - p - q}{1 - R_p^2} \right) \frac{n - p - q}{n - 1} \frac{1}{n - p - q + 1}. \quad (3.28)$$

Выражение (3.27) и (3.28) можно представить в более удобном, для анализа, виде, когда $q = 1$

$$\bar{R}_{p+1}^2 = 1 - \frac{1 - R_p^2}{\frac{n}{F + n - p - 1}}, \quad (3.29)$$

$$\beta_{p+1} = \beta_p \frac{\left[\frac{n - p}{2} - 1 \right]}{\frac{n - p}{2}}. \quad (3.30)$$

Запишем абсолютные приращения для статистик $\bar{R}_p^2$ и β_p

$$\Delta_{\bar{R}_p^2} = \bar{R}_{p+1}^2 - \bar{R}_p^2 = 1 - R_p^2 \left(\frac{F-1}{F+n-p-1} \right) \left(\frac{n}{n-p} \right), \quad (3.31)$$

$$\Delta_{\beta_p} = \beta_{p+1} - \beta_p = \beta_p \left\{ \frac{\left[\frac{n-p}{2} - 1 \right] F + n - p - 1}{n - p^3} - 1 \right\}. \quad (3.32)$$

Из (3.31) и (3.32) следует, что экстремумы статистик $\bar{R}_p^2$ и β_p не совпадают. Для $\bar{R}_p^2$ экстремум соответствует условию

$$F = 1, \quad (3.33)$$

а для статистик β_p условию

$$F = 1 + \frac{n-p}{\frac{n-p}{2} - 1}. \quad (3.34)$$

Из (3.34) видно, что обеспечение условия (3.33) достигается, если число регрессоров p в модели (3.14) невелико ($p \ll n$).

Исследуем теперь чувствительность статистик $\bar{R}_p^2$ и β_p , как целевых функций оптимизации градуировочной характеристики (3.14)

$$\begin{cases} S_{\bar{R}_p^2} = \Delta_{\bar{R}_p^2} / \bar{R}_p^2 \\ S_{\beta_p} = \Delta_{\beta_p} / \beta_p. \end{cases}$$

С учетом выражений (3.20), (3.29) – (3.32), получим

$$S_{\bar{R}_p^2} = \left(\frac{1 - \bar{R}_p^2}{\bar{R}_p^2} \right) \left(\frac{F-1}{F+n-p-1} \right), \quad (3.35)$$

$$S_{\beta_p} = \frac{\left[n - p^2 - 1 \right] F + n - p - 1}{n - p^3} - 1. \quad (3.36)$$

Найдем отношение чувствительностей (3.35) и (3.36) как $\gamma = S_{\beta_p} / S_{\bar{R}_p^2}$ и определим условия, когда $S_{\beta_p} > S_{\bar{R}_p^2}$, что соответствует неравенству $\gamma > 1$. Из (3.35) и (3.36) следует

$$\gamma = \left(\frac{\bar{R}_p^2}{1 - \bar{R}_p^2} \right) \left\{ \frac{\left[n - p^2 - 1 \right] F + n - p - 1}{n - p^3} - 1 \right\} \left(\frac{F + n - p - 1}{F - 1} \right), \quad (3.37)$$

где $F = \left(\frac{R_{p+q}^2 - R_p^2}{1 - R_{p+q}^2} \right) n - p - 1$.

Из уравнения (3.37), с учетом условия $\gamma > 1$ и выражения (3.20) следует, что использование в качестве целевой функции статистики β_p вместо статистики $\bar{R}_p^2$ имеет смысл если квадрат множественного коэффициента корреляции

$$\bar{R}_p^2 > 1 - \frac{n - p}{n} \left[\frac{F - 1 + n - p}{F - 1 + 2n - p} \right]. \quad (3.38)$$

Из (3.38) следует, что это условие легче обеспечить, если:

- 1) велики значение n числа нестандартных образцов, используемых при градуировке;
- 2) мало число регрессоров p по сравнению с числом n нестандартных образцов;
- 3) $F \ll n - p + 1$, что соответствует близости величины p к оптимальному значению, когда $F \approx 1$.

Для вычисления статистики F следует использовать двухступенчатую процедуру поиска оптимальной (по минимуму β_p или $\bar{R}_p^2$) регрессии [95]. На первом этапе вычисляют $(q + 1)$ подмножество регрессионных уравнений с числом регрессоров в

каждом подмножестве от p до $p + q$. Общее число регрессий в каждом подмножестве не будет превышать величины $2^l, l = \overline{p, p + q}$. На втором этапе выбирают $(q + 1)$ уравнения множественной регрессии с максимальными значениями коэффициентов множественной корреляции $R_p, R_{p+1}, \dots, R_{p+q}$. Для последовательных пар (R_l, R_{l+1}) вычисляют статистику F , проверяя каждый раз для $\overline{R}_p^2$ условие (3.38). Однако, как показало статистическое моделирование и как будет показано далее, для проверки условия (3.38) достаточно использовать только первую пару отобранных регрессионных уравнений с коэффициентами множественной корреляции R_p и R_{p+1} . Это следует из неравенства (3.38) при $F \ll n - p + 1$, что соответствует случаю большой остаточной дисперсии, обусловленной факторным влиянием неоднородности измерительного эксперимента.

3.2. Анализ регрессионных моделей с априорно неопределенными коэффициентами

3.2.1. Тестирование на линейность действительной функции измерительного преобразования

Результат измерения x_{tij} , как и в модели 2.1, определяется при фиксированных сочетаниях уровней фактора дискретной неоднородности U и фактора Y с многократным числом n независимых измерений по каждому из сочетаний. Однако форма представления результатов предполагает независимую оценку уровней параметра Y для каждого из уровней фактора U . Более того, количество уровней c_t параметра Y по каждому из уровней u_t фактора $U, t = \overline{1, r}$ может быть разным. Такая форма представления отражает реальные особенности измерительного эксперимента, когда переход с уровня u_t на очередной уровень u_{t+1} (и наоборот), вызывает смещение уровней y_i , а неравенство $c_t \neq c_{t+1}$ обусловлено ограничениями на число нестандартных образцов по уровням фактора U .

В табл. 3.1 представлены исходные данные по N результатам двухфакторного измерительного эксперимента ($i = \overline{1, c_t}, j = \overline{1, n}$)

$$N = n \sum_{t=1}^r c_t. \quad (3.39)$$

Табл. 3.1 дает возможность математического моделирования влияния фактора U на коэффициенты модели статического преобразования [1, 83]

$$X = F_X \ Y \mid a \ u \ , \quad (3.40)$$

где $a \ u$ – множество коэффициентов стохастически зависящих от уровней фактора U .

Таблица 3.1

**Результаты двухфакторного эксперимента
с варьируемыми уровнями параметра Y**

U	Y					
u_1	y_{11}	...	y_{1i}	...	y_{1c_1}	—
	x_{11j}	...	x_{1ij}	...	x_{1c_1j}	—
· · ·						
u_t	y_{t1}	...	y_{ti}	...	y_{tc_t}	—
	x_{t1j}	...	x_{tij}	...	x_{tc_tj}	—
· · ·						
u_r	y_{r1}	...	y_{ri}	...	y_{rc_r}	
	x_{r1j}	...	x_{rij}	...	x_{rc_rj}	

Уравнение (3.40) является моделью статической характеристики процедуры однопараметрического преобразования и с учетом аддитивного и мультипликативного влияния фактора U на величину X может быть представлено регрессионной моделью контролируемой величины

$$X_{tij} = a_t + b_t y_{ti} + \delta_{ti} + e_{tij}, \quad (3.41)$$

где a_t, b_t – коэффициенты модели для группы результатов, если $Y \in y_t \ i = \overline{1, c_t}; j = \overline{1, n}$,

δ_{ti} – отклонение от линейности,

e_{tij} – случайный остаток, свойства которого аналогичны свойствам остатка Z_{tij} модели (2.1) подраздел 2.1 раздела 2 (включая свойство $M[e_{tij}^2] = \sigma_e^2$).

Естественно возникает вопрос, может ли статическая характеристика

$$X = a + bY, \quad (3.42)$$

представлять все r групп результатов измерений ($t = \overline{1, r}$). Это линейная гипотеза H_0 : ($a_1 = a_2 = \dots = a_r$, $b_1 = b_2 = \dots = b_r$), которую можно разбить на три части:

– $H_0^{(M)} : b_1 = b_2 = \dots = b_r$ (отсутствует мультипликативное влияние фактора U);

– $H_0^{(a)} : a_1 = a_2 = \dots = a_r$ (отсутствует аддитивное влияние фактора U);

– $H_0^{(H)} : \delta_{t1} = \delta_{t2} = \dots = \delta_{tc_t} = 0$ для всех $t = \overline{1, r}$ (статическая характеристика – линейна).

Гипотезы $H_0^{(M)}$, $H_0^{(H)}$ могут проверяться независимо. Гипотеза $H_0^{(a)}$, в зависимости от выводов, полученных при проверке гипотезы $H_0^{(M)}$, может быть представлена в двух вариантах

$$H_0^{(aI)} : a_1 = a_2 = \dots = a_r, b_1 = b_2 = \dots = b_r = b,$$

$$H_0^{(aII)} : a_1 = a_2 = \dots = a_r, b_1 \neq b_2 \neq \dots \neq b_r.$$

Проверку выдвинутых гипотез можно осуществить используя методику дисперсионного анализа результатов двумерных наблюдений при односторонней классификации. Поскольку такая методика не предусматривает использование многократных наблюдений, рассмотрим вначале случай, когда подгруппы из n результатов в каждой из ячеек табл. 3.1 представлены средними по подгруппам: $x_{tij} \rightarrow \overline{X}_{ti}$, где

$$\overline{X}_{ti} = n^{-1} \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} x_{tij}. \quad (3.43)$$

Тогда модель (3.41) примет вид

$$\bar{X}_{ti} = a_t + b_t y_{ti} + Z_{ti}, \quad (3.44)$$

где Z_{ti} – случайный остаток, причем $M Z_{ti} = \sigma_Z^2$.

Естественно, что $\sigma_Z^2 > \sigma_e^2$ из-за упрощения модели (3.41).

Модель (3.44) широко используется в анализе, называемом ковариационный [84, 96], когда влияющие факторы носят смешанный характер (часть факторов – качественные, часть – количественные). В нашем случае фактор U – качественный, в то время как параметр контроля Y – фактор количественный. Используем результаты дисперсионного разложения регрессионной модели (3.44) в [84], с учетом принятой в этом подразделе системы обозначений.

Используя метод наименьших квадратов определим коэффициенты A_t, B_t эмпирически подобранных прямых регрессий

$$M[X|Y] = A_t + B_t y, \quad (3.45)$$

где A_t, B_t – оценки для a_t, b_t .

Пусть S – сумма квадратов отклонений $\bar{X}_{ti}$ от общего среднего $\bar{X}$

$$S = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} \bar{X}_{ti} - \bar{X}^2,$$

$$\text{где } \bar{X} = \left(\sum_t c_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} \bar{X}_{ti}.$$

Сумма S может быть разложена на пять независимых слагаемых

$$S = S_B + S_W + S_{WG} + S_G + S_R, \quad (3.46)$$

$$\text{где } \left\{ \begin{array}{l} S_B = w_0 B_0^2 \\ S_{WG} = \frac{w_c w_m}{w_0} B_c - B_m^2 \\ S_G = \sum_{t=1}^r c_r \left[\bar{X}_t - \bar{X} - B_m \bar{y}_t - \bar{y} \right]^2 \\ S_W = \sum_{t=1}^r w_t B_t - B_c^2 \\ S_R = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} \left[X_{ti} - \bar{X}_t - B_t y_{ti} - \bar{y}_t \right]^2. \end{array} \right. \quad (3.47)$$

В суммах (3.47):

$$w_t = \sum_{i=1}^{c_t} y_{ti} - \bar{y}^2; w_c = \sum_{t=1}^r w_t; w_m = \sum_{t=1}^r c_t \bar{y}_t - \bar{y}^2;$$

$$w_0 = w_m + w_c; B_c = w_c^{-1} \sum_{t=1}^r w_t B_t; B_m = \frac{\sum_{t=1}^r c_t \bar{y}_t - \bar{y} \bar{X}_t - \bar{X}}{\sum_{t=1}^r c_t \bar{y}_t - \bar{y}^2};$$

$$B_0 = w_0^{-1} w_c B_c + w_m B_m; \bar{X}_t = c_t^{-1} \sum_{i=1}^{c_t} \bar{X}_{ti}; \bar{y}_t = c_t^{-1} \sum_{i=1}^{c_t} y_{ti}; \bar{y} = r^{-1} \sum_{t=1}^r \bar{y}_t.$$

Перейдем теперь к модели (3.41), которая получается из (3.44) переходом от $\bar{X}_{ti}$ к x_{tij} при новом разложении суммы квадратов отклонений

$$S_{\Sigma} = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} \sum_{j=1}^n X_{tij} - \bar{X}^2, \quad (3.48)$$

появляется дополнительный член разложения, отвечающий за отклонений δ_{ti} модели (3.41)

$$S_{\Sigma} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5. \quad (3.49)$$

Результаты дисперсионного разложения суммы S_{Σ} представлены в табл. 3.2

Таблица 3.2

Результаты дисперсионного разложения суммы S_{Σ}

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений
12	3	3
Общий угловой коэффициент регрессии	$V_0 = 1$	$S_0 = nS_B$
Угловой коэффициент групповых средних	$V_1 = 1$	$S_1 = nS_{WG}$
Относительно линейной регрессии групповых средних	$V_2 = r - 2$	$S_2 = nS_G$

1	2	3
Между угловыми коэффициентами внутри группы	$V_3 = r - 1$	$S_3 = nS_W$
Отклонение от линейности внутри групп	$V_4 = c - 2r,$ $c = \sum_{t=1}^r c_t$	$S_4 = n \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} n_{ti} \left[\bar{X}_{ti} - \bar{X}_t - B_t y_{ti} - \bar{y}_t \right]^2$
Остаток (относительно средних в ячейке)	$V_5 = N - c$	$S_5 = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} \sum_{j=1}^n X_{tij} - \bar{X}_{ti}^2$
Общий	$V = N - 1$	S_Σ

Следует отметить, что в случае неравного числа наблюдений в ячейках табл. 3.1, когда n_{ti} – число многократных наблюдений в ячейке по t -строке и i -тому столбцу, суммы $S_0 - S_5$ изменяются и примут вид: $S_0 = S_B$; $S_1 = S_{WG}$; $S_2 = S_G$; $S_3 = S_W$;

$$S_4 = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} n_{ti} \left[\bar{X}_{ti} - \bar{X}_t - B_t y_{ti} - \bar{y}_t \right]^2 ; S_5 = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} \sum_{j=1}^{n_{ti}} X_{tij} - \bar{X}_{ti}^2 .$$

В этом случае вычисление сумм S_B , S_{WG} , S_G и S_W производят с учетом того, что

$$w_t = \sum_{i=1}^{c_t} n_{ti} y_{ti} - \bar{y}^2 ; w_m = \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^{c_t} n_{ti} \bar{y}_t - \bar{y}^2 .$$

Уравнения табл. 3.2 позволяют, в первую очередь, использовать тест на значимость [84, 99] квадратов отклонений, обусловленных суммами $S_1 - S_4$, а также проверить общую линейность гипотезы H_0 .

Критериальные статистики для проверки выдвинутых гипотез при заданном уровне значимости α имеют следующий вид

$$H_0 : F_{2(r-1), (N-2r)} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_4 + S_5} \cdot \frac{N - 2r}{2r - 1}, \quad (3.50)$$

$$H_0^{(M)} : F_{(r-1), (N-2r)} = \frac{S_3}{S_4 + S_5} \cdot \left(\frac{N - 2r}{r - 1} \right), \quad (3.51)$$

$$H_0^{(aI)} : F_{(r-1), (N-k-1)} = \frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4 + S_5} \cdot \left(\frac{N - k - 1}{r - 1} \right), \quad (3.52)$$

$$H_0^{(aII)} : F_{(r-1), (N-2r)} = \frac{S_0 + S_1 + S_2 + S_3 - w_0 S^*}{S_4 + S_5} \cdot \left(\frac{N - 2r}{r - 1} \right), \quad (3.53)$$

где

$$S^* = \sum_{t=1}^r \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{c_t} \sum_{j=1}^{n_{ti}} x_{tij} - \bar{X} \quad y_{ti} - \bar{y}}{\sum_{i=1}^{c_t} y_{ti} - \bar{y}^2} \right\}^2,$$

$$H_0^{(H)} : F_{V_4, V_5} = \frac{S_4 / V_4}{S_5 / V_5}, \quad (3.54)$$

где V_4 и V_5 принимают из табл. 3.2.

Перечисленные гипотезы не отвергаются, если их критериальные статистики не превышают значений соответствующих $(1 - \alpha)$ -процентных точек центрального F -распределения.

3.2.2. Тестирование функции измерительного преобразования на отсутствие смещения

Анализ результатов теоретических исследований, представленных в разделе 2.1, показывает, что тестирование с учетом достоверности принятия решений возможно лишь в случае, когда критериальная статистика имеет плотность центрального F -распределения. Коэффициент преобразования такой статистики может быть найден лишь тогда, когда соответствующая средняя сумма квадратов отклонений, обусловленная влияющим фактором неоднородности, имеет плотность линейно преобразованного χ^2 -распределения. Это условие выполняется лишь для суммы квадратов S_W (3.46) или S_3 (3.49), а критериальная статистика F_W определяется уравнением (3.51).

В силу равновероятности выбора сочетаний из r уравнений качественного фактора U , выполняются условия рандомизации модели наблюдения (3.41) по отклонениям $\{b_{ti}\}$, поскольку $(B_t - B_c)$ – случайная величина с нулевым средним и с дисперсией

σ_B^2 . Если все B_t , $t = \overline{1, r}$ имеют нормальное распределение вероятностей, то сумма квадратов S_W распределена как

$$S_W \sim \chi_{r-1}^2 \cdot \sigma^2 + N-1 \sigma_y^2 \sigma_B^2. \quad (3.55)$$

Дисперсия σ_B^2 может быть представлена как сумма дисперсий σ_{BH}^2 и σ_{BM}^2 , аналогичных дисперсиям σ_H^2 и σ_M^2 подраздела 2.1 раздела 2. Дисперсия σ_{BM}^2 отличается от нуля лишь в случае влияния статистической неоднородности результатов измерения на чувствительность величины X к изменению уровней параметра контроля Y . Введем гипотезы:

- $h_0^{(B)}$: влияние фактора U отсутствует;
- $h_1^{(B)}$: фактор U влияет на чувствительность показателя X по отношению к параметру контроля Y .

Зададимся вероятностями ошибок тестирования, α и β , первого и второго рода. Используя методику, изложенную в разделе 2.1, определим условия выбора пороговой статистики F_0 :

$$\begin{cases} P \left[F_{r-1, N-2r} > F_0 \left\{ 1 + N-1 \frac{\sigma_y^2}{\sigma^2} \sigma_{BH}^2 + \sigma_{BM}^2 \right\}^{-1} \right] \geq 1 - \beta \\ P \left[F_{r-1, N-2r} > F_0 \left\{ 1 + N-1 \frac{\sigma_y^2 \sigma_{BH}^2}{\sigma^2} \right\}^{-1} \right] \leq \alpha . \end{cases} \quad (3.56)$$

Из (3.56) получаем условие выбора F_0 , когда должно выполняться неравенство

$$\frac{F_{r-1, N-2r, 1-\alpha}}{F_{r-1, N-2r, \beta}} \leq \frac{1 + N-1 \frac{\sigma_y^2}{\sigma^2} \sigma_{BH}^2 + \sigma_{BM}^2}{1 + N-1 \frac{\sigma_y^2 \sigma_{BH}^2}{\sigma^2}}. \quad (3.57)$$

При достаточно больших N (если $N - 2r > 100$)

$$F_{r-1, N-2r} \rightarrow \chi_{r-1}^2 / r - 1 .$$

Тогда неравенство (3.57) выбора F_0 при заданных α и β примет вид

$$\frac{\chi_{r-1, 1-\alpha}^2}{\chi_{r-1, \beta}^2} < \frac{\sigma_{BH}^2 + \sigma_{BM}^2}{\sigma_{BH}^2} . \quad (3.58)$$

Обозначим правую часть неравенства как δ^2 . Величина δ^2 показывает относительное увеличение дисперсии результатов измерения, вследствие неучтенного факторного влияния неоднородности (по сравнению с влиянием выбранного нормативного метода измерения).

В табл. 3.3 представлены минимальное число $r_{\min}$ уровней фактора неоднородности, позволяющие тестировать, при $F_0 = \delta^2$, функцию преобразования (3.42) на робастность (устойчивость) к воздействиям этого фактора при заданной P_D достоверности тестирования ($\alpha = \beta$).

Таблица 3.3

**Минимальное число уровней неоднородности
для тестирования функции преобразования**

δ^2	P_D			
	0,9	0,95	0,975	0,99
2	29	49	68	95
2,5	17	27	40	50
3	12	19	27	35
3,5	10	15	21	29
4	8	13	17	24
4,5	7	11	15	21
5	6	10	13	18
5,5	6	9	12	17
6	5	8	11	15

Повышение достоверности P_D влечет за собой увеличение $r_{\min}$. В то же время при увеличении δ^2 величина $r_{\min}$ падает. Если, например, σ_{BH}^2 и σ_{BM}^2 соизмеримы ($\delta = \sqrt{\delta^2} \approx 2 \div 2.5$), то при $\alpha = \beta = 0,1$ имеем $r_{\min} = 5 \div 8$. Выбор решений при тестировании следующий: принимается гипотеза $h_0^{(B)}$, если $F_W \leq F_0$; принимается гипотеза $h_1^{(B)}$, если $F_W > F_0$.

3.3. Анализ случайных погрешностей регрессионного преобразования

Рассмотрим модель (3.44) результата измерения значений X_{tij} показателя X при r уровнях фактора неоднородности U , c_t уровнях параметра контроля Y и n многократных измерений величины X при всех сочетаниях уровней факторов U и Y , $t = \overline{1, r}, i = \overline{1, c_t}, j = \overline{1, n}$.

Найдем математическое ожидание суммы квадратов разложения (3.46)

$$M S = M S_B + M S_{WG} + M S_G + M S_W + M S_R, \quad (3.59)$$

где

$$M S_B = \sigma_Z^2 + w_0 b_0^2,$$

$$M S_{WG} = \sigma_Z^2 + \frac{w_c w_m}{w_0} b_0 - b_m,$$

$$M S_G = \sigma_Z^2 k - 2 + \sum_{t=1}^r c_r a_t - a_m - b_m \overline{X_t}^2,$$

$$M S_W = \sigma_Z^2 k - 1 + \sum_{t=1}^r w_r b_t - b_c^2,$$

$$M S_R = \sigma_Z^2 N - 2r,$$

причем $b_0 = M B_0$, $b_m = M B_m$, $b_c = M B_c$.

Обозначим вторые слагаемые в правой части уравнений для $M S_{WG}$, $M S_G$, $M S_W$ через $\tilde{S}_{WG}$, $\tilde{S}_G$, $\tilde{S}_W$, соответственно.

Эти слагаемые отвечают за дополнительные изменения выходного сигнала X из-за влияния фактора U , если линейная нулевая гипотеза H_0 отвергается по результатам тестирования.

Разделив левую и правую части выражения (3.59) на $(N - 1)$, получим

$$M[\bar{S}] = \frac{\sigma_Z^2}{N-1} \left[\frac{w_0 b_0^2}{\sigma_Z^2} + \frac{\tilde{S}_{WG}}{\sigma_Z^2} + \frac{\tilde{S}_G}{\sigma_Z^2} + \frac{\tilde{S}_W}{\sigma_Z^2} + N-1 \right]. \quad (3.60)$$

Используя уравнение (3.47) найдем отношения средних квадратов

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{\tilde{S}_{WG}}{\sigma_Z^2}, \\ F_2 = \frac{\tilde{S}_G}{\sigma_Z^2} r-2^{-1}, \\ F_3 = \frac{\tilde{S}_W}{\sigma_Z^2} r-1^{-1}, \\ F_b = \frac{w_0 b_0^2}{\sigma_Z^2}. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

С учетом (3.61) уравнение (3.60) примет вид

$$M[\bar{S}] = \frac{F_b \sigma_Z^2}{N-1} + \frac{F_1 \sigma_Z^2}{N-1} + F_2 \sigma_Z^2 \frac{r-2}{N-1} + F_3 \sigma_Z^2 \frac{r-1}{N-1} + \sigma_Z^2. \quad (3.62)$$

Из (3.62) видно, что первое слагаемое отвечает за информационную составляющую изменений контролируемой величины X . Второе и третье слагаемые отражают аддитивные изменения X . Четвертое слагаемое связано, причем линейно, с мультипликативными изменениями величины X из-за случайных изменений угловых коэффициентов для групповых регрессий.

Оценками составляющих полной дисперсии погрешности по X

$$\sigma_{\Sigma X}^2 = \sigma_Z^2 \left[\frac{F_1 + F_2 r-2 + F_3 r-1}{N-1} + 1 \right], \quad (3.63)$$

являются аддитивная σ_A^2 и мультипликативная σ_B^2 составляющие

$$\sigma_{AX}^2 = \sigma_Z^2 \left[\frac{F_1 + F_2}{N-1} + 1 \right], \quad (3.64)$$

$$\sigma_{MX}^2 = \sigma_Z^2 F_3 \left(\frac{r-1}{N-1} \right), \quad (3.65)$$

где в качестве F_1 , F_2 и F_3 используют их оценки

$$\begin{cases} F_1 = S_{WG} / \bar{S}_R, \\ F_2 = [S_G / r - 2] / \bar{S}_R, \\ F_3 = [S_W / r - 1] / \bar{S}_R. \end{cases} \quad (3.66)$$

Переходя от дисперсии к среднеквадратичному отклонению (СКО) найдем среднеквадратические погрешности по выходу и по входу модели преобразования (3.42):

1. Погрешности по выходу

$$\sigma_{\Sigma X} = \sigma_Z \sqrt{\frac{F_1 + F_2}{N-1} + 1}, \quad (3.67)$$

$$\sigma_{AX} = \sigma_Z \sqrt{\frac{F_1 + F_2}{N-1} + 1}, \quad (3.68)$$

$$\sigma_{MX} = \sigma_Z \sqrt{F_3 \left(\frac{r-1}{N-1} \right)}; \quad (3.69)$$

2. Погрешности по входу

$$\begin{cases} \sigma_{\Sigma Y} = \sigma_{\Sigma X} / |B_0|, \\ \sigma_{AY} = \sigma_{AX} / |B_0|, \\ \sigma_{MY} = \sigma_{MX} / |B_0|. \end{cases} \quad (3.70)$$

Использованный при анализе погрешностей вариант $H_0^{(aI)}$ гипотезы H_0 соответствует преобладанию аддитивной составляю-

щей неопределенности преобразования (3.42). Для варианта $H_0^{(all)}$, когда пренебрегать мультипликативной составляющей нельзя, используют модель F -статистики в виде (3.53). Тогда аддитивная составляющая σ_{AX} вместо (3.68) будет определяться выражением

$$\sigma_{AX} = \sigma_Z \sqrt{\frac{F^*}{N-1} + 1}, \quad (3.71)$$

где

$$F^* = \frac{S_B + S_{WG} + S_G + S_W - w_0 S^{**}}{\sigma_Z^2} r - 1,$$

$$S^{**} = \sum_{t=1}^r \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{c_t} y_{ti} - \bar{y} \quad X_{ti} - \bar{X}}{\sum_{i=1}^{c_t} y_{ti} - \bar{y}^2} \right\}^2.$$

Тогда величина полной неопределенности $\sigma_{\Sigma X}$ будет определяться не выражением (3.67), а выражением

$$\sigma_{\Sigma X} = \sqrt{\sigma_{AX}^2 + \sigma_{MX}^2}. \quad (3.72)$$

Погрешности (3.67) – (3.72) регрессионного преобразования соответствуют математической модели стандартной неопределенности результатов измерений.

ВЫВОДЫ

1. На основе анализа регрессионной модели преобразования случайных контролируемых величин доказано (3.13), что адекватность такой модели может оцениваться по минимуму случайного остатка, а модель преобразования, в этом случае, является структурной моделью.

2. Предложен метод анализа количества ожидаемой информации для регрессионной модели преобразования со случайными коэффициентами, что позволило оптимизировать модель по максимуму ожидаемой информации (3.23) о значениях контролируемого

параметра. Доказано, что используемая при этом целевая функция оптимизации (3.25) обладает большей чувствительностью, чем традиционно используемый в множественном регрессионном анализе «скорректированный коэффициент детерминации». Определены начальные условия при выборе модели преобразования, при которых чувствительность (3.35) информационной целевой функции выше. Разработан метод выбора числа регрессоров при ограничениях на число воспроизводимых значений контролируемой величины.

3. Усовершенствована теория дисперсионного анализа регрессионных моделей многопараметрического преобразования со случайными коэффициентами. Это позволило тестировать действительные функции преобразования контролируемых величин на линейность при наличии дискретных неоднородностей (табл. 3.2). Получено условие (3.58) выбора минимально допустимого числа уровней фактора неоднородности, позволяющего тестировать модели преобразования на отсутствие или наличие смещения при заданных значениях вероятностей ошибок, как первого, так и второго рода.

4. Получены уравнения (3.67), (3.72) для оценивания стандартных неопределенностей регрессионных моделей преобразования со случайными коэффициентами, на базе критериальных F -статистик ковариационного анализа. При этом учтены варианты $H_0^{(aI)}$ и $H_0^{(aII)}$ основной гипотезы, соответствующие преобладанию либо аддитивной, либо мультипликативной составляющих неопределенности преобразования контролируемой величины. Получены уравнения (3.68), (3.69) и (3.71) для аддитивной и, отдельно, для мультипликативной составляющих стандартной неопределенности по вариантам основной гипотезы.

5. Таким образом, на основе анализа регрессионной модели преобразования случайных контролируемых величин доказано (3.13), что адекватность такой модели может оцениваться по минимуму случайного остатка, а модель преобразования, в этом случае, является структурной моделью.

6. Предложенный метод анализа количества ожидаемой информации для регрессионной модели преобразования со случайными коэффициентами позволил оптимизировать модель по максимуму ожидаемой информации (3.23) о значениях контролируемого

параметра. Доказано, что используемая при этом целевая функция оптимизации (3.25) обладает большей чувствительностью, чем традиционно используемый в множественном регрессионном анализе «скорректированный коэффициент детерминации». Определены начальные условия при выборе модели преобразования, при которых чувствительность (3.35) информационной целевой функции выше. Разработан метод выбора числа регрессоров при ограничениях на число воспроизводимых значений контролируемой величины.

7. Усовершенствована теория дисперсионного анализа регрессионных моделей многопараметрического преобразования со случайными коэффициентами. Это позволило тестировать действительные функции преобразования контролируемых величин на линейность при наличии дискретных неоднородностей (табл. 3.2). Получено условие (3.58) выбора минимально допустимого числа уровней фактора неоднородности, позволяющего тестировать модели преобразования на отсутствие или наличие смещения при заданных значениях вероятностей ошибок, как первого, так и второго рода;

8. Получены уравнения (3.67) и (3.72) для оценивания стандартных неопределенностей регрессионных моделей преобразования со случайными коэффициентами, на базе критериальных F -статистик ковариационного анализа. При этом учтены варианты $H_0^{(aI)}$ и $H_0^{(aII)}$ основной гипотезы, соответствующие преобладанию либо аддитивной, либо мультипликативной составляющих неопределенности преобразования контролируемой величины. Получены уравнения (3.68), (3.69) и (3.71) для аддитивной и, отдельно, для мультипликативной составляющих стандартной неопределенности по вариантам основной гипотезы.

Контроль параметров объектов со случайными свойствами связан с измерениями, результаты которых отличаются значительной неопределенностью, из-за использования рабочих средств измерительной техники [78] и особенно – нестандартных средств и методик измерения.

Исключить измерительный эксперимент из процедуры контроля невозможно и если основная цель измерений – это получение информации, снижающей энтропию объекта измерения, то для особо сложных диффузных объектов контроля, характеризующихся, практически, бесконечным набором физических свойств, имеет смысл рассмотреть процедуры получения информации не использующие статические характеристики измерительного преобразования в виде регрессионных моделей [78].

Для таких объектов более эффективными являются процедуры статистической дискриминации параметра Y , базирующихся на моделях принятия решений по значениям вектора контролируемых величин [15, 18, 54, 88]. Операции принятия решений широко используются при формировании выходной информации в системах технической диагностики состояний сложных объектов [18, 81], при оптимальном контроле [17] на этапе производства промышленных изделий. Однако, модели дискриминации, используемые в технической диагностике и оптимальном контроле, предполагают, в подавляющем большинстве случаев, альтернативные процедуры принятия решений, когда число состояний не превышает двух. Использование сложных гипотез для многоальтернативных процедур отсутствует из-за необходимости учета вероятностей ошибок второго рода и ограниченности числа нестандартных образцов, применяемых на этапе обучения [103].

Привлекательность, для контроля, процедур дискриминации (распознавания) состоит в том, что они требуют меньше первичной информации и работают не во всем диапазоне изменения уровней параметра контроля, а только на отдельных его участках (допус-

ковых интервалах). Смещение оценок параметра в этих интервалах практически отсутствуют [101, 103, 104]. Фактически, алгоритмы распознавания относятся к процедурам сжатия информации, перераспределяя последнюю в пределах диапазона контролируемых уровней и обеспечивая избыточность информации в допусковых интервалах.

Информационная «экономичность» процедур распознавания открывает возможность повышения достоверности контроля стохастических параметров, за счет включения этих процедур в структуру преобразований первичной информации в существующих системах многопараметрического контроля.

Это требует решения следующих задач:

- разработки теории и метода многоальтернативной дискриминации уровней параметра контроля при оптимальном синтезе системы контролируемых случайных величин и алгоритма их непрямого преобразования, при ограничениях на объемы первичной информации на этапе обучения;
- теоретического обоснования применения процедур многоальтернативной дискриминации для коррекции погрешностей регрессионных многопараметрических преобразований.

4.1. Общая модель многоальтернативной параметрической дискриминации и выбор правила принятия решений

Рассмотрим конечное множество состояний (уровней) $\{S_1, \dots, S_m\}$ параметра Y , которые представляют полную группу случайных событий и пусть $P_1, \dots, P_m$ – априорные вероятности этих событий, причем

$$\sum_{k=1}^m P_k = 1.$$

Пусть $(x_1, \dots, x_p)$ – совокупность результатов измерений значений p контролируемых величин, образующих вектор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_p)$, и зависящих от того, какое из состояний имеет место. Пусть $f \bar{x} | S_k$ – условное распределение вектора $\bar{x}$, соответствующее

состоянию S_k . Имеются также: набор решений $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, правило выбора решений $\gamma \bar{x}$, приписывающее каждому возможному результату $\bar{x}$ одно из решений, матрица потерь Π_{jk} , учитывающих последствие выбора решения γ_j при действительном состоянии S_k . Задан также критерий качества R_0 правила выбора решения. В рамках теории проверки статистических гипотез [88] набор решений представляет собой ряд логических утверждений о виде состояния S , т.е. о том, какая из гипотез, $h_1 : S \in S_1, \dots, h_m : S \in S_m$, истинна.

Одна из гипотез множества $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ может быть нулевой, а другие тогда, образуют сложную альтернативную гипотезу. Дискриминация одного из состояний $S_1, \dots, S_m$ сводится, таким образом, к параметрическому тестированию вектора измеренных значений $\bar{x}$ с помощью критериальной статистики

$$R_0 = F \left[f \bar{x} | S_k, \Pi_{jk}, P_1, \dots, P_m \mid \bar{x} \right], \quad (4.1)$$

при заданном $\gamma \bar{x}$.

Это означает, что пространство всех возможных выборок значений случайного вектора контролируемых величин $\bar{X}$ должно быть разделено на m непересекающихся областей, из которых одна – это область принятия решения, а оставшиеся – это критическая область $\bar{\omega}$.

При таком тестировании возможны ошибки первого и второго рода, вероятности которых

$$\alpha = P \left[\gamma_j \mid \bar{x} \in \omega; S \in S_k \right], k \neq j;$$

$$\beta = P \left[\gamma_k \mid \bar{x} \in \bar{\omega}; S \notin S_k \right].$$

Следует отметить, что правило выбора решения $\gamma \bar{x}$ задается до начала тестирования.

Теоретической основой рассмотренной общей модели принятия решений является байесовская теория решений [82], составляющая основу дискриминантного анализа.

В рамках такого анализа хорошо разработаны модели параметрической дискриминации для объектов контроля с двумя ($m = 2$) состояниями S_1 и S_2 . Критериальной статистикой здесь является отношение правдоподобия [88]

$$l \bar{x} = w \bar{x} | S_2 / w \bar{x} | S_1 \quad \text{при } m = 2, \quad (4.2)$$

реализуемое, часто, в форме дискриминантной (разделяющей) функции [82, 88, 100, 103]

$$g \bar{x} = \ln [l \bar{x}]. \quad (4.3)$$

Решения γ_1 или γ_2 выбирают исходя из правила выбора

$$\gamma \bar{x} = \begin{cases} \gamma_2, & \text{если } l \bar{x} \geq 1 \text{ или } g \bar{x} \geq 0, \\ \gamma_1, & \text{если } l \bar{x} < 1 \text{ или } g \bar{x} < 0. \end{cases}$$

Функции типа (4.2) и (4.3) широко используют для синтеза алгоритмов оптимального контроля и диагностики [17]. Эти функции достаточно хорошо исследованы в условиях априорной неопределенности, вызванных ограничениями на объемы обучающих выборок, однако, практически не исследовано влияние ограниченности обучающих выборок на ошибки дискриминации для случаев, когда число возможных состояний больше двух ($m > 2$).

Попытки решения такой задачи осуществлены лишь при ограничениях на вероятность ошибки первого рода α и представляют собой модели тестирования на значимость с априори неизвестной вероятностью ошибки второго рода β . Практически, все существующие модели дискриминации разработаны для случаев, когда многомерная плотность $f \bar{x} | S_k$, $k = \overline{1, m}$, является невырожденным p -мерным нормальным распределением с одинаковыми или разными по классам $S_1, \dots, S_m$ ковариационными матрицами [97].

Поскольку любая из разделяющих функций, (4.2) и (4.3), использует функции правдоподобия и поскольку для параметрической дискриминации оценивается уровень (количественное значение) контролируемой величины Y , имеет смысл использовать

для такого оценивания метод максимального правдоподобия, широко применяемого для нахождения точечных оценок [79] и используемый в рамках байесовской теории принятия решений.

Правило выбора решений, в этом случае, базируется на критерии максимального правдоподобия

$$\gamma_{\bar{x}} = \gamma_j, \text{ если } w_{\bar{x}|S_j} = \sup w_{\bar{x}|S_1}, \dots, w_{\bar{x}|S_m}. \quad (4.5)$$

Критерием качества при таком подходе к получению оценок является минимум среднего риска [88], соответствующий минимуму вероятности ошибки принятия решений $P_{\text{ош}}$ или, что то же самое, – максимуму достоверности

$$P_{\text{д}} = 1 - P_{\text{ош}}. \quad (4.6)$$

При этом, составляющие вектора $\bar{x}$ – это результаты измерений значений входных величин $X_1, \dots, X_p$.

Выбор решения о значении уровня контролируемой величины Y по максимуму соответствующей функции правдоподобия ставит вопрос определения вероятностных свойств случайного остатка модели результата измерения (3.44).

4.2. Выбор числа уровней контролируемой величины

Пусть в ходе обучения системы контроля оценивают значения $x_1, \dots, x_p$, составляющих вектора контролируемых величин $X = X_1, \dots, X_p$. Результаты оценивания образуют вектор $\bar{x}$, функцией правдоподобия которого является условная p -мерная нормальная плотность распределения вероятности

$$W_{\bar{x}|y_k} = \frac{1}{2\pi^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\bar{x} - \mu^{(k)})' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu^{(k)}) \right], \quad (4.7)$$

где $\bar{x}$ – вектор столбец измеренных значений,

$\mu^{(k)}$ – вектор условных средних,

Σ – матрица ковариаций,

$|\Sigma|$ – определитель ковариационной матрицы, который соответствует условию невырожденности распределения $W_{\bar{x}|y_k}$, то есть $|\Sigma| > 0$.

Вектор $\mu^{(k)}$ и матрица Σ имеют вид

$$\mu^{(k)} = \begin{pmatrix} \mu_1^{(k)} \\ \mu_2^{(k)} \\ \vdots \\ \mu_p^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}.$$

Оценку элементов вектора $\mu^{(k)}$ и матрицы Σ получают на этапе обучения системы контроля, когда для каждого из уровней $y_1, \dots, y_m$ используют n , воспроизводимых нестандартными образцами, значений контролируемой величины.

Заменяя $\mu^{(k)}$ и Σ на их оценки $M^{(k)}$ и S , где

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} m_1^{(k)} \\ m_2^{(k)} \\ \vdots \\ m_p^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

получим функцию правдоподобия (4.7) в виде статистики

$$\begin{aligned} W_{\bar{x}|y_k} &= 2\pi^{-p/2} |S|^{-1/2} \times \\ &\times \exp \left[-0,5 (\bar{x} - M^{(k)})' S^{-1} (\bar{x} - M^{(k)}) \right]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Статистика (4.10) является случайной величиной $\xi^{(k)}$, принимающей в каждом из m состояний свое значение, то есть $\xi^{(k)} \in \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}$, $k = \overline{1, m}$.

В зависимости от вида ковариационной матрицы S (или Σ) будем получать два варианта анализа.

1. Входные величины $X_1 \dots X_p$ – независимы друг от друга, что соответствует случаю диагональной матрицы S

$$S = \begin{vmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{pp} \end{vmatrix}; \quad (4.11)$$

2. Входные величины $X_1 \dots X_p$ стохастически связаны друг с другом, что соответствует случаю матрицы (4.9).

Независимо от варианта анализа выбор решения $\gamma_j \in \gamma_1, \dots, \gamma_m$ производится в соответствии с правилом выбора (4.5) по статистике $\xi^{(j)}$

$$\gamma \bar{x} = \gamma_j, \text{ если } \xi^{(j)} = \sup \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(m)}. \quad (4.12)$$

Из выражения (4.10) видно, что максимум статистики $\xi^k = \bar{W} \bar{x} | S_k$ соответствует минимуму показателя экспоненты:

$$T^{(k)} = \bar{x} - M^{(k)} {}' S^{-1} \bar{x} - M^{(k)}. \quad (4.13)$$

Новая статистика $T^{(k)}$ может быть интерпретирована как характеристика геометрической удаленности вектора результатов измерений $\bar{x}$ от условного (по номеру уровня) вектора средних $M^{(k)}$.

Введем обозначения:

n – число воспроизводимых нестандартными образцами уровней $y_1, \dots, y_m$ параметра Y на этапе обучения системы контроля;

N – общее число воспроизводимых уровней ($N = nm$);

A_y – диапазон изменения уровней величины Y , такой что

$$y_j^m \in A_y;$$

Δ_k – ширина допускового интервала для значения y_k (соответствует $\sum_{k=1}^m \Delta_k = A_y$).

Без потери точности анализа рассмотрим случай равенства всех Δ_k ($\Delta_1 = \dots = \Delta_m = \Delta$), когда

$$\Delta = A_y / m. \quad (4.14)$$

Пусть $Y \in y_k$ и пусть $f(T^{(k)})$ – плотность распределения статистики (4.13).

Вероятность принятия решения γ_k равна

$$P \gamma_k | Y \in y_k = \int_0^{T_H} f(T^{(k)}) dT^{(k)} = 1 - \alpha. \quad (4.15)$$

Вероятность принятия решения γ_j , $j \neq k$, равна

$$P \gamma_j | Y \in y_k = \int_{T_H}^{\infty} f(T^{(k)}) dT^{(k)} = \alpha. \quad (4.16)$$

Предел интегрирования T_H определим исходя из значений ширины допусковых интервалов Δ_i , $i = \overline{1, p}$ по каждой из контролируемых величин $X_1, \dots, X_p$, считая, в соответствии с (4.14), что

$$\Delta_i = A_{xi} / m,$$

где A_{xi} – диапазон изменения величины X_i . Определение ширины диапазона A_{xi} соответствует условию

$$\forall X_i [X_i \in A_{xi} \rightarrow Y \in A_y].$$

Учитывая, также, выражения (4.13) запишем предел интегрирования в виде

$$T_H = \Delta' S^{-1} \Delta,$$

где Δ – вектор-столбец нормированных отклонений

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{A_{x1}}{2m} \\ \frac{A_{x2}}{2m} \\ \vdots \\ \frac{A_{xp}}{2m} \end{pmatrix}.$$

Для определения вида плотности распределения $f(T^{(k)})$, в случае, если $Y \in y_k$, учтем, что случайная величина $t = \frac{n}{n+1} T^{(k)}$ является p -мерным аналогом t -статистики Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы, откуда следует, что линейно преобразованная случайная величина

$$\xi = \frac{n-p}{n-1} \cdot t = \frac{n-p}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot T^{(k)} \quad (4.17)$$

имеет плотность центрального F -распределения с p и $(n-p)$ степенями свободы. Таким образом

$$T^{(k)} \sim F_{p, n-p} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-p} \quad (4.18)$$

Из (4.18) следует, что плотность $f(T^{(k)})$ можно найти, используя линейное преобразование случайной величины ξ с центральным $F_{p, n-p}$ -распределением. Коэффициент преобразования при этом равен

$$w = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n-p}, \quad (4.19)$$

а плотность $f(T^{(k)})$ имеет вид

$$f(T^{(k)}) = \frac{1}{|w|} f\left(\frac{T^{(k)}}{w}\right) \quad (4.20)$$

Обозначая условную случайную величину $T^{(k)}$ через T и используя (4.18) – (4.20), получим

$$\begin{aligned} f(T) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) P^{\frac{p}{2}} (n-p)^{\left(\frac{n-p}{2}+1\right)} \cdot n}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) (n-1)^{n+1}} \times \\ &\times \left[T \frac{np}{n-1} \frac{n-p}{n+1} + n-p \right]^{-\frac{n}{2}} \cdot \left[T \frac{np}{n-1} \frac{n-p}{n+1} \right]^{\frac{p}{2}-1}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где $\Gamma \cdot$ – гамма-функция Эйлера ($0 \leq T < \infty$, $n - p \geq 5$).

Определим математическое ожидание ширины допускового интервала для уровня y_k контролируемого параметра Y , если для каждой из величин $x_i, i = \overline{1, p}$, известны:

а) диапазон изменения A_{xi} , соответствующий условию $Y \in A_y$;

б) среднее квадратическое отклонение $\sigma_i = S_{ii}$, соответствующее условию $Y \in y_k$.

Условия (а) и (б) учитываются при вычислении предела интегрирования T_H (4.14), используемого при определении вероятности ошибки α (уравнение (4.16)), причем с учетом корреляционных связей между контролируемыми величинами $X_1, \dots, X_p$.

Если Δ_y – ширина допускового интервала, зависящая от заданного числа уровней m при фиксированном диапазоне A_y , т.е.

$$\Delta_y = A_y / m, \quad (4.22)$$

а $\bar{\Delta}_y$ – средняя величина отклонения от уровня y_k при неправильной дискриминации этого уровня, то математическое ожидание ширины допускового интервала при доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ равно [98]

$$M \Delta = \Delta_y (1 - \alpha) + \bar{\Delta}_y \alpha. \quad (4.23)$$

Величина $\bar{\Delta}_y$ может быть найдена как среднее арифметическое для $(m-1)$ отклонений от уровня y_k [153], обусловленных ошибками классификации

$$\bar{\Delta}_y = \Delta_y (m-1)^{-1} \sum_{j=2}^m j-1 = \frac{\Delta_y m}{2}. \quad (4.24)$$

Подставляя значения Δ_y и $\bar{\Delta}_y$ из уравнений (4.22) и (4.24) в выражение (4.23) получим

$$M \Delta = \frac{A_y}{m} \left[1 + \alpha \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right], \quad (4.25)$$

где вероятность α определяется интегралом

$$\alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) P^{p-1} n - p \frac{n}{2} \cdot n^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) n-1 \frac{p}{2} n+1 \frac{p}{2}} \times$$

$$\times \int_{T_H}^{\infty} T^{\frac{p}{2}-1} \left[T \frac{np}{n-1} \frac{n-p}{n+1} + n-p \right]^{-\frac{n}{2}} dT . \quad (4.26)$$

Уравнение (4.25) показывает, что величина $M \Delta$ является функционалом переменных:

- предела интегрирования T_H , пропорционального разрешающей способности системы контролируемых величин $X_1, \dots, X_p$ различать уровни $y_1, \dots, y_m$ параметра Y ;
- количества контролируемых величин p ;
- числа воспроизводимых уровней $y_1, \dots, y_m$.

При этом, предел интегрирования T_H определяется априорной неопределенностью, задаваемой, количественно, ковариационной матрицей (4.9), а переменные p и n – задаются планом измерительного эксперимента на этапе градуировки (обучения системы контроля).

Как было отмечено, предел интегрирования зависит от разрешающей способности системы величин $X_1, \dots, X_p$, которая может быть задана в форме [98]

$$R_{\Sigma}^2 = \sum_{i=1}^p A_{xi} / \sigma_i^2 , \quad (4.27)$$

или представлена как функция

$$R_{\Sigma}^2 = 4m^2 T_H . \quad (4.28)$$

Если средняя разрешающая способность входной величины X_i , $i = \overline{1, p}$, равна $\overline{R}^2 = p^{-1} R_{\Sigma}^2$, то предел интегрирования T_H может быть представлен в виде

$$T_H = \frac{d \cdot p}{4m^2} \bar{R}^2, \quad (4.29)$$

где d – постоянный коэффициент ($d \leq 1$), равный единице для случая, когда ковариационная матрица S становится диагональной, что соответствует отсутствию линейной корреляции между входными величинами.

На рис. 4.1 – 4.4 представлены зависимости $M \Delta$ от числа уровней m при различных значениях n и $\bar{R}$ и фиксированном числе входных величин p .

$M \Delta$

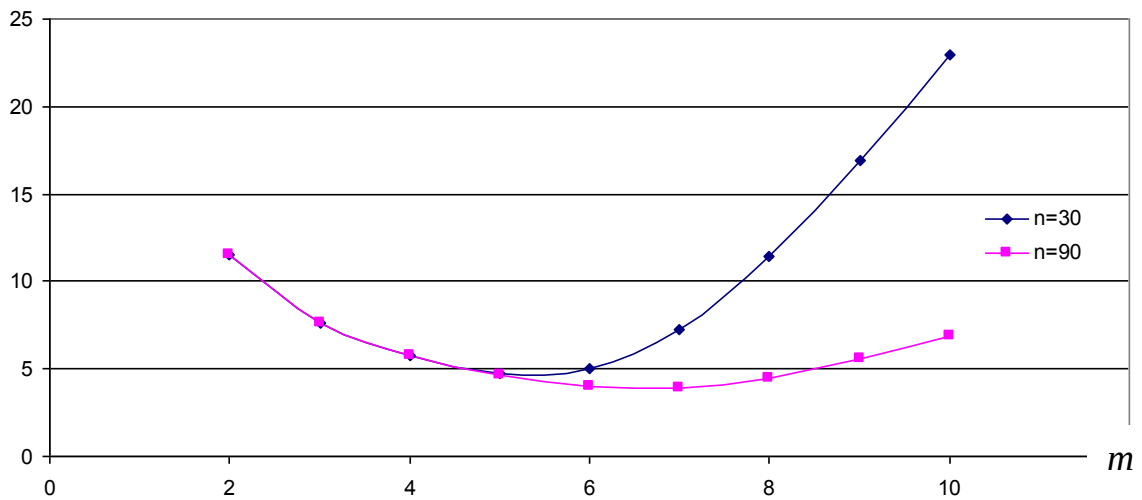


Рис. 4.1. Зависимость $M \Delta$ от m при $\bar{R} = 5$ и $n = 30, n = 90$

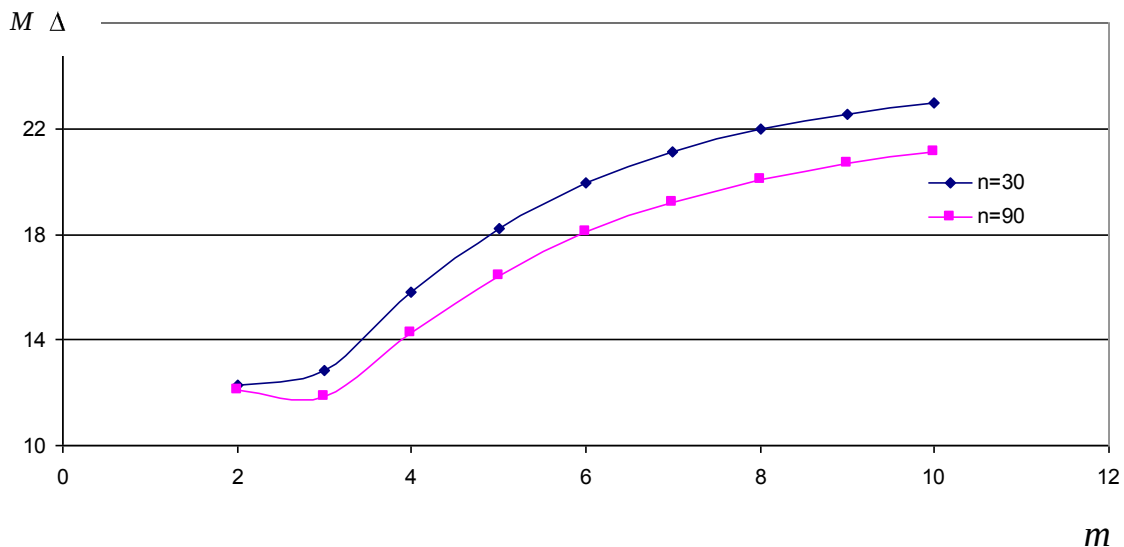


Рис. 4.2. Зависимость $M \Delta$ от m при $\bar{R} = 20$ и $n = 30, n = 90$

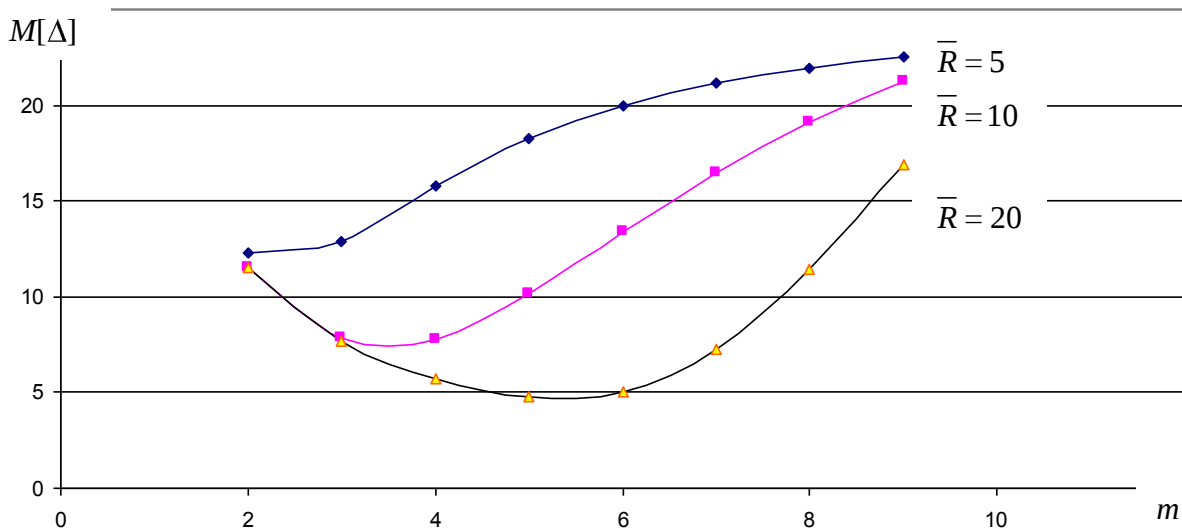


Рис. 4.3. Зависимость $M[\Delta]$ от m при $n = 30$ и $\bar{R} = 5, \bar{R} = 10, \bar{R} = 20$

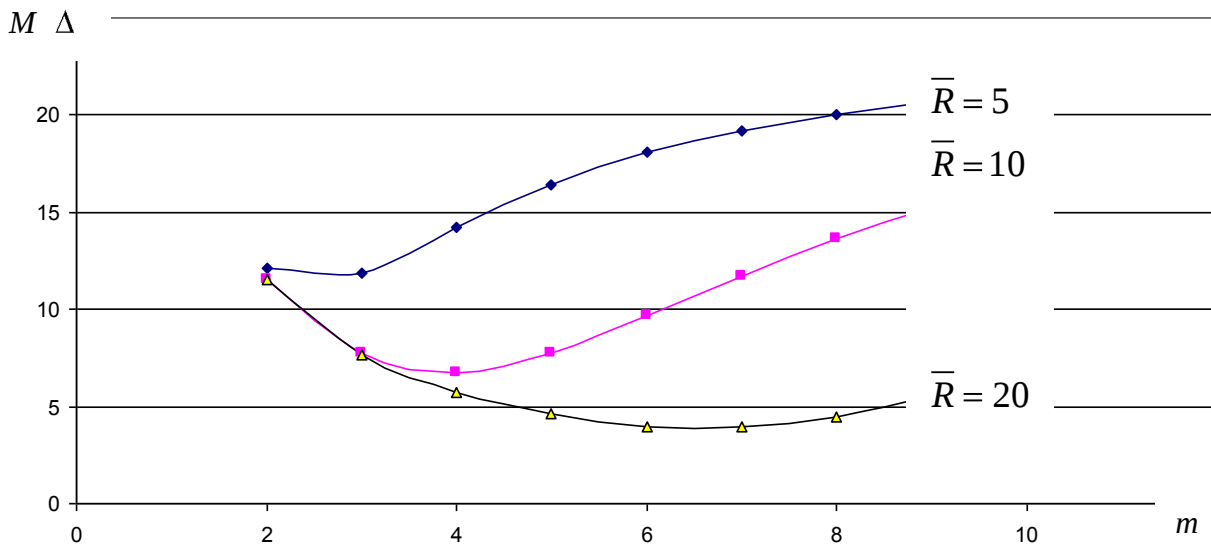


Рис. 4.4. Зависимость $M[\Delta]$ от m при $n = 90$ и $\bar{R} = 5, \bar{R} = 10, \bar{R} = 20$

Из рисунков видно, что для $M[\Delta]$ существует минимум для оптимального m_0 числа уровней контролируемой величины, причем m_0 увеличивается с ростом n и $\bar{R}$.

Для оценки влияния числа входных величин p на вероятность ошибки дискриминации уровней $y_1, \dots, y_m$ проведем дополнительные исследования вероятностной модели (4.13) статистики принятия решений $T^{(k)}$.

Цель таких исследований – оценка влияния числа нестандартных образцов уровней параметра контроля на выбор размерности вектора контролируемых величин, обеспечивающего минимум

вероятности ошибки контроля при условии, что информативность этих величин – различна.

4.3. Анализ ограничений на выбор максимальной размерности вектора контролируемых величин

Статистика $T^{(k)}$ (4.13) вычисляется для всех $k = \overline{1, m}$, а решение γ_j о выборе уровня u_j принимаются, используя критерий максимального правдоподобия (4.5) по минимуму статистики $T^{(j)}$

$$\gamma_{\bar{x}} = \gamma_j, \text{ если } T^{(j)} = \inf T^{(1)}, \dots, T^{(m)}.$$

Известно, что закон распределения минимальной из m случайных величин стремится к показательному закону с параметром Λ при достаточно больших значениях m , даже если плотность распределения вероятностей этих случайных величин не распределены по показательным законам. Этот вывод широко используют для определения закона распределения порядковых статистик [97]. Параметр Λ , в этом случае, определяется как

$$\Lambda = \sum_{k=1}^m M[T^{(k)}]^{-1}. \quad (4.30)$$

Математическое ожидание $M[T^{(k)}]$ всех m статистик $T^{(1)}, \dots, T^{(m)}$ можно найти, если известны плотности распределения вероятности $f(T^{(1)}), \dots, f(T^{(m)})$ этих статистик.

Из анализа статистики (4.13) следует, что ее плотность распределения вероятности определяется центральным F -распределением с p и $(n-p)$ степенями свободы с учетом коэффициента линейного преобразования w , выражение (4.19), при условии $Y \in u_k$.

Тогда остальные $(m-1)$ статистики $T^{(j)}$, $j \neq k$ определяются нецентральными F -распределениями с p и $(n-p)$ степенями свободы и параметрами нецентральности

$$\Lambda_j = 4T_H^{j-1}, \quad j = \overline{2, m}, \quad (4.31)$$

где T_H определяется выражением (4.14).

Тогда математическое ожидание

$$M\left[T^{(k)}\right] = \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n-p-2} \left[1 + \frac{4T_H}{p} \frac{k-1}{2} \right], \quad (4.32)$$

где $k = \overline{1, m}$.

Параметр Λ в уравнении (4.30) с учетом выражения (4.32) примет вид

$$\Lambda = \left(\frac{2p + 4T_H}{p + 4T_H} \right) \frac{n}{n-1} \frac{n-p-2}{n+1}. \quad (4.33)$$

Вероятность ошибочной дискриминации любого из m уровней параметра контроля Y может быть представлена интегралом, с пределами интегрирования T_H, ∞ , от показательного закона с параметром Λ

$$P\left[y_i | y_j\right] = \Lambda \int_{T_H}^{\infty} e^{-\Lambda T^{(k)}} dT^{(k)} = e^{-\Lambda T_H}. \quad (4.34)$$

Вероятность $P\left[y_i | y_j\right]$ тем меньше, чем больше модуль показателя степени

$$\varphi = \Lambda T_H. \quad (4.35)$$

Представив переменную φ как функцию объема выборки n среднего квадрата разрешающей способности $\bar{R}^2$ и числа уровней m , и заменив T_H и Λ их функциональными моделями (4.29) и (4.33), получим

$$\varphi = \frac{n}{4} \frac{n-p-2}{n-1} \frac{p \bar{R}^2}{n+1} \frac{2m^2 + \bar{R}^2}{m^2 + \bar{R}^2}.$$

Дифференцируя два раза функционал φ по p , получим:

1) из равенства $\partial\varphi / \partial p = 0$ условие

$$p = p_0 = \frac{n-2}{2}; \quad (4.36)$$

2) из значения второй производной

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = - \frac{n\bar{R}^2}{2m^2} \frac{2m^2 + \bar{R}^2}{m^2 + \bar{R}^2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n+1},$$

условие

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} < 0; \quad (4.37)$$

3) из выражения (4.36) для φ при p , определяемом уравнением (4.36), условие

$$\varphi \leq \frac{n\bar{R}^2}{8m^2}, \quad (4.38)$$

причем равенство здесь достигается лишь в случае одновременного стремления

$$\begin{cases} n \rightarrow \infty \\ \bar{R}^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Проанализируем условия (4.36)–(4.39).

1. Из (4.36) следует, что число контролируемых величин не может превышать оптимального значения p_0 , соответствующего максимуму (как следует из условия (4.37)) функционала φ , что обеспечивает минимум вероятности ошибки $P[y_i | y_j]$.

2. Из (4.38) следует, что максимум функционала φ пропорционален объему n выборки из нестандартных образцов и квадрату средней разрешающей способности $\bar{R}^2$. В то же время, φ обратно пропорционально квадрату числа уровней параметра Y .

3. Из (4.39) следует, что добавление в систему малоинформативных контролируемых величин снижает $\bar{R}^2$ и вынуждает, для обеспечения заданного уровня функционала φ , увеличивать объемы выборок n .

Проведенный анализ показывает, что процедура минимизации интервала неопределенности, рассмотренная в подразделе 4.2, должна учитывать изменение числа информативных контролируемых величин, особенно при малых n числа нестандартных образцов по уровням параметра Y . Последнее особенно важно, если добавляемая входная величина снижает $\bar{R}^2$, а, следовательно, и величину предела интегрирования T_H (4.29) для вероятности ошибочной дискриминации (4.34).

4.4. Использование моделей параметрической дискриминации для коррекции погрешностей регрессионных преобразований

Непрямые преобразования метрологически неопределенных физически сложных измеряемых величин широко используют для оценки качества как технологического сырья, так и процессов промышленного производства, особенно в химической и пищевой промышленности. На базе функциональных не прямых преобразований построено большинство приборов и средств систем контроля технологических процессов.

Функциональная модель строится на основе множественной регрессии значений параметра Y на значения контролируемых величин $X_1, \dots, X_p$ и является уравнением косвенного измерения [4]

$$y = F(X_1, \dots, X_p | a_1, \dots, a_l)$$

коэффициенты $a_1, \dots, a_l$ которого оценивают в ходе обучения системы измерительного контроля, а само уравнение соответствует модели (1.17).

Пусть y_j – результат оценивания уровня параметра Y при использовании модели дискриминации, описанной в подразделе 4.1 ($j = \overline{1, m}$).

Обозначим через σ_1^2 и σ_2^2 дисперсии результатов, соответственно регрессионного преобразования и дискриминации.

Представим скорректированный результат оценивания уровня параметра Y как среднее арифметическое двух оценок

$$y^* = 0,5 y + y_j . \quad (4.40)$$

Дисперсия такого результата равна

$$\sigma^2 = 0,25 \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2k_{12} ,$$

где k_{12} – ковариация между y и y_j , которая всегда положительна.

Снижение дисперсии результата y^* имеет место лишь в одном случае, когда нормированный коэффициент парной корреляции

$$r = \frac{k_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} , \quad (4.41)$$

меньше единицы, что соответствует условию

$$\sigma^2 < \sigma_1^2 . \quad (4.42)$$

Условие (4.42) эквивалентно условию

$$r < 1. \quad (4.43)$$

Пусть Δ_1 и Δ_2 – абсолютные отклонения результатов y и y_j от действительного уровня y_k .

Если α – это вероятность выхода результата y_j за пределы зоны допуска $\bar{S} = y_k - A_y / 4m, y_k + A_y / 4m$, то закон распределения дискретной случайной величины Δ_2 имеет вид [59]

$$f_{\Delta_2} = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{если } \Delta_2 = \Delta_{12} = 0, \\ \alpha, & \text{если } \Delta_2 = \Delta_{22} = A / m + 1 / 4m . \end{cases} \quad (4.44)$$

Закон распределения случайного отклонения Δ_1 является плотностью распределения непрерывной случайной величины Δ_1 (закон

Гаусса, например), однако и для этой случайной величины соблюдается условие

$$\begin{cases} P[\Delta_1 \in \tilde{S}] = 1 - \alpha \\ P[\Delta_1 \notin \tilde{S}] = \alpha \end{cases} \quad (4.45)$$

Условие (4.45) может быть представлено моделью

$$f_{\Delta_1} = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{если } \Delta_1 = \Delta_{11} = A / 4m; \\ \alpha, & \text{если } \Delta_1 = \Delta_{12} = A(m+1) / 4m. \end{cases} \quad (4.46)$$

Используя выражения (4.44) и (4.46), запишем ковариацию k_{12} в виде

$$k_{12} = \Delta_{11}\Delta_{22}\alpha(1-\alpha) + \Delta_{12}\Delta_{22}\alpha^2, \quad (4.47)$$

откуда получим

$$k_{12} = \left(\frac{A_y}{4m} \right)^2 (m+1)\alpha(m\alpha+1). \quad (4.48)$$

Дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 , с учетом вероятностных моделей (4.44) и (4.46) равны

$$\sigma_1^2 = \left(\frac{A_y}{m} \right)^2 m^2 \alpha(1-\alpha), \quad (4.49)$$

$$\sigma_2^2 = \left(\frac{A_y}{m} \right)^2 (m+1)^2 \alpha(1-\alpha). \quad (4.50)$$

Используя выражения (4.48) – (4.50) рассчитаем нормированный коэффициент парной корреляции (4.41) между результатами измерения u и u_j

$$r = \frac{\alpha + m^{-1}}{1 - \alpha}. \quad (4.51)$$

Обеспечение условия (4.43) повышения точности функционального преобразования, при учете результатов дискриминации, имеет место, если

$$\alpha < 0,5 - 2m^{-1}. \quad (4.52)$$

Условие (4.52) указывает на границы использования модели дискриминации для повышения точности существующих моделей не прямых измерительных преобразований, поскольку сама модель дискриминации имеет смысл, когда вероятность ошибки $\alpha < 0,5$, а достоверность принятия решений $P_d \geq 0,5$.

Для иллюстрации полученных выводов приведем результаты использования параметрической дискриминации (модель алгоритмического преобразования) для снижения погрешности измерения относительной влажности сыпучего сельскохозяйственного сырья (зерно пшеницы) диэлькометрическим влагомером с первичным резонансным электромагнитным преобразователем. В качестве показателей измерительного контроля использовались резонансная частота (X_1) и максимальная добротность (X_2) резонансного контура преобразователя. Поскольку число показателей контроля $p = 2$, то плотность (4.21) статистики $T^{(k)}$, выражение (4.13), являлось показательной плотностью распределения вероятности с параметром

$$\Lambda = \frac{N - 2m}{2N\sqrt{1 + \rho^2}},$$

где N – общее число нестандартных образцов, использованных для градуировки влагомера, а ρ – нормированный коэффициент парной корреляции между выходными сигналами X_1 и X_2 первичного преобразователя. Общее число образцов $N = 24$, а $\rho > 0,8$.

На рис. 4.5 и 4.6 представлены зависимости r и σ_2 от числа уровней m относительной влажности для влагомеров № 1 и № 2. Из рис. 4.5 видно, что для влагомера, имеющего большую погрешность (влагомер № 1), величина коэффициента парной корреляции r , между результатами y и y_j , меньше. Это указывает на большую независимость между этими результатами преобразований, что эквивалентно увеличению количества информации об уровнях контролируемой влажности. Из рис. 4.6 видно, что информационная избыточность, получаемая за счет введения процедуры параметрической дискриминации, имеет ограничение сверху (величина σ_2 имеет минимум при $m = 3$). Это говорит о том, что выбор числа

контролируемых уровней не может быть произвольным, а определяется минимумом возможной неопределенности, количественно выраженной величиной σ_2 .

Результаты проведенных исследований подтверждают принципиальную возможность коррекции погрешностей при многопараметрическом контроле. Они показывают, что эта задача – оптимизационная, учитывающая как неопределенность контролируемых величин (в форме разрешающей способности R_Σ^2 , выражение (4.27)), так и погрешности нестандартных средств измерительного контроля (в форме среднеквадратической погрешности σ_1 , выражение (4.42)). Из рис. 4.7 и 4.8 наглядно видно, что использование модели параметрической дискриминации позволяет уменьшить исходную погрешность σ_1 (1,41 % или 1,18 %) до минимальных значений скорректированной погрешности σ (до 1,168 % или до 1,076 %, соответственно).

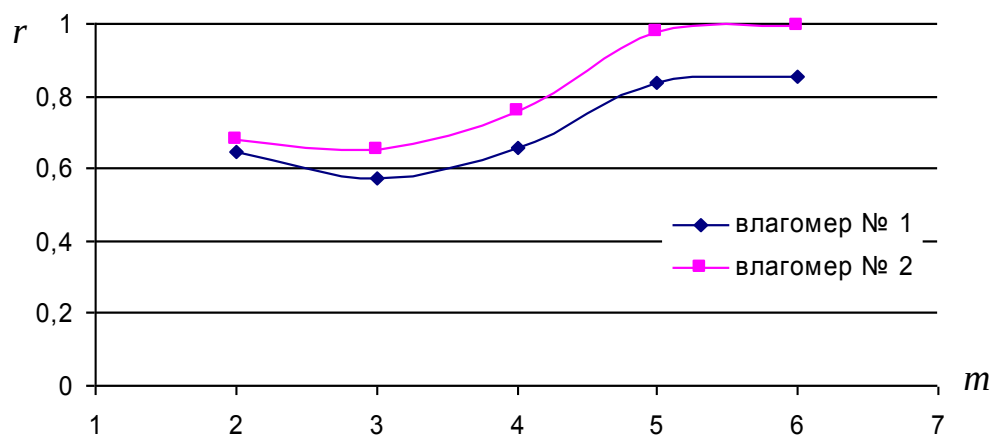


Рис. 4.5. Зависимость коэффициента парной корреляции r от числа уровней m

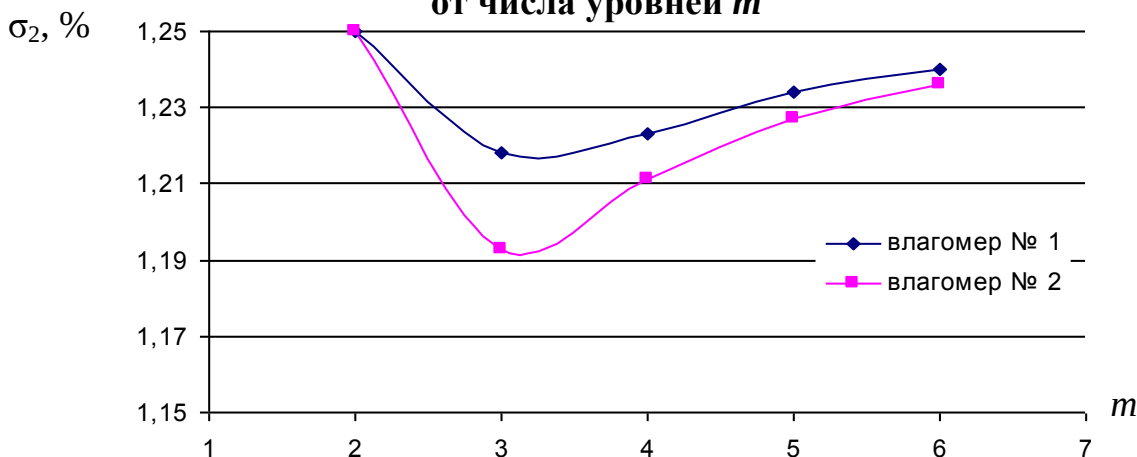


Рис. 4.6. Зависимость среднеквадратической погрешности от m при использовании параметрической дискриминации

На рис. 4.7 и 4.8 представлены зависимости скорректированной погрешности σ от m при σ_1 равной 1,41 % и 1,18 %, соответственно. Из этих рисунков видно, что процедура коррекции является оптимизационной и жёстко привязана к числу контролируемых уровней.

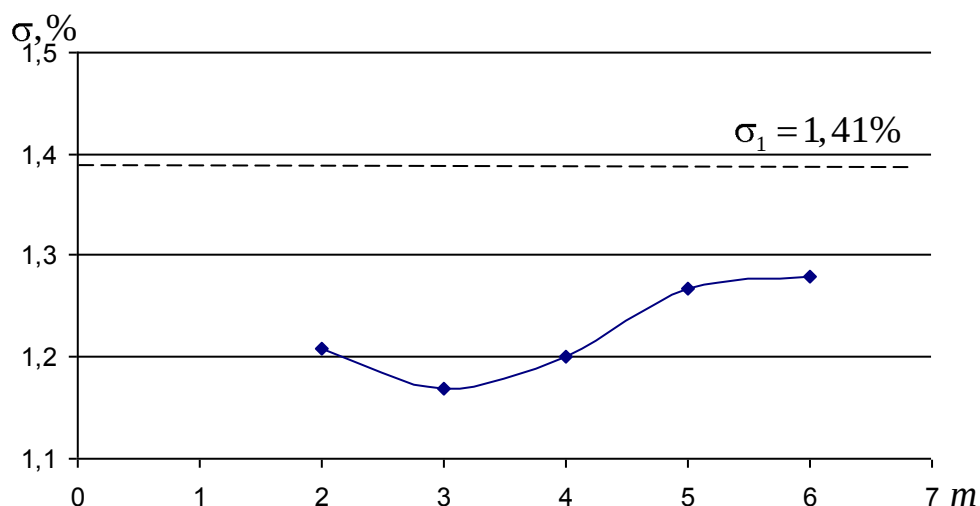


Рис. 4.7. Скорректированная среднеквадратическая погрешность в функции m для влагомера № 1 ($\sigma_1 = 1,41\%$)

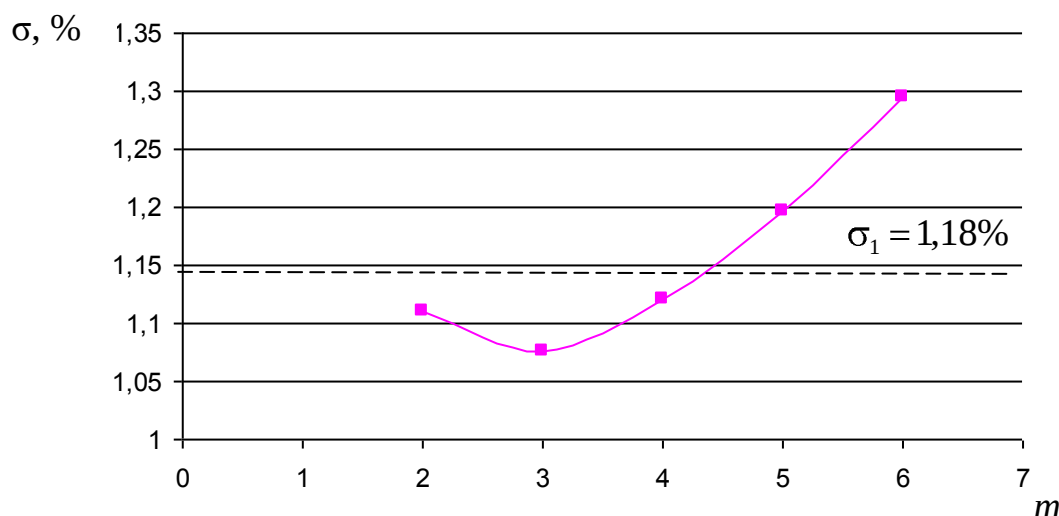


Рис. 4.8. Скорректированная среднеквадратическая погрешность в функции m для влагомера № 2 ($\sigma_1 = 1,18\%$)

Уменьшение скорректированной погрешности σ по отношению к исходной σ_1 эквивалентно получению избыточной информации

$$\Delta I \approx 0,5 \log_2 1 + \sigma_1 / \sigma^2, \quad (4.53)$$

которую можно использовать для повышения достоверности многопараметрического контроля.

ВЫВОДЫ

1. Анализ математических моделей процедур принятия решений в форме параметрической дискриминации показывает, что эти процедуры могут быть использованы для оценки (методом максимального правдоподобия) уровней параметра контроля. Это не противоречит и существующей практике распознавания (дискриминации) уровней измерительных сигналов на фоне шумов, например, при квантовании аналоговых сигналов. Представленная модель (4.5) правила выбора решений о значениях контролируемых уровней позволяет перевести задачу альтернативной дискриминации в дискриминацию многоальтернативную, с использованием алгоритмических процедур непрямого преобразования контролируемых величин;

2. Разработан теоретически обоснованный метод применения операций принятия решений об уровне контролируемого параметра по статистике (4.13) и найдены уравнения для плотности распределения этой статистики (уравнение (4.21)) и вероятности ошибки принятия решений (уравнение (4.26)). Доказано, теоретически, что ширина допускового интервала (4.25) для значений уровней параметра контроля может быть минимизирована при заданных:

а) информационных свойствах используемых контролируемых величин (информативности по отношению к изменениям параметра контроля);

б) количестве этих величин;

в) числе воспроизводимых значений уровней контролируемого параметра на этапе обучения (градуировки) системы контроля;

3. Доказано, теоретически, что максимальное число контролируемых величин системы контроля не может превышать значения, соответствующего минимуму вероятности ошибки дискриминации и получено выражение (4.36) целевой функции оптимизации числа контролируемых величин;

4. Доказана, теоретически, возможность повышения точности не прямых измерений в рамках совместного применения процедур функционального (регрессионного) и алгоритмического преобразований (4.40). Определены условия (4.43) и (4.52) применимости процедур дискриминации для снижения неопределенности результатов оценивания уровней параметра контроля при априорной неопределенности контролируемых величин.

В этом разделе проведен анализ информативных параметров нестационарных контролируемых случайных сигналов, используемых для обнаружения изменений в свойствах сложных динамических объектов контроля [18, 46, 54]. Такие сигналы находят широкое применение в измерительном динамическом контроле технологических процессов, в системах технической диагностики, при оценке технического состояния электроэнергетического оборудования параметров механических систем.

Как отмечено в подразделе 1.1, основным методом повышения достоверности контроля при работе с такими сигналами, является введение временной избыточности. Использование информационной избыточности требует разработки методов получения дополнительной информации, за счет усложнения моделей, адекватно описывающих изменения нестационарности и синтеза на их основе дополнительных независимых информативных параметров. Это связано с совершенствованием информационно-измерительных технологий динамического контроля и требует решения таких задач:

- разработки вероятностно-статистических моделей комплексных информативных параметров, позволяющих интегрировать информацию по разным видам нестационарности;
- разработки метода многоальтернативного тестирования спектрально-нестационарных сигналов, обеспечивающего заданную достоверность контроля количественных, в заданной условной шкале, изменений нестационарности;
- разработки метода получения дополнительной информации по составляющим остаточной дисперсии сигналов, нестационарных по математическому ожиданию.

5.1. Синтез информативных параметров спектрально-нестационарных входных сигналов

Непрерывные (аналоговые) по информативному параметру и времени входные сигналы широко используются как носители инфор-

мации в статистических измерительных системах, в системах динамического контроля и функциональной диагностики [18, 49, 57]. Однако, такой измерительный сигнал при наличии случайных возмущений, представляет собой случайный процесс (модель (1.9), подраздел 1.3, раздел 1). Если случайное возмущение модулируется качественными изменениями свойств объекта измерительного контроля, то информативными параметрами могут быть числовые характеристики случайного сигнала или функции этих характеристик [18, 46, 49].

Однако, использование таких информативных параметров возможно лишь в рамках априори известных типов нестационарности случайных сигналов. Большинство таких типов сводится [89]:

- 1) к нестационарности по среднему значению;
- 2) к нестационарности по спектру (по автокорреляционной функции).

Основная задача, возникающая в ходе контроля изменений свойств динамического объекта, является задачей параметрического тестирования входных случайных сигналов на отсутствие (или наличие) количественных изменений значений тех или иных числовых характеристик.

Общая модель тестирования – следующая. Дана последовательность $x_1, \dots, x_n$ измерений значений сигнала $x(t)$ в моменты времени $t_1, \dots, t_n$. Выдвинуты основная (H_0) и альтернативная (H_1) гипотезы о возможных состояниях (S_0 и S_1) объекта контроля,

$$H_0: x_1, \dots, x_{r-1} \in X \text{ } t / S_0 ,$$

$$H_1: x_r, \dots, x_n \in X \text{ } t / S_1 ,$$

где r – момент времени изменения состояния ($1 < r < n$) [46].

Выбор тестовых статистик, как информативных параметров процесса $x(t)$, зависит от наличия априорной информации о вероятностных свойствах информационных сигналов $X(t/S_0)$ и $X(t/S_1)$. Если рассматривать эти статистики в порядке уменьшения их сложности, то они располагаются в следующем порядке.

1. Статистики отношения правдоподобия [90], имеющие широкое применение, отличающиеся эффективностью, но, к сожалению, большой вычислительной сложностью. К тому же, эти статистики – многопараметрические, что при смещении в оценках

их параметров (в ходе обучения), порождает дополнительное увеличение вероятности ошибок в выборе гипотез H_0 или H_1 .

2. Эвристические двухмодельные статистики [46], которые менее эффективны, чем статистики отношения правдоподобия, но требуют меньших вычислительных затрат. Они могут быть синтезированы специально для каждой задачи, но при этом имеется возможность повышения их эффективности для отдельного обнаружения переходов состояний от S_0 к S_1 и от S_1 к S_0 .

3. Эвристические одномодельные статистики [46] – они не обладают общностью применения, однако очень просты, по сравнению со статистиками двухмодельными. Их недостаток – ограниченность тестирования процесса $x(t)$ в рамках только одной (H_0 или H_1) гипотез.

Наиболее привлекательными, в плане минимума оцениваемых параметров при независимом тестировании гипотез H_0 или H_1 , являются двухмодельные статистики накопленных сумм [46], позволяющие обнаруживать спектральные изменения измерительного сигнала $x(t)$

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\varepsilon_k^2}{\sigma_S^2} - 1 \right), \quad (5.1)$$

где ε_k – центрированный остаток модели (1.4), раз,

$$\varepsilon_l(t) = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n,$$

σ_S^2 – условная дисперсия центрированного процесса $x(t)$, когда

$$\sigma_S^2 = \begin{cases} \sigma_0^2, & \text{если } S \in S_0, \\ \sigma_1^2, & \text{если } S \in S_1. \end{cases}$$

Параметрами модели (5.1) являются, в данном случае, дисперсии σ_0^2 и σ_1^2 , что позволяет обнаруживать изменение мощности измерительного сигнала $x(t)$.

Для обнаружения изменений автокорреляционной функции, из-за смещения спектра процесса $x(t)$, модель (5.1) может быть трансформирована в статистику

$$\tau_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Delta t_i}{\tau_S} - 1 \right), \quad (5.2)$$

где Δt_i – интервал времени между i -м и $(I + 1)$ -м пересечениями нуля центрированным **процессом** $x(t)$, $i = \overline{1, N}$,
 τ_S – условный интервал корреляции [89],
 $\tau_S = \begin{cases} \tau_0, & \text{если } S \in S_0, \\ \tau_1, & \text{если } S \in S_1. \end{cases}$

Общее время наблюдения t_N , при использовании статистики (5.2), должно обеспечивать выполнение условия

$$\begin{aligned} \forall i \left[\sup \Delta t_i > \sup \tau_S \right], \\ t_N = \sum_i \Delta t_i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Исследуем отдельно информативные параметры (статистику T_n и статистику τ_N) измерительного сигнала $x(t)$ с целью выявления условий повышения эффективности измерительного параметрического контроля состояний S_0 и S_1 . Такое повышение эффективности эквивалентно либо увеличению числа отсчетов n , при сохранении их статистической независимости в пределах фиксированного времени наблюдения, либо повышению достоверности контроля в пределах минимального допустимого времени наблюдения сигнала $x(t)$.

Следует отметить, что в отличие от статистики T_n статистика τ_N , разработана впервые и может обеспечить информационную избыточность при контроле спектральных измерений.

5.2. Уменьшение интервала равномерного квантования во времени при ограничениях на длительность наблюдения

Уменьшение интервала равномерного квантования во времени (повышение числа отсчетов) **процесса** $x(t)$ **в** пределах фиксированной длительности наблюдения t_n , при использовании статистики (5.1), возможно, если выполняется условие

$$\forall k \left[\sup t_{k+1} - t_k > \sup \tau_S \right], \quad (5.4)$$

аналогичное условию (5.3), что обеспечивает временную избыточность.

Покажем, как при известной автокорреляционной функции $R(\tau)$ измерительного сигнала $x(t)$, возможно существенное увеличение числа отсчетов при формальном нарушении условия (5.4).

В качестве примера рассмотрим использование статистики T_n для измерительного контроля вибросигнала в задаче технической диагностики дизельного двигателя тепловоза, когда состояние объекта контроля оценивается при ограничениях на длительность наблюдений из-за конечности периодов нестационарности вибросигнала по дисперсии, определяемых переходными процессами в режимах работы двигателя.

Решение о состоянии объекта контроля (дизельного двигателя) сводится к проверке гипотез: H_0 (отсутствие изменений в дисперсии вибросигнала $x(t)$); H_1 (наличие изменений в дисперсии) при заданном уровне значимости α .

Контролируемый вибросигнал представляет собой стационарный по среднему случайный процесс с максимальной частотой $f_m = 1 \text{ кГц}$ и автокорреляционной функцией вида

$$R(\tau) = e^{-\gamma^2 \tau^2} \cos \omega_0 \tau, \quad (5.5)$$

где $\omega_0 = 800\pi \text{ (с}^{-1}\text{)}$,

$$\gamma = 4069,9.$$

Длительность переходных процессов не превышает 0,036 с, что при интервале дискретизации $\Delta t = 0,5 f_m = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ позволяет получить не более $n = 72$ отсчетов (теорема Котельникова)

На рис. 5.1 представлена реализация контролируемого вибросигнала с двумя интервалами T_1 и T_2 нестационарности по дисперсии, соответствующих режиму открывания и закрывания форсунки дизельного двигателя, когда последний находится в нормальном (S_0) состоянии.

Алгоритм контроля должен предусматривать обнаружение изменения состояния S_0 с заданной вероятностью ошибки первого рода α .

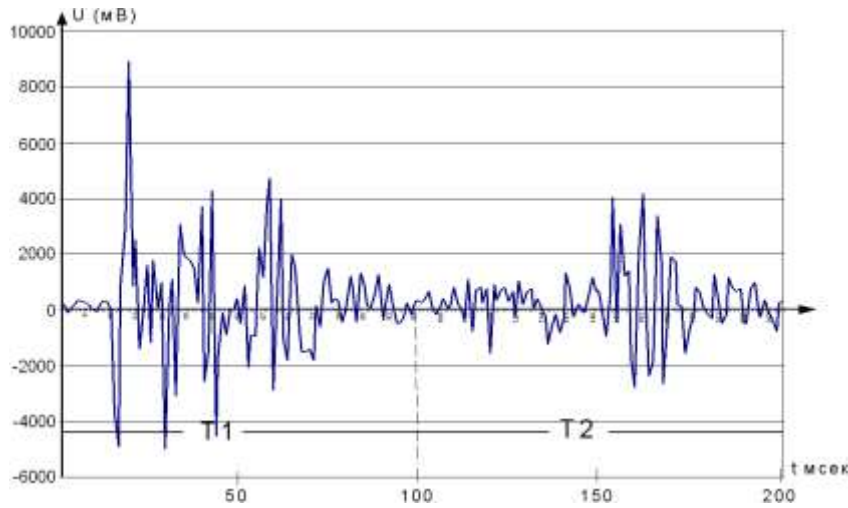


Рис. 5.1. Зависимость выходного напряжения вибропреобразователя от времени наблюдения

При гипотезе H_0 статистика T_n распределена асимптотически нормально с нулевым средним $m_T^{(0)} = 0$ и дисперсией $D_T^{(0)} = 1$.

Если измененному (S_1) состоянию объекта контроля соответствует дисперсия σ_1^2 процесса $x(t)$, то среднее значение и дисперсия статистики T_n принимают вид

$$m_T^{(1)} = \sqrt{\frac{n}{2}} \left[\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^2 - 1 \right], \quad (5.6)$$

$$D_T^{(1)} = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^4. \quad (5.7)$$

При заданном уровне значимости α ошибка контроля второго рода определяется выражением

$$\beta = F \left(\frac{u_{\alpha/2} - m_T^{(1)}}{\sqrt{D_T^{(1)}}} \right) - F \left(\frac{-u_{\alpha/2} - m_T^{(1)}}{\sqrt{D_T^{(1)}}} \right), \quad (5.8)$$

где F — интеграл вероятности,

$u_{\alpha/2}$ — $\alpha/2$ — процентная точка нормированного распределения Гаусса, вычисляемая через интеграл вероятности

$$F(u_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Решение γ_0 или γ_1 о принятии нулевой H_0 или альтернативной H_1 гипотез, соответственно, принимают в соответствии с условием

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0, & \text{если } T_n \in -u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2} \\ \gamma_1, & \text{если } T_n \notin -u_{\alpha/2}, u_{\alpha/2} \end{cases}.$$

Максимальное число независимых отсчетов выбирают исходя из принципа дискретизации Железнова

$$n = \frac{t_n}{\tau_0}, \quad (5.9)$$

где t_n – период наблюдения процесса $x(t)$,

τ_0 – интервал корреляции процесса $x(t)$, вычисляемый по формуле

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{-R''(0)}}.$$

Дифференцируя два раза автокорреляционную функцию (5.5) исследуемого вибросигнала $x(t)$, получим

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2\gamma^2 + \omega_0^2}} = 0,001, \text{ с},$$

что, в соответствии с (5.9) дает максимальное число некоррелированных отсчетов процесса $x(t)$

$$n_x = \frac{0,036}{0,001} = 36.$$

Поскольку увеличение числа отсчетов увеличивает смещение $m_T^{(1)}$ статистики T_n (5.6), что приводит к уменьшению ошибки второго рода β (5.8), имеет смысл более глубоко исследовать вероятностную модель формирования статистики T_n с целью

определения условий для статистически обоснованного увеличения числа отсчетов на ограниченном интервале наблюдения процесса $x(t)$.

Рассмотрим процедуру формирования статистики T_n . Она, согласно (5.1), включает нелинейную операцию возведения в квадрат центрированных значений ε_k с последующим линейным преобразованием полученных значений. Известно, что любые нелинейные преобразования расширяют спектр случайных процессов и, следовательно, уменьшают интервал корреляции τ_0 . Функциональное выражение энергетического спектра процесса $x^2(t)$ можно найти, используя, например, прямые методы вычисления его корреляционной функции, или применяя метод контурных интегралов [89].

Для квадратичного преобразования наиболее удобным является прямое вычисление корреляционной функции $R_{x^2}(\tau)$ преобразованного процесса, когда известна, хотя бы в общем виде, его корреляционная функция $R_x(\tau)$.

Используя кумулянтный анализ случайных процессов можно показать, что для безинерционного квадратичного преобразования

$$y(t) = A \cdot x^2(t),$$

где $A = \text{const}$ – автокорреляционная функция процесса $y(t)$, значение которой $R_{x^2}(\tau) = 2A^2 \cdot R_x^2(\tau)$.

Учитывая, что $A=1$ получим $R_{x^2}(\tau) = 2R_x^2(\tau)$.

Поскольку вторая производная автокорреляционной функции $R_{x^2}(\tau)$ равна $R_{x^2}''(\tau) = -2(2\gamma^2 + \omega_0^2)$, то интервал корреляции для процесса $y(t) = x^2(t)$ определяется выражением

$$\tau_{0(y)} = \frac{2\pi}{\sqrt{2(2\gamma^2 + \omega_0^2)}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{2}}, \quad (5.10)$$

где τ_0 – интервал корреляции исходного процесса $x(t)$.

Таким образом, квадратичное преобразование, используемое при формировании статистики T_n , позволяет увеличить число отсчетов на конечном интервале t_n , сохраняя условие их независимости

$$n_y = \frac{t_n}{\tau_{0(y)}} = n_x \cdot \sqrt{2} \approx 51.$$

Проверка эффективности предложенного метода максимизации числа отсчетов контролируемого вибросигнала, несущего информацию о состоянии дизельного двигателя на этапе его стендовых испытаний, показала значимое снижение ошибки второго рода β , при фиксированном уровне значимости α . В табл. 5.1 представлены результаты испытаний (дисперсии σ_j^2 процесса $x(t)$ и параметры статистики), а также значения оценок ошибок для четырех вариантов неисправности $S_j, j = \overline{1,4}$:

- S_1 – неисправность первой форсунки;
- S_2 – неисправность второй форсунки;
- S_3 – неисправность третьей форсунки;
- S_4 – неисправность четвертой форсунки.

Уровень значимости $\alpha = 0,05$, что определило величину $|u_{\alpha/2}| = 1,96$. Дисперсия $\sigma_0^2 = 14,59$ (мв²).

Таблица 5.1

Результаты оценивания ошибок контроля технического состояния дизельного двигателя

Контролируемые состояния	Дисперсия для состояния σ_j^2, S_j , мв ²	Параметры статистики T_n			Вероятность ошибки β	
		Дисперсия $D_T^{(j)}$	Среднее $m_T^{(j)}$		при $n_x=36$	при $n_y=51$
			при $n_x=36$	при $n_y=51$		
S_0, S_1	4,621	0,1005	-2,899	-3,445	0,02	0
S_0, S_2	5,349	0,1347	-2,687	3,193	0,024	0,001
S_0, S_3	3,782	0,0671	-3,143	-3,73	0	0
S_0, S_4	7,081	0,2352	-2,184	-2,598	0,323	0,095

Принятие решения γ_0 или γ_1 осуществлялось по условию принадлежности или не принадлежности максимального значения статистики T_n области допустимых значений $(-1,96, 1,96)$.

Из табл. 5.1 видно, что вероятность ошибки контроля β меньше при $n_y = 51$, чем при $n_x = 36$.

Из табл. 5.1 видно, что:

- учёт вида преобразования, используемого для формирования статистики обнаружения, (параметра контроля) позволяет максимизировать число отсчетов контролируемого сигнала измерительной информации при сохранении их корреляционной независимости, что повышает достоверность контроля (снижает вероятность ошибки принятия решений);

- рассмотренная вероятностная модель анализа статистики обнаружения изменений состояний динамических систем может быть использована и для сокращения времени наблюдения контролируемых случайных процессов при условии неизменности числа отсчетов.

5.3. Планирование минимального времени наблюдения при контроле спектральных изменений

Из модели (5.2) статистики τ_N следует, что контроль спектральных изменений ведется, фактически, по оценке интервала корреляции [89]

$$\tau^* = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i. \quad (5.11)$$

Для сравнительно низкочастотных процессов, какими являются вибросигналы, автокорреляционная функция $R(\tau)$ характеризуется достаточной шириной, а моменты пересечения нуля образуют, практически, пуассоновский поток случайных событий, в котором интервалы Δt_i являются случайными величинами с

показательным законом распределения $f(\Delta t) = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{\tau}}$ и характеристической функцией

$$\theta_{ju} = 1 + ju\tau^{-1}, \quad (5.12)$$

где u – действительная переменная, а $j = \sqrt{-1}$.

Если время

$$t_N = \sum_{i=1}^N \Delta t_i, \quad (5.13)$$

то при фиксированном числе пересечений N время наблюдения t_N является случайной величиной (как сумма N случайных величин Δt_i , $i = \overline{1, N}$). Характеристическая функция этой случайной величины определяется произведением характеристических функций (5.12) слагаемых Δt_i и имеет вид

$$\theta_{t_N}(ju) = 1 + ju\tau^{-N}. \quad (5.14)$$

Совершая обратное преобразование Фурье найдем выражение для плотности распределения вероятности случайной величины t_N

$$f_{t_N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{t_N}(ju) e^{-jut_N} du = \frac{t_N^{N-1}}{\tau^N \cdot \Gamma(N)} \cdot e^{-\frac{t_N}{\tau}}. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.13) показывает, что f_{t_N} является плотностью распределения вероятности линейно преобразованной случайной величины χ_{2N}^2 , имеющий χ^2 – **квадрат** распределения с $2N$ степенями свободы. Уравнение преобразования имеет вид

$$t_N = \frac{\tau}{2} \cdot \chi_{2N}^2. \quad (5.16)$$

Рассмотрим параметрический тест для проверки основной H_0 и альтернативной H_1 гипотез:

H_0 – спектр процесса $X(t)$ не изменился (состояние объекта контроля – нормальное S_0);

H_1 – спектр изменился (объект контроля перешел в состояние неисправности S_1).

Пусть состояниям S_0 и S_1 соответствуют интервалы корреляции τ_0 и τ_1 , полученные в ходе обучения системы контроля.

В качестве критериальной статистики теста выберем логарифм отношения правдоподобия

$$\bar{\Lambda} = \ln \left\{ \frac{f(t_N / S_0)}{f(t_N / S_1)} \right\}, \quad (5.17)$$

где $f(t_N / S_0)$ и $f(t_N / S_1)$ – условные плотности распределения случайного времени наблюдения t_N , полученные из (5.15). Когда $\tau = \tau_0$ и $\tau = \tau_1$, соответственно.

Решения γ_0 (о принятии гипотезы H_0) или γ_1 (о принятии гипотезы H_1) будем выбирать исходя из условий

$$\begin{cases} \gamma_0 : \bar{\Lambda} \geq 0, \\ \gamma_1 : \bar{\Lambda} < 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Объединяя условия (5.18) получим

$$\begin{matrix} \gamma_0 \\ \bar{\Lambda} \geq 0. \\ \gamma_1 \end{matrix} \quad (5.20)$$

Подставляя в выражение (5.17) уравнения для условных плотностей $f(t_N / S_0)$ и $f(t_N / S_1)$ полученные из (5.15) подстановкой вместо τ , соответственно, параметров τ_0 и τ_1 запишем критериальную статистику в виде

$$t_N - \varepsilon \begin{matrix} \gamma_0 \\ < \\ \gamma_1 \end{matrix} > 0,$$

где t_N – время наблюдения при заданном числе отсчетов N (5.13),

$$\varepsilon = \frac{N \cdot \ln \frac{\tau_0}{\tau_1}}{\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_0} \right)}.$$

Рассмотрим выбор минимального времени наблюдения. Вероятности ошибок первого α и второго β рода, возникающие при принятии решений γ_0 и γ_1 , являются функциями постоянной ε , а, следовательно, и значения N

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\varepsilon} f(t_N / S_0) dT, \quad \beta = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t_N / S_1) dT.$$

Условия выбора решений γ_0 и γ_1 определяются неравенствами:

$$\gamma_0 : t_N \geq \varepsilon, \quad (5.21)$$

$$\gamma_1 : t_N < \varepsilon. \quad (5.22)$$

Пусть состояние объекта контроля $S \in S_0$. Умножим левую и правую части неравенства (5.21) на $2/\tau_0$, получим

$$\frac{2t_N}{\tau_0} \geq \frac{2\varepsilon}{\tau_0}. \quad (5.23)$$

Согласно (5.16), характеристическая функция линейно преобразованной случайной величины

$$\chi_{2N}^2 = \frac{2t_N}{\tau_0}, \quad (5.24)$$

имеет вид

$$\theta_{\pi_{2N}^2}(ju) = (1 + 2ju)^{-N}, \quad (5.25)$$

что указывает на плотность хи-квадрат распределения с $2N$ степенями свободы для левой части неравенства (5.23).

Предполагая теперь, что состояние объекта контроля $S \in S_1$ и умножая левую и правую части неравенства (5.22) на $2/\tau_1$ получим

$$\frac{2t_N}{\tau_1} < \frac{2\varepsilon}{\tau_1}.$$

Левая часть последнего неравенства имеет плотность χ^2 -квadrat распределения с $2N$ степенями свободы, поскольку его характеристическая функция также определяется выражением (5.25).

Если $\chi_{2N,\alpha}^2$ и $\chi_{2N,1-\beta}^2$ – процентные точки χ^2 -квадрат распределения с $2N$ степенями свободы, и если

$$\chi_{2N}^2 = \frac{2t_N}{\tau_1}, \quad (5.26)$$

то разделив правую часть (5.26) на правую часть выражения (5.24) получим

$$\frac{\chi_{2N,1-\beta}^2}{\chi_{2N,\alpha}^2} = \frac{\tau_0}{\tau_1}. \quad (5.27)$$

Из этого выражения следует, что для любого отношения $\frac{\tau_0}{\tau_1} \neq 1$ можно подобрать при заданных вероятностях ошибок α и β такое минимальное число степеней свободы $K = 2N$, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\chi_{2N,1-\beta}^2}{\chi_{2N,\alpha}^2} \leq e^{\left| \ln \left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \right) \right|}. \quad (5.28)$$

В этом случае минимальное число пересечений нуля $N_{\min} = K / 2$ а, следовательно, и минимальное время наблюдения

$$t_{\min} = \tau_0 \cdot N_{\min}, \quad (5.29)$$

обеспечат требуемую достоверность D принятия решений о виде состояния объекта

$$D \geq 1 - 0,5(\alpha + \beta).$$

Правая часть неравенства (5.28) при $\tau_0 > \tau_1$ равна отношению $\xi = \tau_0 / \tau_1$. Это же отношение справедливо для неравенства $\tau_0 < \tau_1$, если увеличение интервала корреляции соответствует $\tau_1 = \xi \cdot \tau_0$.

Для определения минимального числа отсчетов пересечений нуля процессом $x(t)$ удобно использовать аппроксимацию хи-квадрат распределения с K степенями свободы нормированным распределением с нулевым средним и единичной дисперсией, если число отсчетов больше 30 [99].

Случайная величина Z , имеющая такое нормальное распределение связана со случайной величиной χ_K^2 равенством

$$Z = \sqrt{2\chi_K^2} - \sqrt{2K-1}.$$

Тогда процентные точки хи-квадрат распределения (числитель и знаменатель левой части неравенства (5.28)) легко определяются через аргумент z интеграла вероятности

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

и соответственно будут равны

$$\chi_{K,1-\beta}^2 = \frac{z^2}{2} + z\sqrt{2K-1} + K - \frac{1}{2}, \text{ если } \Phi(z) = 1 - \beta, \quad (5.30)$$

$$\chi_{K,1-\alpha}^2 = \frac{z^2}{2} - z\sqrt{2K-1} + K - \frac{1}{2}, \text{ если } \Phi(z) = 1 - \alpha. \quad (5.31)$$

Обозначим количественное изменение интервала корреляции от τ_0 к τ_1 (5.28) через φ

$$\varphi = e^{\left| \ln\left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right) \right|}.$$

Подставляя величины $\chi_{K,1-\beta}^2$ и $\chi_{K,\alpha}^2$ из (5.30) и (5.31) в левую часть неравенства (5.28) и заменяя неравенство (5.28) на равенство, получим

$$\frac{0,5z^2 + z\sqrt{2K-1} + K - 0,5}{0,5z^2 - z\sqrt{2K-1} + K - 0,5} = \varphi, \quad (5.32)$$

где z , для простоты, соответствует условию $\alpha = \beta$. Решая (5.32) относительно K , получим

$$K = \left[\frac{\varphi + 1 \cdot z + \sqrt{z^2 \varphi + 1^2 - z^2 - 1 \cdot \varphi - 1^2}}{2 \cdot \varphi - 1} \right]^2. \quad (5.33)$$

Выражение (5.33) удобно применять при слабых изменениях спектральной плотности, когда φ близко к единице. Тогда большие значения K позволяют точнее оценить минимальное время наблюдения $t_{\min}$ (5.29) для принятия решения о наличии состояний S_0 или S_1 с достоверностью D не ниже значения, определяемого уравнением (5.28). Значение z в уравнении (5.33) является, фактически, α – процентной точкой нормированного нормального распределения.

Рассмотрим практические результаты. Оценка по формуле (5.33) минимального времени наблюдения нестационарного по спектральной плотности случайного процесса была использована в задаче контроля технического состояния дизельного двигателя тепловоза. Сигналом измерительной информации являлся вибросигнал, нестационарный как по дисперсии, так и по нормированной спектральной плотности.

В табл. 5.2 представлены результаты оценивания минимального числа пересечений нуля $N_{\min}$, минимального времени наблюдения $t_{\min}$ для четырех вариантов неисправного состояния при двух значениях достоверности (D) контроля. Среднее значение интервала корреляции для нормального состояния двигателя S_0 соответствовало величине $\tau_0 = 1,03 \cdot 10^{-3}$ с. Контроль вибросигнала производился без учета возмущающих воздействий, вызванных открыванием или закрыванием форсунок (нестационарность по дисперсии во внимание не принималась). Как показали исследования, нестационарность по нормированной спектральной плотности была характерна для всех четырех вариантов нарушения технического состояния двигателя.

Как видно из табл. 5.2, нарушение работоспособности двигателя вызывает смещение спектральной плотности в область низких частот (интервалы корреляции τ_j для состояний S_j , $j = \overline{1,4}$, превышают величину τ_0).

Таблица 5.2

Выбор минимального времени наблюдения входного случайного сигнала

j	Контролируемые состояния	$\tau_0 \cdot 10^{-3}, \text{с}$	φ	$D = 0,9 (z = 1,28)$		$D = 0,975 (z = 1,96)$	
				$N_{\min}$	$t_{\min}, \text{с}$	$N_{\min}$	$t_{\min}, \text{с}$
1	S_0, S_1	1,291	1,276	56	0,058	160	0,165
2	S_0, S_2	1,386	1,370	34	0,035	79	0,082
3	S_0, S_3	1,440	1,423	27	0,038	63	0,065
4	S_0, S_4	1,872	1,850	10	0,011	21	0,022

5.4. Стабилизация дисперсий информативных параметров в диапазоне изменений контролируемых состояний. Синтез комплексного информативного параметра

Статистики T_n и τ_N , определяемые выражениями (5.1) и (5.2), являются информативными параметрами входного сигнала и позволяют осуществлять раздельное тестирование этого случайного сигнала на предмет его изменения по дисперсии и по спектру (смещению, например, его центральной частоты). Однако, совместное использование информативных параметров T_n и τ_N наталкивается на принципиальную трудность, обусловленную отсутствием нормировки этих параметров по дисперсии и по знаку их средних значений.

Как отмечалось в [46] и подразделе 5.3 данного раздела, условные по состояниям S_0 и S_1 плотности распределения T_n и τ_N , как случайных тестовых статистик, являются **хи-квадрат** распределениями, соответственно, с n и $2N$ степенями свободы. Причем, при $S \in S_0$ – это центральные **хи-квадрат** распределения, а при $S \in S_1$ – нецентральные **хи-квадрат** распределения.

Однако, при больших (более 30) n и N эти условные плотности можно заменить нормальными распределениями, параметры которых (среднее и дисперсия) являются функциями отношений

$$\nu = \sigma_1^2 / \sigma_0^2, \quad (5.34)$$

$$\xi = \tau_1 / \tau_0. \quad (5.35)$$

В табл. 5.3 представлены средние значения $m_T^{(j)}, m_\tau^{(j)}$ и дисперсии $D_T^{(j)}, D_\tau^{(j)}$ статистик T_n и τ_N для состояний $S_j, j = \overline{0,1}$.

Из табл. 5.3 видно, что средние $m_T^{(j)}, m_\tau^{(j)}$ могут быть как положительными по знаку (если $\nu > 1, \xi > 1$), так и отрицательными (если $\nu < 1, \xi < 1$). Дисперсии статистик T_n и τ_N равны 1 лишь для случая $S \in S_0$. Для состояния S_1 эти дисперсии являются функциями отношений ν и ξ и принципиально не равны 1.

Таблица 5.3

Числовые характеристики случайных статистик обнаружения

Состояние (S_j)	Статистика T_n		Статистика τ_N	
	$m_T^{(j)}$	$D_T^{(j)}$	$m_\tau^{(j)}$	$D_\tau^{(j)}$
S_0	0	1	0	1
S_1	$\sqrt{n/2} \nu - 1$	ν^2	$\sqrt{N} \xi - 1$	ξ^2

Рассмотрим модели преобразования, которые обеспечивают неизменность (стабилизацию) дисперсий статистик обнаружения при смене состояния. Как показывает табл. 5.3 дисперсии статистик T_n и τ_N могут быть выражены как функции средних значений этих же статистик (через отношения ν и ξ)

$$D_T^{(1)} = 1 + m_T^{(1)} \sqrt{2/n}^2,$$

$$D_\tau^{(1)} = 1 + m_\tau^{(1)} \sqrt{N}^2.$$

Обозначим статистику обнаружения (T_n или τ_N) как $\hat{t}$. Пусть эта статистика имеет среднее значение θ , а ее дисперсия является функцией как θ , так и фиксированного объема выборки, например, n

$$D \hat{t} = D_n \theta .$$

Для устранения зависимости дисперсии $D \hat{t}$ от θ воспользуемся преобразованием

$$u \hat{t} = \ln \hat{t} + c , \quad (5.36)$$

где c – неизвестная постоянная.

Если $u = u \hat{t}$ является новой статистикой обнаружения, полученной преобразованием (5.36), то постоянную c будем определять из равенства дисперсий $D_u^{(0)} = D_u^{(1)} = D_u$.

В общем случае

$$D_u^{(j)} = \left\{ \left(\frac{du \hat{t}}{d\hat{t}} \right)^2 \right\}_{\hat{t}=\theta^{(j)}} \cdot D^{(j)} \hat{t} , \quad (5.37)$$

$$m_u^{(j)} = \ln \theta^{(j)} + c , \quad (5.38)$$

где $\theta^{(j)}$ – среднее для статистики $\hat{t}$, если $S \in S_j$,

$D \hat{t}$ – дисперсия статистики $\hat{t}$, если $S \in S_j$,

$m_u^{(j)}, D_u^{(j)}$ – среднее и дисперсия статистики u , если $S \in S_j$.

В табл. 5.4 представлены выражения для статистик u_T и u_τ , полученных из (5.1) и (5.2) преобразованием (5.36), а также средние значения $m_{u_T}^{(j)}, m_{u_\tau}^{(j)}$ и дисперсии $D_{u_T}^{(j)}, D_{u_\tau}^{(j)}$ этих новых статистик (из уравнений (5.37) и (5.38)) для состояний S_j , $j = \overline{0,1}$, объекта контроля.

Числовые характеристики преобразованных статистик

Состояние S_j	Статистика $u_T = \ln T + c ; c = \sqrt{n/2}$		Статистика $u_\tau = \ln \tau + c ; c = \sqrt{N}$	
	$m_{u_T}^{(j)}$	$D_{u_T}^{(j)}$	$m_{u_\tau}^{(j)}$	$D_{u_\tau}^{(j)}$
S_0	$\ln \sqrt{n/2}$	$2/n$	$\ln \sqrt{N}$	$1/N$
S_1	$\ln v + \ln \sqrt{n/2}$	$2/n$	$\ln \xi + \ln \sqrt{N}$	$1/N$

Из табл. 5.4 видно, что дисперсии статистик u_T и u_τ не меняются при изменении состояний S_0 и S_1 . Необходимо, также, отметить, что преобразование (5.36), стабилизирующее дисперсии статистик u_T и u_τ , нормализует и условные плотности распределения f_{u_T/S_j} и f_{u_τ/S_j} этих статистик.

Рассмотрим основные свойства таких нормализованных статистик. Способность статистик обнаружения значимо реагировать на спектральные изменения процесса $x(t)$ определяется достоверностью P принятия решений о виде состояния объекта контроля при фиксированных отношениях v или ξ

$$P = 1 - \alpha + \beta / 2,$$

где α и β – вероятности ошибок первого и второго рода.

Полная вероятность ошибки $\bar{P} = \alpha + \beta / 2$ определяет степень пересечения условных распределений используемой тестовой статистики, обозначаемой, в общем случае как ζ

$$\bar{P} = 0,5 \int_{\bar{w}} f(\zeta / S_0) d\zeta + 0,5 \int_{\zeta \in w} f(\zeta / S_1) d\zeta,$$

где w – область принятия решений $\gamma_0 : S \in S_0$,

$\bar{w}$ – критическая область, когда принимается решение $\gamma_1 : S \in S_1$.

Условные априорные вероятности состояний S_0 и S_1 в последнем уравнении считаются одинаковыми и равными 0,5.

Если использовать статистики U_T и U_τ для многоальтернативной диагностики, то ширина допусковых интервалов для них соответственно равна

$$\Delta_T = K_p \cdot \sqrt{2/n},$$

$$\Delta\tau = K_p \cdot \sqrt{1/N},$$

где K_p – квантильный коэффициент перехода, зависящий от заданной достоверности [78]. Центры допусковых интервалов зависят от заданных величин V и ξ и определяются как математические ожидания статистик U_T и U_τ для соответствующего состояния S_1 по табл. 5.4.

Исследуем влияние процедуры нормализации на достоверность P принятия решений о виде состояния объекта контроля. Рассмотрим, для примера, Т-статистику (5.1) при одностороннем тестировании процесса $x(t)$ (случай $\nu > 1$). Число отсчетов для этой статистики равно n .

Обозначим число отсчетов процесса $x(t)$, используемых для вычисления нормализованной статистики u_T через N_T . В табл. 5.5 представлены значения достоверности контроля для статистик T_n и u_T , если $N_T = n$, при фиксированном значении вероятности ошибки первого рода $\alpha = 0,1$ и различных величинах отношения ν (5.34). При малых значениях $\nu \leq 1,5$ (при слабом пересечении классифицируемых состояний) более эффективна статистика T_n (достоверность контроля для статистики u_T ниже). Эффективность статистики u_T растет при увеличении ν , например, для $\nu = 2$ (при $N_T = n = 32$ и $N_T = n = 50$).

Таблица 5.5

Достоверности контроля для статистик T_n и u_T

ν	Статистика T_n			Статистика u_T		
	$n = 8$	$n = 32$	$n = 50$	$N_T = 8$	$N_T = 32$	$N_T = 50$
1,1	0,5315	0,555	0,5925	0,528	0,5435	0,556
1,5	0,663	0,792	0,8455	0,6095	0,7665	0,8365
2,0	0,770	0,9065	0,9345	0,722	0,916	0,943

В табл. 5.6 даны значения N_T , обеспечивающие одинаковую достоверность контроля статистик T_n и u_T для $\alpha = 0,1$ и разных значениях n .

Таблица 5.6

Объемы выборок N_T , обеспечивающие одинаковую достоверность контроля для статистик T_n и u_T

ν	Объем выборки N_T		
	$n = 8$	$n = 32$	$n = 50$
1,1	20	51	72
1,5	15	38	54
2,0	12	30	42

Из табл. 5.6 следует, что нормализация статистики T_n приводит к увеличению числа отсчетов N_T при небольших пересечениях состояний S_0 и S_1 ($\nu \leq 1,5$). Однако, при $\nu = 2,0$, объемы выборок $N_T < n$, если $n \geq 32$.

Рассмотрим практическое применение нормализованных статистик. Равенство дисперсий таких статистик для состояний S_0 и S_1 объекта контроля, позволяет использовать линейные решающие правила принятия решений [88], формируя из статистик u_T и u_τ комплексную статистику

$$\Lambda = \frac{m_{u_T}^0 - m_{u_T}^1}{D_{u_T}} \left[u_T - \frac{m_{u_T}^0 + m_{u_T}^1}{2} \right] + \frac{m_{u_\tau}^0 - m_{u_\tau}^1}{D_{u_\tau}} \left[u_\tau - \frac{m_{u_\tau}^0 + m_{u_\tau}^1}{2} \right],$$

или, с учетом числовых характеристик статистик u_T и u_τ из табл. 5.4

$$\Lambda = \frac{n}{2} \ln \nu \left[u_T - \frac{1}{2} \ln \nu - \frac{1}{2} \ln \nu \left(\frac{n}{2} \right) \right] + N \ln \xi \left[u_\tau - \frac{1}{2} \ln \xi - \frac{1}{2} \ln N \right]. \quad (5.39)$$

Решения, $\gamma_0: \Lambda \in w$ или $\gamma_1: \Lambda \in \bar{w}$, принимают, исходя из условия $\gamma_0: \Lambda < 0$; $\gamma_1: \Lambda \geq 0$, с достоверностью

$$P_D = 0,5 + \Phi_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2} \ln \nu^2 + N \ln \xi^2} \right).$$

Величина $\Lambda = 0$ является границей одностороннего допуска при контроле отсутствия нарушений, обеспечивающем, к тому же, равенство вероятностей ошибок первого и второго рода $\alpha = \beta$, что характерно для линейных решающих правил.

В табл. 5.7 представлены значения достоверностей контроля для четырех типов нарушения работоспособности дизельных двигателей тепловозов при использовании статистик T_n и Λ , когда процессом $x(t)$ является вибросигнал.

Нормализованная комплексная статистика Λ , являясь комплексным информативным параметром, повышает достоверность контроля, особенно для трудноразличимых состояний (например, для S_0 и S_4).

Таблица 5.7

Достоверность контроля для статистик T_n и Λ

Контролируемые состояния	Достоверность контроля ($n = N = 30$)	
	статистика T_n	Нормализованная статистика Λ
S_0, S_1	0,974	0,975
S_0, S_2	0,963	0,975
S_0, S_3	0,975	0,975
S_0, S_4	0,814	0,928

Использование нормализующего преобразования (5.36) имеет определенные преимущества для уменьшения априорной неопределенности сигнала $x(t)$ по контролируемым состояниям:

1. Стабилизация статистик, используемых для параметрического контроля динамических объектов, позволяет формировать комплексные информативные параметры. При этом контроль является оптимальным, а вероятности ошибок первого и второго рода минимальны и равны друг другу;

2. Достоверность контроля по нормализованным комплексным статистикам выше, чем по традиционным статистикам обнаружения изменений спектральных свойств динамических сигналов;

3. Процедура стабилизации, хотя и требует повышения числа отсчетов контролируемого процесса, упрощает задачу априорной оценки достоверности контроля, поскольку дисперсии нормализованных статистик одинаковы по классам контролируемых состоя-

ний отсутствуют мультипликативные составляющие неопределенности статистик u_T , u_τ . Повышение достоверности осуществляют за счет временной избыточности, повышая n и N .

5.5. Синтез информативных параметров входных сигналов, нестационарных по математическому ожиданию

Важный класс нестационарных случайных процессов составляют измерительные сигналы с нестационарностью по математическому ожиданию и с практически неизменным спектром (автокорреляционной функцией). Такие сигналы характерны для систем параметрического контроля [18, 46], диагностики [54], когда информацию об объектах несет изменение средних значений входных измерительных сигналов. Прикладная статистика, используемая для решения таких задач, в подавляющем большинстве случаев базируется на параметрическом тестировании среднего значения случайных процессов, игнорируя функциональные модели изменения этого среднего во времени. Такое игнорирование приводит к потере потенциальной информации и снижает достоверность выводов о наличии или отсутствии изменений в контролируемой динамической системе. Более того, такая невосребованная информация могла бы помочь в количественной оценке неслучайных параметрических изменений и в классификации причин, вызвавших то или иное динамическое изменение.

Статистически – это позволило бы формировать более сложные альтернативные гипотезы при традиционном параметрическом тестировании контролируемых случайных процессов.

Классификационные многофакторные методы статистического анализа случайных последовательностей и временных рядов используют линейные модели классификации [101], для которых уменьшение остаточной дисперсии обусловлено расширением модели. Такое расширение позволяет вводить дополнительные параметры в исходную линейную модель, увеличивая число информативных слагаемых дисперсионного разложения, поскольку остаточная энтропия результатов наблюдения уменьшается (из-за снижения остаточной дисперсии).

К сожалению, проверка альтернативных гипотез в рамках дисперсионного синтеза параметрических моделей затруднена и использование таких моделей возможно с учетом ошибки только первого рода и лишь для проверки основной (простой или сложной) гипотезы.

Более привлекательным для классификации состояний динамического объекта являются модели дискриминантного анализа, однако нарушение априорных предположений в виде такой модели резко снижает достоверность принятия решений, хотя в этом случае для оптимизации модели используют вероятности ошибок как первого так и второго рода.

Рассмотрим возможности дисперсионного анализа регрессионных моделей, характеризующих нестационарность по математическому ожиданию для случайных процессов в виде временных рядов, когда для получения информации о состоянии объекта контроля используют тестовые статистики односторонней классификации при двумерных наблюдениях. Такие статистики позволяют сравнивать уровни межгрупповой изменчивости кусочно-линейных моделей для трендов этих рядов и по величине уровня принять решение о виде состояния объекта контроля.

Достаточно общей математической (статистической или вероятностной) моделью информационного сигнала служит представление сигнала уравнением [90]

$$Y_t = f(t) + U_t; \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (5.40)$$

где $f(t)$ – детерминированная (систематическая) последовательность наблюдений

U_t – случайная последовательность,

t – момент времени наблюдения,

N – общее число равноотстоящих друг от друга на оси времени моментов, наблюдений.

Условимся, что влияние времени t сказывается на изменении только систематической составляющей. Таким образом временной ряд (1) является аналогом непрерывного, нестационарного по математическому ожиданию, случайного процесса с дискретным временем наблюдения. Остаточная дисперсия σ^2 последователь-

ности U_t постоянна во времени. Будем рассматривать $f(t)$ как возрастающую или убывающую функцию времени (тренд), так как предметом исследования являются переходные процессы изменения информационных сигналов технологического контроля, вызванные планируемым скачкообразным изменением режима производства, например, запуском технологической линии. Проведем дисперсионный анализ вероятностной модели (5.40). Разобьем общее время наблюдения на K последовательных интервалов с n_j числом отсчетов ($j = \overline{1, K}$) в каждом таком интервале. Тогда общее число отсчетов равно: $N = \sum_{j=1}^k n_j$.

Используем кусочно-линейную аппроксимацию функции $f(t)$, представляя ее на K интервалах наблюдения линейными регрессиями

$$E[Y_j / t] = A_j + B_j \cdot t,$$

где A_j и B_j – оценки параметров α_j и β_j модели наблюдения сигнала Y_t

$$Y_{ji} = \alpha_j + \beta_j \cdot t_{ji} + Z_{ji}, (j = \overline{1, K}, i = \overline{1, n_j}),$$

где Z_{ji} – случайный остаток с дисперсией σ^2 .

Рассмотрим основную линейную гипотезу порядка $2(K - 1)$.

$$H_0: (\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k; \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k).$$

Согласно [84] её можно разбить на три независимых части:

$$H_0^{(1)}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k;$$

$$H_0^{(2)}: \text{групповые средние лежат на прямой};$$

$$H_0^{(3)}: \text{угловой коэффициент этой прямой равен } \beta_c, \text{ причем } \beta_c = \beta_1 = \dots = \beta_k.$$

Для проверки выдвинутых гипотез используем разложение суммы S квадратов отклонений наблюдений Y_{ji} от общего среднего $\bar{Y}$ на пять слагаемых

$$S = S_0 + S_{WG} + S_G + S_W + S_R, \quad (5.41)$$

где

$$S_0 = w_0 B_0^2; S_{WG} = \frac{w_c w_m}{w_0} (B_c - B_m)^2;$$

$$S_G = \sum_j n_j [\bar{Y}_j - \bar{Y} - B_m (\bar{t}_j - \bar{t})]^2; S_W = \sum_j w_j (B_j - B_c)^2;$$

$$S_R = \sum_j \sum_i [\bar{Y}_{ji} - \bar{Y}_j - B_j (t_{ji} - \bar{t})]^2.$$

Постоянные w_0 , w_m и w_c связаны уравнением

$$w_0 = w_m + w_c,$$

где

$$w_0 = \sum_j \sum_i (t_{ji} - \bar{t})^2; w_m = \sum_j n_j (\bar{t}_j - \bar{t})^2; w_c = \sum_j \sum_i (t_{ji} - \bar{t}_j)^2,$$

t_{ji} – время отсчета значения Y_{ji} .

Угловые коэффициенты B_0 , B_m и B_c определяются выражениями

$$B_c = E[B_j],$$

B_0 – угловой коэффициент регрессии, построенной по всему общему временному ряду

$$B_m = w_m^{-1} (w_0 B_0 - w_c B_c).$$

Тестовые статистики для проверки гипотез $H_0, H_0^{(1)}, H_0^{(2)}$ и $H_0^{(3)}$ имеют вид

$$\begin{cases} F_{0\Sigma} = (S_{WG} + S_G + S_W) / [\bar{S}_R \cdot 2(K-1)], & \text{гипотеза } H_0, \\ F_0^{(1)} = S_W / [\bar{S}_R \cdot (K-1)], & \text{гипотеза } H_0^{(1)}, \\ F_0^{(2)} = S_G / [\bar{S}_R \cdot (K-2)], & \text{гипотеза } H_0^{(2)}, \\ F_0^{(3)} = S_{WG} / \bar{S}_R, & \text{гипотеза } H_0^{(3)}, \end{cases} \quad (5.42)$$

где $\bar{S}_R = S_R / (N - 2K)$ – оценка остаточной дисперсии σ^2 .

Сформируем пространство информационных сигналов. Представим, формально, задачу обнаружения технологических наруше-

ний, как задачу классификации, решаемую в рамках дискриминантного анализа.

Введем два класса π_0 и π_1 , характеризующих соответственно и ненормальное (с нарушениями) состояние объекта контроля принятия решений

$$\begin{aligned} \gamma_0, & \text{ если } \pi \in \pi_0, \\ \gamma_1, & \text{ если } \pi \in \pi_1. \end{aligned}$$

В качестве информационных сигналов (признаков) $X_1, \dots, X_q$ используем F -статистики (5.42), учитывая, что независимыми являются лишь статистики $F_0^{(1)}, F_0^{(2)}, F_0^{(3)}$ ($q \leq 3$, случай одного информационного сигнала). Если число информационных сигналов $l > 1$, то $q \leq 3l$.

При выборе информационных признаков следует выбирать признаки с максимальной дискриминирующей способностью (имеющих максимальную вероятность правильной классификации). Кроме этого, следует учитывать, что F -статистики являются случайными величинами с центральным (если $\pi \in \pi_0$) или нецентральным (если $\pi \in \pi_1$) F -распределением. Более того, как для класса π_0 , так и для класса π_1 F -статистики могут иметь нецентральное F -распределение с различными параметрами нецентральности λ_s . Это означает, что переход от одного класса состояний к другому сопровождается изменением как средних значений признаков $X_1, \dots, X_q$ так и их дисперсий. Последнее означает, что вероятность ошибок первого (α) и второго (β) рода неодинаковы. Пусть признак X_s , $s = \overline{1, q}$, характеризуется по классам π_0 и π_1 средними значениями $\mu_s^{(0)}$ и $\mu_s^{(1)}$ и дисперсиями $D_s^{(0)}$ и $D_s^{(1)}$. В этом случае, для условных по классам π_0 и π_1 нецентральных F -распределений соотношение между вероятностями ошибок α и β определяются неравенствами:

$$\alpha \gg \beta, \text{ если } \mu_s^{(0)} < \mu_s^{(1)}, \quad (5.43)$$

$$\alpha \ll \beta, \text{ если } \mu_s^{(0)} > \mu_s^{(1)}. \quad (5.44)$$

Условия (5.43) и (5.44) указывают на необходимость использования для классификации четного числа признаков, половина из которых удовлетворяет, например, условию (5.43), а вторая половина – условию (5.44). В этом случае обеспечивается условие $\alpha \approx \beta$, что соответствует увеличению мощности правила классификации.

Для выбора решений γ_0 или γ_1 удобнее всего воспользоваться отношением максимального правдоподобия

$$\Omega = \frac{\prod_{s=1}^q f(X_s / \pi_0)}{\prod_{s=1}^q f(X_s / \pi_1)}, \quad (5.45)$$

где $f(X_s / \pi_r)$ – условная плотность распределения вероятностей признака X_s при $\pi \in \pi_r$, $r = \overline{0,1}$.

Если $f(X_s / \pi_r)$ является законом Гаусса, то есть $X_s \sim N(\mu_s^{(r)}, D_s^{(0)})$, то отношение (5.45) превращается в квадратичную дискриминантную функцию [101]. Исследование влияния нарушения априорных предположений о нормальности плотностей $f(X_s / \pi_r)$, $s = \overline{1,q}$, показало, что это влияние тем меньше:

- а) чем сильнее пересекаются классы π_0 и π_1 ;
- б) чем больше число информационных признаков;
- в) чем больше параметры нецентральности λ_s условных F -распределений тестовых статистик.

Численный расчет коэффициентов асимметрии и эксцесса по моментам нецентрального F -распределения показал, что даже для одного признака эти коэффициенты меньше 0,5 когда параметры нецентральности $\lambda_s > 20$. Сама дискриминантная функция имеет вид

$$g(X) = (X - \mu^{(1)})^T D^{(1)} (X - \mu^{(1)}) - \\ - (X - \mu^{(0)})^T D^{(0)} (X - \mu^{(0)}) + \ln \frac{D^{(1)}}{D^{(0)}}, \quad (5.46)$$

где $\mu^{(1)}$, $\mu^{(0)}$ – векторы средних по классам π_0 и π_1 ,

$D^{(1)}, D^{(0)}$ – дисперсионные матрицы,
 $(X - \mu^{(1)})^T, (X - \mu^{(0)})^T$ – транспонированные векторы.

Дисперсионные матрицы являются диагональными, поскольку информационные признаки независимы как функции независимых членов дисперсионного разложения (5.41). Сама дискриминантная функция получена из (5.45) логарифмическим преобразованием $g(X) = \ln \Omega$.

Рассмотрим практическое использование тестовых статистик (5.42). Информационная значимость этих статистик наглядно проявляется на примере обнаружения технологических нарушений при измерительном контроле тепловых и электрических режимов маслоэкстракционных установок, используемых для получения пищевых растительных масел. В табл. 5.8 представлены статистики $F_0^{(1)}, F_0^{(2)}, F_0^{(3)}$ для трех сигналов измерительной информации (температуры T_1 и T_2 двух камер нагрева и тока I двигателя установки), полученных для состояний π_0 (нормальная влажность сырья) и π_1 (пониженная влажность сырья).

Таблица 5.8

Значения тестовых статистик для состояний π_0 и π_1

Состояние объекта контроля	Температура T_1			Температура T_2			Ток I		
	$F_0^{(1)}$	$F_0^{(2)}$	$F_0^{(3)}$	$F_0^{(1)}$	$F_0^{(2)}$	$F_0^{(3)}$	$F_0^{(1)}$	$F_0^{(2)}$	$F_0^{(3)}$
π_0	4,83	48,64	18,48	15,87	597,92	68,91	0,353	0,86	1,26
π_1	13,99	130,67	30,03	42,91	311,86	34,86	0,276	6,48	1,04

Для расчета условных средних $\mu_s^{(r)}$ и дисперсий $D_s^{(r)}$ квадратичной дискриминантной функции (5.46), каждая из статистик (5.42) должна рассматриваться как случайная величина с m_{1s} и m_{2s} степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda_s^{(r)}$.

Тогда $\mu_s^{(r)}, D_s^{(r)}$ и $\lambda_s^{(r)}$ будут связаны соотношениями

$$\mu_s^{(r)} = \frac{m_2}{m_2 - 2} \left[1 + \frac{\lambda_s^{(r)}}{m_1} \right],$$

$$D_s^{(r)} = \frac{2m_2^2}{(m_2 - 2)(m_2 - 4)} \left[\frac{(1 + 2\lambda_s^{(r)})}{m_1} + \frac{(1 + \lambda_s^{(r)})^2}{(m_2 - 2)} \right].$$

Эффективность использования четного числа тестовых статистик для обнаружения технологических нарушений можно проиллюстрировать на примере двух информационных сигналов:

X_1 – статистика $F_0^{(3)}$ для температуры T_1 ;

X_2 – статистика $F_0^{(3)}$ для температуры T_2 .

В табл. 5.9 представлены результаты расчета вероятностей ошибок α и β , а так же достоверности P контроля технологических нарушений для одномерного ($q = 1$) и двумерного ($q = 2$) вариантов дискриминантной функции (5.46).

Из табл. 5.9 следует, что увеличение числа тестовых статистик не только уравнивает вероятности ошибок α и β , но и повышает достоверность контроля.

Таблица 5.9

**Значения вероятностей ошибок и достоверности
технологического контроля**

Используемые признаки	q	α	β	P
X_1	1	0,03	0,75	0,61
X_2	1	0,74	0,02	0,62
X_1 и X_2	2	0,20	0,20	0,80

На рис. 5.2-5.4 представлены зависимости температур T_1 , T_2 и тока I от времени наблюдения для двух состояний маслоэкстракционной установки:

а) без нарушений технологического режима (состояние π_0) – сплошная линия;

б) с нарушением (состояние π_1) – пунктирная линия.

Как видно из рис. 5.2 – 5.4, используемые для контроля стохастические сигналы T_1 , T_2 , I нестационарны по среднему значению и реально являются переходными процессами, которые достаточно трудно поддаются контролю и последующему анализу с помощью традиционных методов статистической обработки [46, 175].

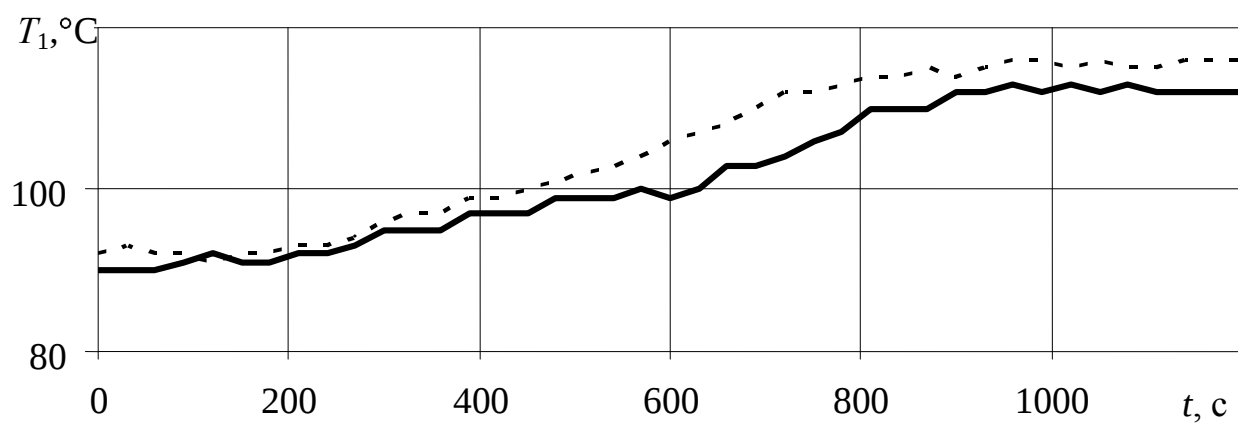


Рис. 5.2. Зависимость температуры T_1 от времени t

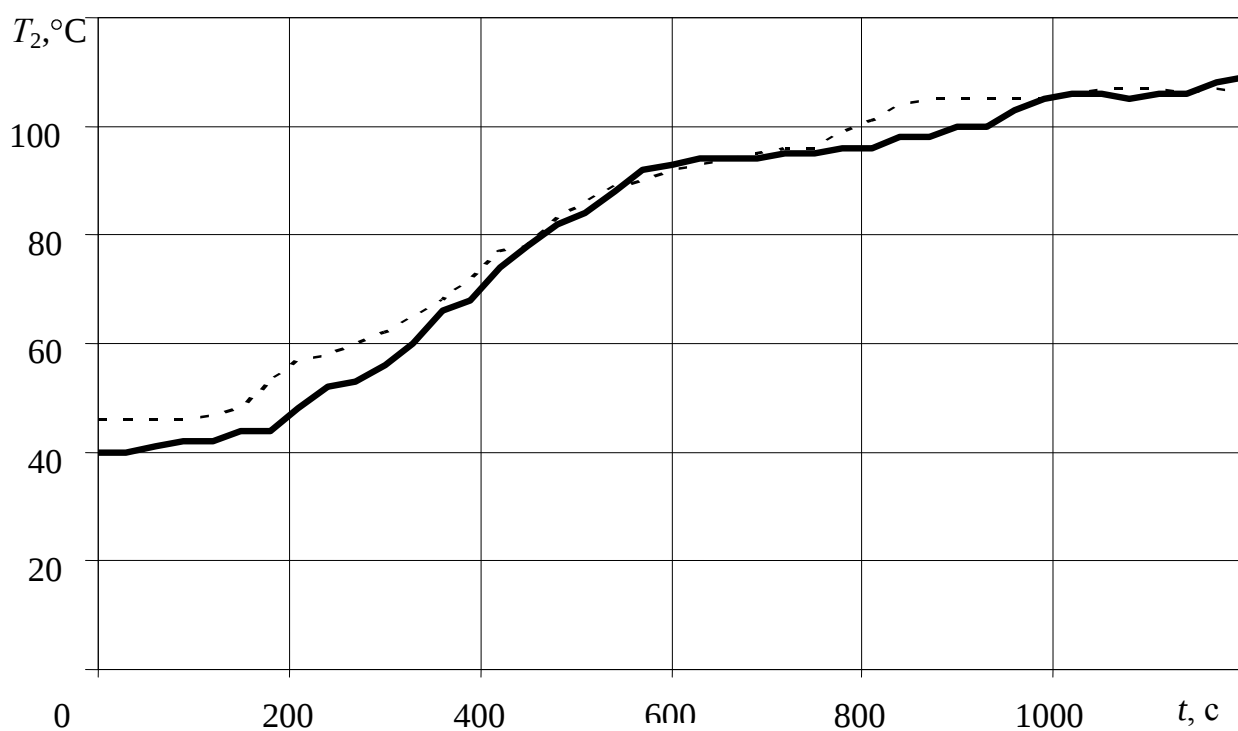


Рис. 5.3. Зависимость температуры T_2 от времени

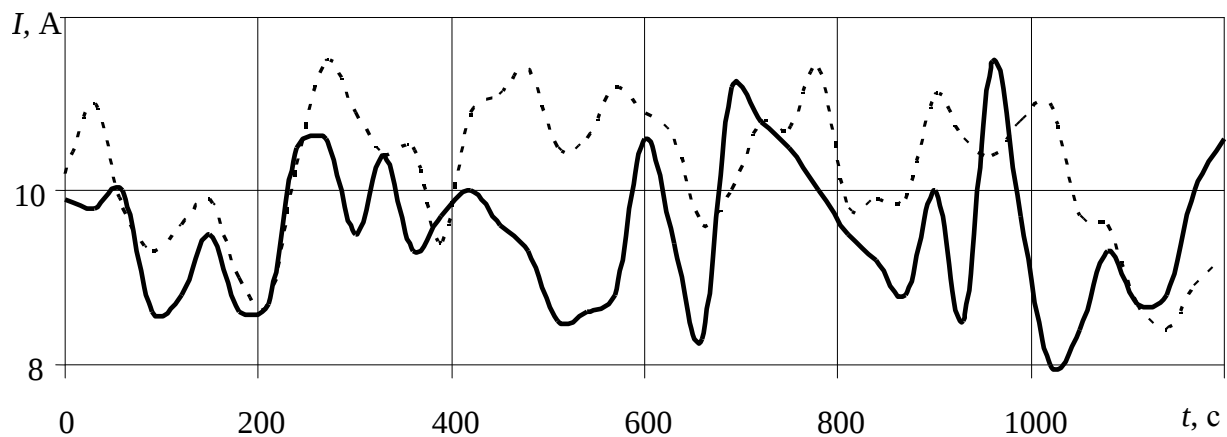


Рис. 5.4. Зависимость тока двигателя I от времени t

ВЫВОДЫ

1. Анализ вероятностных свойств статистики накопленных сумм T_n позволяет утверждать, что ее использование в качестве информативного параметра спектрально-нестационарных входных сигналов не теряет своей эффективности при уменьшении интервала дискретизации (интервала равномерного квантования) на конечных периодах наблюдения, что позволяет повысить число отсчетов входного сигнала, сохраняя условие их независимости. Доказано, что интервал корреляции (5.10) для квадратично преобразованного нестационарного по дисперсии входного сигнала в $\sqrt{2}$ раза меньше, чем интервал корреляции для сигнала, не преобразованного, в рамках статистики T_n . Применение статистики T_n в качестве информативного параметра при измерительном контроле случайных изменений мощности измерительных сигналов позволяет, формально, сократить в $\sqrt{2}$ раза время наблюдения таких сигналов без потерь информации о наблюдаемых изменениях объекта контроля.

2. Разработан метод оценки минимально допустимого времени наблюдения спектрально-нестационарных стохастических сигналов при контроле на базе статистики τ_N . Получены уравнения (5.28) – (5.33) для расчета минимального времени наблюдения при задаваемых заранее вероятностях ошибок первого и второго рода и τ_N .

3. Разработан метод нормализующих преобразований информативных параметров и получено уравнение (5.36), которое может быть использовано для стабилизации дисперсий статистик T_n и τ_N и нормализации их законов распределения, что дает возможность, как показывает табл. 5.4, провести нормировку этих статистик. Последнее позволяет объединить статистики T_n и τ_N в рамках комплексного информативного параметра Λ , уравнение (5.39).

5. Разработан метод синтеза дополнительных независимых информативных параметров при контроле стохастических сигналов, нестационарных по среднему значению. Установлено, что такими параметрами являются тестовые F -статистики (5.42), полученные при разложении дисперсии дискретизированных сигналов, когда модель нестационарности представлена случайной периодической последовательностью линейных регрессий.

**6.1. Анализ эффектов проявления
неопределенности в моделях непрямого
преобразования контролируемых величин**

Состояние сложных физических объектов технологического контроля или функциональной диагностики стремятся, в первую очередь, оценить количественно с помощью системы нормативных показателей [1, 2, 94]. Первое место в этой системе занимают показатели функционального назначения. Наличие значительного количества единичных показателей не отражает всех, или хотя бы базовых, свойств объектов, что неизбежно приводит к использованию комплексных показателей, в отношении которых методы прямого измерения практически отсутствуют.

Та же проблема существует и в отношении комплексных показателей, характеризующих качество собственно процессов производства промышленной продукции.

Безотносительно к конкретному виду контролируемого параметра представим оценку его уровня математической моделью

$$y^* = F \left[\bar{X} / \bar{a} \right] \sqrt{2}, \quad (6.1)$$

где $\bar{X} = (X_1, \dots, X_n)$ – вектор контролируемых величин,

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – вектор параметров модели преобразования результатов измерения $(x_1, \dots, x_n)$ в количественное значение величины Y , имеющей фиксированное K число уровней.

Уравнение (6.1) может быть представлено в виде двух, принципиально различных моделей:

1. Модели функционального преобразования;
2. Модели алгоритмического преобразования.

Первая модель соответствует уравнению непрямого измерения [4, 78, 79] и является количественной моделью множественной

регрессии [95 – 97]. Результат измерения, в этом случае, представляет собой непрерывную случайную величину.

Вторая модель основана на тестировании результатов измерений относительно их принадлежности одному из уровней величины Y [15, 18, 98, 99] и относится к классификационным моделям дискриминантного анализа [100, 101]. Результат измерения для этой модели является дискретной случайной величиной, число возможных значений которой равно числу уровней контролируемого параметра Y .

6.1.1. Модели функционального преобразования

Такая модель в аналитической форме связывает результаты прямых измерений значений конечного числа измеряемых аргументов [78] (контролируемых величин $X_1, \dots, X_n$) с уровнем параметра Y . Такая модель требует выполнения условий [4, 78]:

1. Априорного знания вида функции (6.1) с точностью до значений ее постоянных коэффициентов.
2. Априорного знания стохастической взаимосвязи измеряемых аргументов.

Выполнение первого условия способствует уменьшению систематической составляющей неопределенности измерения, а выполнение второго условия – снижению случайной составляющей неопределенности. Сама функция (в линейной или нелинейной форме) синтезируется в виде множественной регрессии, на основе статистического анализа рядов результатов наблюдений измеряемых аргументов [80].

Рассмотрим общую модель функционального преобразования, линейного, относительно своих постоянных коэффициентов:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i^r. \quad (6.2)$$

Поскольку коэффициенты $\{a_i\}^{n+1}$ оцениваются методом наименьших квадратов [80, 96], коэффициенты $a_0, \dots, a_n$ являются случайными величинами $a_1^*, \dots, a_n^*$, как точечные оценки априорно неизвестных коэффициентов.

При дискретной неоднородности [69] аргументов $x_1, \dots, x_n$ оценки постоянных коэффициентов становятся смещенными [78, 102], что при стохастической связи между $\{a_i\}^{n+1}$ и $\{x_i\}^n$ вызывает систематическое смещение математических ожиданий оценок значений комплексного показателя Y во всем диапазоне его изменения [97], поскольку для любой пары $a_i^* x_i^r$ имеем

$$M[a_i^* x_i^r] = M[a_i^*] \cdot M[x_i^r] + K_{ax},$$

где K_{ax} – ковариация между a_i и x_i^r .

Это смещение увеличивается дополнительно при неправильном выборе вида функциональной модели преобразования (6.1) и вызвано двумя причинами [97]:

а) увеличением дисперсии линейной функции (1.24) случайно стохастически связанных величин a_0^*, a_i^* и $x_i^r, i = \overline{1, n}$;

б) увеличением дисперсии парных произведений $(a_i^* x_i^r)$, так как каждая из центрированных случайных величин a_i^* имеет параметр нецентральности [97] в виде систематического смещения $(a_i^* - a_i)$.

Таким образом, неопределенность модели (1.17) количественно выражается как в форме дополнительного систематического смещения математического ожидания оценки y , так и в форме дополнительного увеличения дисперсии этой оценки. Естественно, причина неопределенности – ограниченность рядов результатов наблюдений измеряемых входных величин $X_1, \dots, X_n$ на этапе обучения согласно синтезу модели (1.17).

6.1.2. Модель алгоритмического преобразования

Такая модель может быть использована, если уровни $\{y_j\}^K$ величины Y – фиксированы, а их число – конечно [85, 98]. Модель дискриминации предполагает, что множество $\{y_j\}^K$ представляет полную группу попарно несовместных случайных событий

$\{Y \in y_j\}^K$ с известным априорно распределением вероятностей этих событий [85, 98].

Кроме того, задан набор решений $\{\gamma_j\}^K$, $j = \overline{1, K}$ и правило выбора $\gamma(\overline{X})$ этих решений, причем $\gamma_j: Y \in y_j$, а $\overline{X}$ – вектор контролируемых величин. Задан, также, критерий качества правила выбора решения – математическое ожидание функции потерь (например, в виде среднего риска [88] или вероятности ошибки принятия решений).

Целевой функцией выбора решения может служить и достоверность принятия решений, количественно зависящая от функции правдоподобия выборки $L_j(x_i, \dots, x_n / y_j)$ [98]. Для параметрических моделей принятия решений должны быть, также, известны условные многомерные плотности распределения $f(\overline{X} / y_j)$ вектора $\overline{X}$.

Ошибки принятия решений обусловлены неопределенностью оценок коэффициентов $\{b_s\}^m$ целевой функции выбора решений, полученных на этапе обучения

$$g(X / Y) = F(X / Y, \{b_s^*\}), \quad (6.3)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$ – выборка значений оставляющих вектора $\overline{X}$.

Кроме этого, на величину ошибок влияет неопределенность результатов измерений, так как вектор $\overline{X}$ является n -мерной случайной величиной.

При параметрической дискриминации вид функции (1.18) зависит от априорных предположений [82, 101]:

- а) о виде многомерной условной плотности $f(\overline{X} / Y)$;
- б) о количестве уровней K .

В общем случае, в этой функции содержатся как произведения $\{b_i^* x_i\}$, так и произведения $\{b_i^* \cdot b_j^*\}$, $i \neq j$.

Как и в модели функционального преобразования (1.17) неопределенность выражается в смещении оценок $\{b_s^*\}$ коэффициентов $\{b_s\}$ и в повышенной их дисперсии при малых N .

Это вызывает увеличение систематических и случайных отклонений функции (1.18), повышая вероятность ошибок в выборе решений $\gamma_1, \dots, \gamma_k$.

Снизить влияние этой неопределенности при дискретных неоднородностях можно лишь уменьшая число уровней K , что приводит к снижению числа коэффициентов $\{b_s\}$. Кроме этого, увеличиваются объемы выборок по оставшимся уровням $\{y_j\}^K$, что уменьшает дисперсию коэффициентов $\{b_s\}$. Доказано, также, что на снижение ошибок принятия решений при ограниченном объеме общей выборки N влияет и статистически обоснованный выбор оптимального числа n_0 контролируемых величин [103, 104].

В любом случае, снижение влияния неопределенности выбора решений об уровнях $\{y_j\}^K$ осуществляется в рамках оптимизации числа контролируемых величин и числа уровней параметра контроля при заданной, нормативно, достоверности контроля.

6.2. Оценка информативности тестовых статистик моделей дисперсионного анализа

Рассмотрим эксперимент, приведенный в разделе 2.1. Используем массив результатов $\{x_{tij}\}$ измерений, полученный в ходе этого эксперимента и модель (2.1). Как уже отмечалось, случайными в этой модели являются отклонения U_t , W_{ti} и Z_{tij} . Отклонение Y_i , обусловленное изменениями уровней параметра контроля – неслучайно. Математическое ожидание для среднего квадрата отклонения величины Y_i (уравнение (2.6)) изменится и запишется в виде

$$M\left[\bar{S}_Y\right] = \sigma^2 + \frac{1}{c-1} nr \sum_i Y_i^2. \quad (6.4)$$

Модель (2.1) по отклонению Y_i может считаться параметрической, особенно если слабо взаимодействие между Y и U , что постулировано при использовании этой модели в подразделе 2.1.

Более того, модель (2.1) можно представить без слагаемого W_{ti}

$$x_{tij} = \xi + U_t + Y_i + e_{tij}, \quad (6.5)$$

включив эффекты взаимодействия в остаточное отклонение e_{tij} , для которого $M[e_{tij}^2] = \sigma_e^2$, причем $\sigma_e^2 > \sigma^2$. Средний квадрат остатка имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{S}_e = (rcn - r - c - 1)^{-1} & \left[n \sum_t \sum_i (\bar{X}_{ti} - \bar{X}_t - \bar{X}_i + \bar{X})^2 + \right. \\ & \left. + \sum_t \sum_i \sum_j (X_{tij} - \bar{X}_{ti})^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Средний квадрат отклонений между столбцами равен

$$\bar{S}_Y = (c - 1)^{-1} nr \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2. \quad (6.7)$$

Тестовая статистика, отражающая влияние изменения уровней параметра Y на величину X имеет вид

$$F_Y = \bar{S}_Y / \bar{S}_e. \quad (6.8)$$

Статистика F_Y имеет плотность центрального F -распределения с m_1 и m_2 степенями свободы лишь в случае полного отсутствия влияния Y на X (справедлива гипотеза $H_0^{(Y)} : Y_1 = Y_2 = \dots = Y_c = 0$), причем

$$\begin{cases} m_1 = c - 1, \\ m_2 = rcn - r - c + 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

Модель (2.49) хотя и менее чувствительна к влиянию эффектов факторного влияния Y на X чем модель (2.1), однако ее чувствительность все же выше, чем у однофакторной параметрической модели [84].

Если гипотеза $H_0^{(Y)}$ не выполняется, то статистика (6.8) имеет плотность нецентрального F -распределения с m_1 , m_2 степенями свободы и параметром нецентральности [114], оценкой которого может служить выражение

$$\lambda^* = \sigma_e^{-2} nr \sum_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2. \quad (6.10)$$

Известно [85], что среднее значение случайной величины с нецентральной $F_{m_1, m_2, \lambda}$ – распределением равно

$$\chi_1 = \frac{m_2}{m_2 - 2} \left(1 + \frac{\lambda}{m_1} \right). \quad (6.11)$$

С учетом (6.9) имеем

$$\chi_1 = \left(\frac{rcn - r - c + 1}{rcn - r - c - 1} \right) + \frac{(rcn - r - c + 1)n}{(c - 1)(rcn - r - c - 1)} \sum_{i=1}^c \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{X}}{\sigma_{\bar{X}_i}} \right)^2, \quad (6.12)$$

где $\sigma_{\bar{X}_i} = \sigma_e / \sqrt{r}$.

Обозначим сумму квадратов для второго слагаемого как δ^2 и перепишем выражение (6.12)

$$\chi_1 = A + B\delta^2, \quad (6.13)$$

где A, B – постоянные величины.

Проанализируем выражение (2.57). При отсутствии влияния параметра Y на контролируемую величину X имеем $\delta^2 = 0$. Тогда

$$\chi_1 = \chi_1^{(0)} = A. \quad (6.14)$$

Если влияние Y на X имеет место, тогда $\delta^2 \neq 0$ и

$$\chi_1 = \chi_1^{(1)} = A + B\delta^2. \quad (6.15)$$

Поскольку $\chi_1^{(1)} > \chi_0^{(1)}$, то их разность в виде $B\delta^2$ может характеризовать абсолютную чувствительность величины X к изменению параметра Y или, по сути, информативность X по отношению к изменениям Y . Эта чувствительность – безразмерна и соответствует квадрату нормированного расстояния между двумя точками в s -мерном пространстве координат. Такое расстояние широко используют для оценки информативности диагностических признаков в параметрических моделях статистической классификации [15, 82, 103]. Поскольку $B\delta^2$ является линейно преобразо-

ванной F -статистикой (2.52), последняя так же может служить мерой информативности контролируемых величин, используемых при многопараметрическом контроле априорно неопределенной величины Y .

6.3. Оценка информативности тестовых статистик моделей регрессионного анализа

Рассмотрим результаты дисперсионного разложения (5.41) с выделением критериальных F -статистик (табл. 6.1), которые построены по общему правилу, как отношение среднего квадрата соответствующей суммы S . (точка заменяет любой из индексов B , G , W , WG) к среднему остаточному отклонению $\overline{S}_R$

$$F. = \frac{\overline{S.}}{\overline{S}_R}. \quad (6.16)$$

Таблица 6.1

Результаты дисперсионного разложения суммы S

Источник изменчивости	Суммы квадратов отклонений	Число степеней свободы	Средний квадрат отклонений	F-статистики
Общее линейное систематическое изменение	S_B	$V_B = 1$	$\overline{S}_B = \frac{S_B}{V_B}$	$F_B = \frac{S_B}{S_R} (N - 2r)$
Несовпадение угловых коэффициентов	S_{WG}	$V_{WG} = 1$	$\overline{S}_{WG} = \frac{S_{WG}}{V_{WG}}$	$F_{WG} = \frac{S_{WG}}{S_R} (N - 2r)$
Наличие линейной регрессии групповых средних	S_G	$V_G = r - 2$	$\overline{S}_G = \frac{S_G}{V_G}$	$F_G = \frac{S_G}{S_R} \left(\frac{N - 2r}{r - 2} \right)$
Несовпадение по углу наклона групповых регрессий	S_W	$V_W = r - 1$	$\overline{S}_W = \frac{S_W}{V_W}$	$F_W = \frac{S_W}{S_R} \left(\frac{N - 2r}{r - 1} \right)$
Случайные остаточные отклонения	S_R	$V_R = N - 2r$	$\overline{S}_R = \frac{S_R}{V_R}$	-
Общий источник	S	$V = N - 1$	$\overline{S} = \frac{S}{V}$	-

Значения чисел степеней свободы для любой из F -статистик определяются соответствующим значением V . и величиной V_R

$$F. = F_{V.;V_R}.$$

Найдем количество информации об изменениях контролируемого параметра Y (или состояния Θ) объекта контроля по измеряемой физической величине X . Пусть число уровней параметра Y (или состояний Θ) равно двум: «в норме» – Y_0, Θ_0 «не в норме» – Y_1, Θ_1 . Соответственно этим состояниям F -статистики принимают значения $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$. Количество ожидаемой измерительной (по F -статистике) информации определяется разностью [4] исходной H_F и условной H_{F/F_S} энтропий ($S = \overline{0,1}$). Пусть для состояния Θ_0 ($S = 0$) и состояния Θ_1 ($S = 1$) объекта контроля F -статистики равны $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$, причем

$$F^{(0)} < F^{(1)}$$

Исходная энтропия, при неопределенности номера состояния S и с учетом дисперсии χ_2 максимальной из F -статистик, (в частности $F^{(1)}$) имеет вид

$$H_F = \log_2 \chi_2 + \left[\frac{(F^{(1)} - F^{(0)})^2}{12} \right]^{1/2}. \quad (6.17)$$

В этом выражении плотность распределения вероятности для F -статистик считается равномерной

$$f(F.) = \begin{cases} \frac{1}{F^{(1)} - F^{(0)}}, & F \in [F^{(0)}, F^{(1)}], \\ 0, & F \notin [F^{(0)}, F^{(1)}]. \end{cases}$$

Дисперсия χ_2 , с учетом нецентральности F -распределения статистики $F^{(1)}$ равна [121]

$$\chi_2 = \frac{2V_R^2}{(V_R - 2)(V_R - 4)} \left[\frac{1 + 2\lambda}{V.} + \frac{(1 + \lambda)^2}{V_R - 2} \right],$$

где $\lambda = V \left[F. \frac{V_R - 2}{V_R} - 1 \right].$

Для простоты анализа принимаем условие

$$V_R \rightarrow \infty,$$

тогда

$$\chi_2 = \frac{2}{V.} + 4(F. - 1). \quad (6.18)$$

Условная энтропия определяется дисперсией χ_2 , максимальной из возможных дисперсий, что приводит к неравенству

$$H_{F/F_S} \leq \log_2 \chi_2^{1/2}. \quad (6.19)$$

С учетом выражений (6.17) – (6. 19) уравнение для оценки количества ожидаемой измерительной информации будет иметь вид неравенства

$$I \geq \log_2 \sqrt{1 + \frac{(F.^{(1)} - F.^{(0)})^2}{24 \left[\frac{1}{V.} + 2(F.^{(1)} - 1) \right]}}. \quad (6.20)$$

Анализ выражения (6.20) показывает, что количество информации растет, если:

- а) растет разность между F -статистиками $F.^{(0)}$ и $F.^{(1)}$;
- б) увеличивается число степеней свободы V , статистики $F.$, используемой для получения информации о состоянии объекта контроля;
- в) уменьшается остаточная дисперсия $\overline{S_R}$ ковариационной модели анализа контролируемых сигналов.

Последний вывод может быть получен в результате преобразования неравенства (6.20) с учетом уравнения (6.16)

$$I \geq \log_2 \sqrt{1 + \frac{(\bar{S}^{(1)} - \bar{S}^{(0)})^2}{24\bar{S}_R^2 \left[\frac{1}{V_{\cdot}} + 2 \left(\frac{\bar{S}^{(1)}}{\bar{S}_R} - 1 \right) \right]}}. \quad (6.21)$$

Это неравенство наглядно показывает, что с увеличением числа членов дисперсионного разложения при обработке временной последовательности измеренных значений количество получаемой информации растет, так как уменьшается квадрат отклонения случайного остатка. Поэтому дисперсионное разложение (3.49), например, более информативно, чем (5.41), так как $S_5 < S_R$ (при условии, что число степеней свободы V_5 в разложении (3.49) не меньше, чем число степеней свободы V_R в разложении (5.46), то есть $V_5 \geq V_R$).

Таким образом, чем сложнее информационная технология преобразования контролируемых сигналов, тем больше информации можно получить о контролируемых параметрах или состояниях объекта.

6.4. Оценка информативности тестовых статистик дискриминантного анализа

Из табл. 6.1 видно, что число F-статистик, несущих информацию об изменении параметра Y или состояния объекта Θ контроля, ограничено и равно $l = 4$. Объединение этих статистик увеличивает количество информации (растет число степеней свободы $V_{\cdot}$ в выражении (6.20) для количества информации. В этом случае удобно рассматривать объект контроля в мерном пространстве информативных признаков

$$Z_1, \dots, Z_l,$$

где $Z_1 = Z_B$; $Z_2 = F_{WG}$; $Z_3 = F_G$; $Z_4 = F_W$.

Пусть признаки $Z_1, \dots, Z_l$ характеризуются условными, по состояниям Θ_0, Θ_1 объекта контроля, плотностями распределения вероятностей

$$\begin{cases} Z_r \approx f(z_r / \Theta_0), & \text{если } \Theta \in \Theta_0, \\ Z_r \approx f(z_r / \Theta_1), & \text{если } \Theta \in \Theta_1, \quad r = \overline{1, l}. \end{cases}$$

Пусть $Z_1, \dots, Z_l$ – результаты измерения значений признаков $Z_1, \dots, Z_l$ в ходе измерительного контроля. Тогда принятие одного из двух решений

$$\begin{cases} \gamma_0 : \Theta \in \Theta_0, \\ \gamma_1 : \Theta \in \Theta_1, \end{cases}$$

производят, используя отношение правдоподобия [88]

$$\Lambda = \frac{\prod_{r=1}^l f(Z_r / \Theta_0)}{\prod_{r=1}^l f(Z_r / \Theta_1)}.$$

В этом случае принимают решение

$$\begin{cases} \gamma_0 : \text{если } \Lambda > 1, \\ \gamma_1 : \text{если } \Lambda \leq 1. \end{cases}$$

Логарифмируя отношение правдоподобия Λ [81,82]

$$\ln \Lambda = \xi,$$

получим возможность принимать решения по знаку решающей (дискриминантной) функции ξ , то есть

$$\begin{cases} \gamma_0 : \text{если } \xi > 0, \\ \gamma_1 : \text{если } \xi \leq 0. \end{cases}$$

Найдем нижнюю границу вероятностей ошибок принятия решений γ_0 или γ_1 , используя параметрический подход к синтезу функции ξ .

Пусть для состояний Θ_0 и Θ_1 условные плотности информативных признаков представляют гауссовские (нормальные) распределения с одинаковыми (по состояниям) дисперсиями

$$\begin{cases} f(z_r / \Theta_0) \approx \text{NORM}(m_r^{(0)}, \sigma_r^2), \\ f(z_r / \Theta_1) \approx \text{NORM}(m_r^{(1)}, \sigma_r^2), \end{cases}$$

где σ_i^2 – максимальная из дисперсий $\chi_2^{(0)}$ или $\chi_2^{(1)}$ соответствующей F -статистики.

Тогда

$$\xi = \sum_{r=1}^l \frac{(m_r^{(0)} - m_r^{(1)})}{\sigma_r^2} \left[z_r - \frac{m_r^{(0)} - m_r^{(1)}}{2} \right]. \quad (6.22)$$

Линейная решающая (дискриминантная) функция (6.22) как случайная величина ξ характеризуется условными нормальными плотностями распределения (для состояний Θ_0 и Θ_1 , соответственно)

$$\begin{cases} f(\xi / \Theta_0) \approx \text{NORM}(m_\xi^{(0)}, \sigma_\xi^2), \\ f(\xi / \Theta_1) \approx \text{NORM}(m_\xi^{(1)}, \sigma_\xi^2). \end{cases}$$

При одинаковых априорных вероятностях состояний Θ_0 и Θ_1 вероятность ошибок первого α и второго β рода одинаковы и равны полной вероятности ошибок контроля. Последняя, с учетом выбора для σ_r^2 максимальной из возможных оценок дисперсии, определяется неравенством

$$P_{\text{ОШ}} \leq 1 - \Phi\left(\frac{\delta}{2}\right), \quad (6.23)$$

где $\Phi(\cdot)$ – интервал вероятности, а параметр δ , называемый расстоянием Махаланобиса [82],

$$\delta = \sqrt{\sum_{r=1}^l \left(\frac{m_r^{(0)} - m_r^{(1)}}{\sigma_r} \right)^2}. \quad (6.24)$$

тем больше, чем выше дискриминирующая способность статистик F_B , F_{WG} , F_G , F_W .

Анализ выражения (6.23) показывает, что дискриминирующая способность F -статистик тем выше, чем:

а) больше разность их средних значений или $(F^{(1)} - F^{(0)})$;

б) меньше дисперсия F -статистик (что подразумевает и минимальность их абсолютных значений, при неизменной фиксированной разности $(F^{(1)} - F^{(0)})$), так как с увеличением F -статистики растет и ее дисперсия [121].

Для оценки количества информации, получаемой в ходе линейной дискриминации с использованием решающей функции (6.22), найдем исходную H_ξ и условную $H_{\xi/\Theta}$ энтропию статистики ξ . Исходная энтропия определяется логарифмом дисперсии статистики ξ до принятия решений γ_0 и γ_1

$$H_\xi = \log_2 \left[\chi_{2\xi} + \frac{m_\xi^{(0)} - m_\xi^{(1)}}{12} \right]^{1/2},$$

где $\chi_{2\xi}$ – дисперсия статистики ξ ,

$m_\xi^{(0)}$ и $m_\xi^{(1)}$ – математические ожидания статистики ξ для состояний Θ_0 и Θ_1 .

Согласно [82, 83] известно, что

$$\begin{cases} \chi_{2\xi} = \delta^2, \\ m_\xi^{(0)} = \delta^2 / 2, \\ m_\xi^{(1)} = -\delta^2 / 2. \end{cases} \quad (6.25)$$

Тогда

$$H_\xi = \log_2 \sqrt{\delta^2 + \frac{\delta^4}{12}}.$$

Условная энтропия с учетом (6.24) равна

$$H_{\xi/\Theta} = \log_2 \chi_{2\xi}^{1/2} = \delta.$$

Количество ожидаемой информации

$$I = H_{\xi} - H_{\xi/\Theta},$$

является функцией расстояния δ^2

$$I = \log_2 \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{12}}. \quad (6.26)$$

Из полученного выражения следует, что для повышения информативности тестовой статистики необходимо выбирать информационные сигналы, обеспечивающие максимум величины δ .

ВЫВОДЫ

1. Предложена математическая модель (2.59) количественной оценки информативности контролируемых величин, в двухфакторном эксперименте с одновременным влиянием дискретной неоднородности эксперимента и изменений уровней параметра контроля. Доказано, что для оценки информативности можно использовать и F -статистику (2.52), несмотря на то, что она имеет плотность нецентрального F -распределения.

2. Анализ количества информации на базе неравенства (6.20) показывает, что информативность F -статистик растет с увеличением объема измеренных выборочных значений (увеличением числа степеней свободы V) и уменьшением остаточной дисперсии используемой модели анализа.

3. Информативность F -статистик тем выше, чем больше разность их условных математических ожиданий по видам состояния объекта контроля;

4. Для линейной модели дискриминации (6.22) информативность тем выше, чем больше расстояние Махаланобиса δ .

В данном разделе представлены результаты практического использования разработанных вероятностно-статистических методов повышения достоверности контроля и диагностики, когда контролируемые величины и сигналы обусловлены неопределенностью параметров и факторных влияний на объекты контроля. Особенности и основные свойства таких объектов представлены в табл. 1.1.

7.1. Система технологического экспресс-контроля относительной влажности сыпучих материалов с априори неопределенной биохимической структурой

7.1.1. Описание объекта контроля. Выбор контролируемых величин

Теоретические результаты в разделах 2, 3 и 4 были использованы для повышения достоверности измерительного входного контроля относительной влажности семян подсолнечника, служащих сырьем для технологического процесса получения растительного масла на технологическом оборудовании «Экструдер ЭК–75/1200». Объект контроля – семена подсолнечника, представляют собой биологически сложный сыпучий материал, для которого технологическим параметром контроля является относительная влажность, величина которой существенно влияет на коэффициент полезного действия оборудования «Экструдер ЭК–75/1200». Применение для измерительного контроля анализаторов, реализующих термогравиметрические методы достаточно точного измерения относительной влажности (абсолютная погрешность – 0,2 % относительной влажности: измерители MA-30 SARTORIUS; Kern RH 120-3), не являются приемлемыми из-за большого (до 15 минут) интервала времени измерения.

Известно, что относительная влажность сыпучих материалов коррелирована с другими физико-химическими характерис-

тиками, в первую очередь с насыпной плотностью, и что электрические методы измерения относительной влажности – оперативны и позволяют получать информацию не только о влажности, но и о плотности сыпучих материалов. Достаточно хорошо разработаны нестандартные средства измерительного контроля влажности диэлькометрическими методами, на основе параметрических L , C -преобразователей, работающих на двух и, даже, на трех частотах.

Для получения измерительной информации об уровнях относительной влажности был использован высокочастотный резонансный преобразователь, для которого выходными сигналами являлись максимальная добротность Q и резонансная частота f_0 [98].

Таким образом, Q и f_0 – это отдельные, хотя и коррелированные, контролируемые величины системы экспресс-контроля (соответственно X_1 и X_2) относительной влажности W (контролируемый параметр Y). Источником статистической неоднородности результатов измерений априори являлась сортность семян подсолнечника, количественно задаваемая уровнем масличности M (фактор U). Все условные обозначения

$$X = \begin{cases} X_1, \text{ сигнал } Q; \\ X_2, \text{ сигнал } f_0, \end{cases}$$

Y и U , соответствуют обозначениям модели (2.1) и результатам измерения статистического объекта с неоднородностями дискретного типа (раздел 2.1).

7.1.2. Выбор числа уровней контролируемой влажности по влияющим факторам. Оценка погрешностей преобразования контролируемых величин

Для выбора числа уровней r по фактору U статистической неоднородности задавались:

а) число уровней s контролируемого параметра (относительной влажности);

б) число многократных измерений n по каждому из этих уровней.

Выбор числа уровней s определялся точностью измерения относительной влажности образцов при обучении системы измери-

тельного контроля. Поскольку для нормативных измерений относительной влажности применялся галогенный анализатор швейцарского производства *HR 73*, для которого воспроизводимость показаний не превышала 0,02 % относительной влажности, величина СКО σ_H (2.17) была выбрана на уровне $\sigma_H \leq 0,05$. Так как диапазон измеряемых значений относительной влажности лежал в пределах (6,3 %; 10,7 %), то максимальное число различаемых уровней влажности не более 45, то есть $c \leq 45$. Среднеквадратические отклонения σ_W и σ_M , обусловленные, соответственно, взаимодействием факторов Y и U и влиянием фактора U на показатель контроля X задавались равными ($\sigma_W = \sigma_M$) и по величине не менее 0,8 % относительной влажности ($\sigma_W \geq 0,8\%$, $\sigma_M \geq 0,8\%$). Оценка σ_W и σ_M проводилась методом многократных измерений выходного сигнала при $Y = \text{const}$ и $M = \text{var}$ с обратным линейным преобразованием σ_X в σ_W .

Вычисление переменных δ_0^2 и δ_1^2 велось по формулам (2.18) и (2.19)

$$\begin{cases} \delta_0^2 = \frac{0,0025}{0,0025 + 12 \cdot 0,64} = 0,0003254, \\ \delta_1^2 = \frac{0,0025 + 0,64}{0,0025 + 12 \cdot 0,64} = 0,083616. \end{cases} \quad (7.1)$$

Для выбора числа r уровней фактора U используем неравенство (2.29), правую часть которого обозначим как

$$\theta = \frac{1 + nc\delta_1^2}{1 + nc\delta_0^2}. \quad (7.2)$$

С учетом значений δ_0^2 и δ_1^2 из (7.1) определим θ для $c = 30$

$$\theta = \frac{1 + 12 \cdot 30 \cdot 0,0836316}{1 + 12 \cdot 30 \cdot 0,0003254} = 27,845 \quad (7.3)$$

Если вероятности ошибок при проверке значимости влияния статистической неоднородности (фактор U) принять равными $\alpha = \beta = 0,1$, из неравенства (2.29) в виде

$$\frac{F_{(r-1),(r-1)(c-1),(1-\alpha)}}{F_{(r-1),(r-1)(c-1),\beta}} \leq \theta, \quad (7.4)$$

следует, что его левая часть равна 27,457 при $(r-1) = 3$ и $(r-1)(c-1) = 9$. Это соответствует выполнению условия (2.29) или (7.4), так как $27,457 < 27,845$ и определяет число уровней r и c при обучении системы контроля в пределах $r \geq 4$ и $c \geq 4$. При таком выборе r и c учет влияния фактора U при обучении системы контроля (градуировке измерителя влажности) будет иметь место с достоверностью $P_d = 0,9$ (2.34).

В табл. 7.1 приведены рассчитанные в соответствии с выражениями (3.67) – (3.72) аддитивные, мультипликативные и полные погрешности по входу преобразователя для сигналов Q и f . Здесь же представлены значения F -статистики (3.54), используемой для проверки гипотезы о линейности функциональных зависимостей $Q = F(Y)$ и $f = F(Y)$

Таблица 7.1

Результаты ковариационного анализа сигналов

Сигнал	Погрешности по входу (в % относительной влажности)			F -статистики	
	$\sigma_{\Sigma Y}$	σ_{AY}	σ_{MY}	$F_B = w_0 B_0^2$, (3.47)	$F_{V4,V5}$, (3.54)
Q	0,769	0,698	0,323	213,91	21,34
f	0,997	0,852	0,517	74,99	12,07

Добротность более чувствительна к изменению влажности, чем резонансная частота, так как статистика F_B для нее больше ($213,91 > 74,99$). Вследствие этого и погрешности (полная $\sigma_{\Sigma Y}$, аддитивная σ_{AY} , мультипликативная σ_{MY}) для сигнала Q меньше, чем для сигнала f . Однако, нелинейность функции $Q = F(Y)$ больше, чем для функции $f = F(Y)$, так как статистика $F_{V4,V5}$ для Q больше, чем для сигнала f . И, наконец, для Q и для f мультипликативные погрешности меньше (в $1,5 \div 2$ раза), чем погрешности аддитивные.

7.1.3. Синтез регрессионной и алгоритмической моделей преобразования. Выбор оптимального числа уровней контролируемого параметра

Для реализации процедуры измерения, выраженной математической моделью (4.40), необходимо получить два результата измерения уровней параметра Y (влажность):

y – результат, реализованный на основе регрессионной модели (уравнение косвенного измерения);

y_j – результат, полученный при использовании алгоритмической модели (на основе принятия решения по правилу выбора (4.5)).

В качестве регрессионной модели используем множественную регрессию Y на сигналы X_1 и X_2 , которая выбирается в рамках систематизированной процедуры построения всех возможных регрессий по группам, в которых каждая последующая имеет на один регрессор больше, чем предыдущая [96]. Выбор «наименьшей» регрессии производится по максимуму скорректированного коэффициента детерминации $\bar{R}_p^2$, где p – число регрессоров плюс свободный член уравнения регрессии. В табл. 7.2 представлены результаты расчета коэффициентов «лучших», по максимуму $\bar{R}_p^2$, регрессий для четырех групп ($p = \overline{3,6}$), а также вычисленные для каждой группы:

а) информационная целевая функция β_p (3.25);

б) F -статистика для проверки значимости регрессии [96].

Из табл. 7.2 наглядно видно преимущество целевой функции β_p , однозначно определяющей выбор регрессионной модели измерения (группа 2), поскольку традиционная целевая функция $\bar{R}_p^2$ имеет совпадающие (в рамках погрешности округления) значения для групп 2 и 4.

Сравнение F -статистики ($F_{p-1, N-p}$) с процентной точкой $F_{3,16,0,05} = 3,01$ для выбранной регрессионной модели показывает, что эта модель значима ($401,05 > 3,01$). И, наконец, отметим, что среднеквадратическое отклонение σ_ε случайного остатка этой модели равно (с учетом предварительного усреднения по всем $n = 12$ многократным измерениям) $\sigma_\varepsilon = 0,944\%$ относительной влажности.

Таблица 7.2

Результаты анализа регрессионной модели измерения

Группа	p	Уравнение регрессии	$\overline{R}_p^2$	β_p	$F_{p-1, N-p}$
1	3	$Y_{(1)} = 37,61 - 3,86X_1 + 0,0005X_2$	0,9391	16,123	463,95
2	4	$Y_{(2)} = -154,01 + 0,043X_2 - 0,001X_1X_2 + 0,04X_1^2$	0,9524	20,352	401,05
3	5	$Y_{(3)} = 13151,12 + 3,95X_1 - 4,12X_2 + 0,03X_1^2 + 0,0003X_2^2$	0,9517	19,763	295,43
4	6	$Y_{(4)} = 68963,2 + 66,14X_1 - 22,28X_2 - 0,01X_1X_2 + 0,06X_1^2 + 0,002X_2^2$	0,9524	19,632	241,12

Для синтеза алгоритмической модели измерения были оценены $A_1 = 7,95$, $\sigma_1 = 2,43$, $A_2 = 30$ кГц и $\sigma_2 = 12$ кГц (диапазон изменения и СКО сигналов X_1 и X_2) и рассчитана величина R_Σ^2 (4.27). В табл. 7.3 представлены результаты расчета целевой функции $M[\Delta]$ (4.25) и коэффициента парной корреляции r при совместном использовании регрессионной и алгоритмической моделей (4.51), среднеквадратические отклонения σ_2 (4.50) и σ для общего результата измерения y^* согласно (4.40). Величина $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,944\%$. Число уровней параметра Y задавалось в пределах $m \in 2,6$. Здесь же указано значение вероятности ошибки α , вычисленное по уравнению (4.26).

Таблица 7.3

Результаты применения алгоритмической модели измерения

m	α	$M[\Delta]$	r	σ_2	σ	Примечание
2	0,638	2,2	0,68	0,738	0,583	$\sigma_1 = 0,944\%$ $R_\Sigma^2 = 16,9$
3	0,839	2,082	0,65	0,672	0,547	
4	0,919	2,111	0,76	0,692	0,592	
5	0,956	2,142	0,98	0,710	0,675	
6	0,975	2,163	0,99	0,721	0,790	

Из табл. 7.3 наглядно видно:

а) погрешность алгоритмической модели измерения ниже, чем у модели регрессионной ($\sigma_2 < 0,944\%$);

б) оптимальное число уровней контролируемой величины, равное $m = 3$, позволяет снизить погрешность $\sigma_1 = 0,944\%$ до уровня $\sigma = 0,547\%$ при совместном использовании регрессионной и алгоритмической моделей измерения относительной влажности.

Оценка ковариационной матрицы S (4.9) для системы сигналов X_1 и X_2 имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} 5,905 & 4,86 \text{ (кГц}^2\text{)} \\ 4,86 \text{ (кГц}^2\text{)} & 144 \end{vmatrix}.$$

Оценки векторов средних $M^{(k)}, k = \overline{1,3}$ (4.8) представлены в табл. 7.4 (k – номер уровня).

Таблица 7.4

Оценки векторов средних значений для показателей контроля X_1 и X_2 (добротность и резонансная частота)

k	1	2	3
$M^{(k)}$	$\begin{vmatrix} 50,315 \\ 6343 \text{ (кГц)} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 47,965 \\ 6333 \text{ (кГц)} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 45,015 \\ 6323 \text{ (кГц)} \end{vmatrix}$

7.2. Система диагностики и контроля нечетких функциональных состояний биологических объектов

При мониторинге состояний биологических объектов, как в клинической медицинской практике, так и в научных исследованиях, использование электрических измерительных сигналов позволяет получить информацию в виде случайных процессов, отражающих динамику изменения как контролируемых состояний, так и влияющих факторов. Изменение уровней последних обуславливает дискретную априорную неоднородность результатов измерений, вызывающую неопределенность в оценке уровней качественных состояний объекта контроля.

Исследование процедур обработки первичной информации, представленной в форме спектрально-нестационарных случайных процессов, осуществлялось в рамках исследований Харьковской медицинской академией последипломного образования (ХМАПО), предусматривающих разработку процедур контроля для функциональной диагностики в реальном времени состояния органов желудочно-кишечного тракта (ЖКТ) у пациентов с терапевтическими и хирургическими проявлениями заболеваний пищевода, желудка, тонкого и толстого кишечника. Такие заболевания сопровождаются нарушениями биоэлектрической активности гладкой мускулатуры этих органов.

Для контроля биопотенциалов органов ЖКТ использовался электропотенциальный преобразователь, позволяющий оценивать суммарную электрическую активность мышечных стенок органов ЖКТ.

На рис. 7.1 этот преобразователь схематически изображен в виде зонда, на оболочке 1 которого закреплены три кольцевых 2, 3, 4 электрода, изготовленных из титана. Электроды 2 и 4 являются сигнальными, а электрод 3 – заземляющим, присоединенным к экрану 5 зонда.

Выходной сигнал E_x преобразователя (входная величина системы контроля) усиливается с помощью электромиографического комплекса ЭМГСТ – 01.

На рис. 7.2 представлена структурная схема микропроцессорной системы для функционального контроля и диагностики, в которой помимо электропотенциального преобразователя использовался стандартный преобразователь давления в электрический сигнал U_x (Siemens Elema 746 b), позволяющий осуществлять независимый контроль изменений функционального состояния органов ЖКТ в диапазоне изменения давления ($-20 \div 300$) мм Нг.

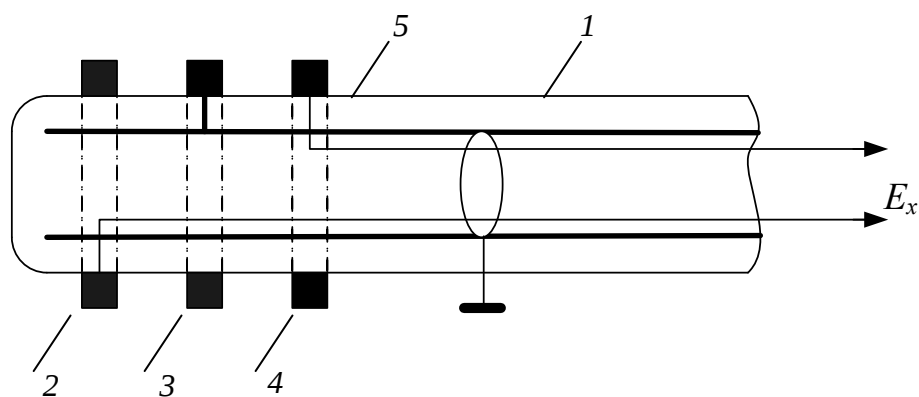


Рис. 7.1. Преобразователь биоэлектрической активности

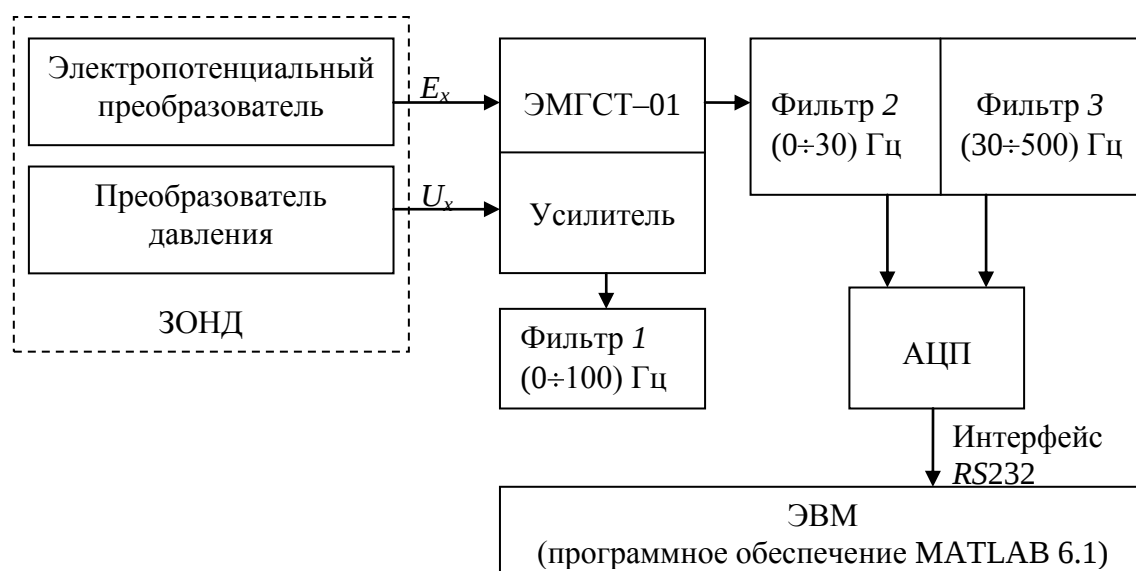


Рис. 7.2. Структурная схема микропроцессорной системы контроля функциональных состояний органов ЖКТ

Диапазон изменения значений сигнала E_x составил ± 200 мкВ. Оба преобразователя размещались на конце зонда, причем преобразователь давления служил для получения измерительной информации о смене функциональных состояний на этапе обучения системы контроля.

Аналогово-цифровые фильтры 1, 2 и 3 использовались для выделения спектральных составляющих сигналов E_x и U_x , соответствующих группам функциональных состояний. С выхода АЦП АТ 90S4433 через интерфейс RS232 результаты измерений поступали на ЭВМ и анализировались с помощью пакета анализа сигналов Simulink 4.0, входящего в программное обеспечение MATLAB 6.1.

Для повышения достоверности определения нормального S_0 и нарушенного S_1 функциональных состояний при обучении системы использовались дополнительные измерительные преобразователи:

- давления (MPX5010DP–Motorola);
- уровня pH (Ацидогастрометры типа АГМ 10-01 и ЕЛТС-01).

Для изучения стохастической неопределенности уровней состояний были получены в ходе клинических испытаний временные диаграммы процессов $e(t/S_j)$. В том же приложении представлены спектральные плотности этих сигналов (в двухмерном и трехмерном вариантах), где $S_e(\omega)$ – спектральная плотность

случайного сигнала $e(t)$, в $\text{мВ}^2\text{с/рад}$; ω – круговая частота, в рад/с ; t – время наблюдения, в мс или мкс.

Для контроля были использованы статистики накопленных сумм T_n и τ_N с последующим нормализующим преобразованием согласно уравнениям (5.1), (5.2) и (5.36).

На рис 7.3 представлены типичные временные диаграммы процесса $e(t)$ при смене состояний (S_0 на S_1) и комплексной статистики Λ (5.40).

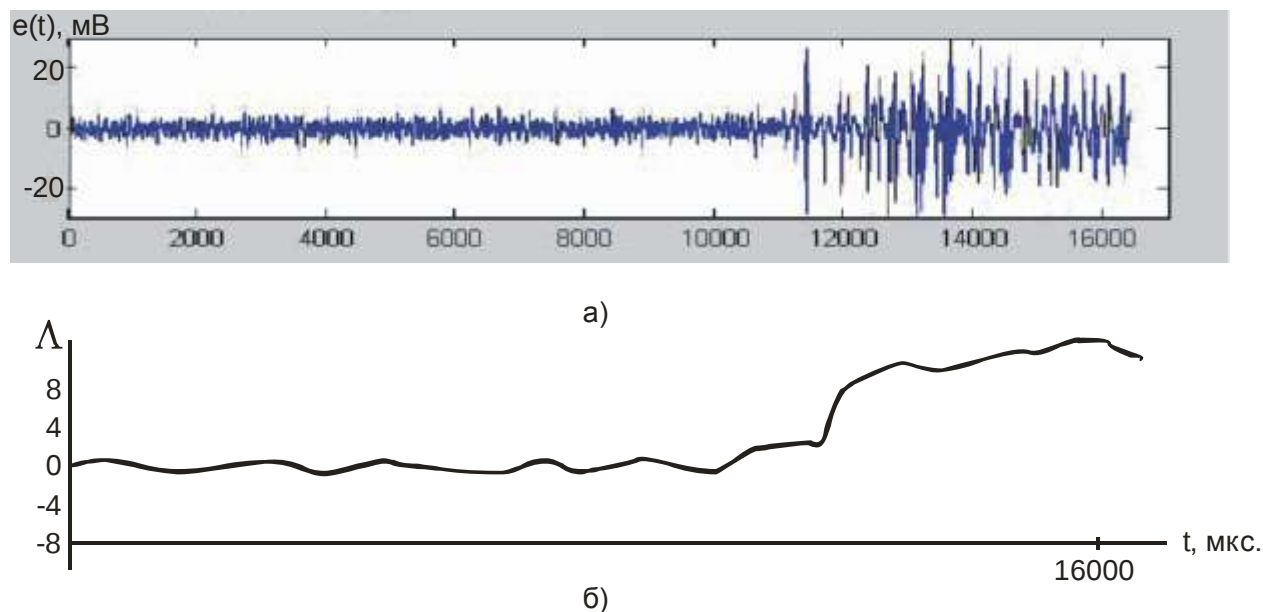


Рис. 7.3. Временные диаграммы:
а – процесса $e(t)$; б – комплексной статистики Λ

Как показали результаты клинических испытаний использование статистики Λ в качестве сигнала измерительной информации позволило не только в три раза снизить вероятность ошибки второго рода β (по сравнению с ненормализованной статистикой T_n), но увеличить достоверность контроля функциональных состояний до величины $P_d = (0,89 \pm 0,01)$ по сравнению с величиной $P_d = (0,75 \pm 0,01)$, имеющей место в традиционных методиках функциональной диагностики.

7.3. Информационно-измерительная система медицинской диагностики

7.3.1 Основные принципы построения компьютерного риноманометра для тестирования носового дыхания

Своевременная диагностика нарушений функций верхних дыхательных путей способствует устранению причин хронических заболеваний носа и околоносовых пазух, которыми по данным статистики страдает более 7% взрослого населения даже в высокоразвитых странах [105]. В рамках концепции доказательной медицины существует проблема обеспечения функциональной диагностики верхних дыхательных путей количественными параметрами и критериями, основанными на объективных инструментальных методах исследования [105-108]. Причем, если методы интраскопической визуализации с успехом применяются в диагностике заболеваний носа и околоносовых пазух [109, 110], то функциональные исследования аэродинамики носа (риноманометрия) крайне редки, особенно в отечественной практике, и не являются стандартными по сравнению, например, со спирометрией при исследовании функции легких.

Поэтому на современном этапе актуальными задачами являются расширение диагностических возможностей методов обследований для получения максимально объективной информации об исследуемом органе и обоснование целесообразности применения данных методов при диагностике конкретных патологий.

Пневматическая принципиальная схема универсального компьютеризированного риноманометра для тестирования носового дыхания КРМ ТНДА разработана в ХНУРЭ (рис. 7.4) и включает блок для определения перепадно-расходных характеристик ПРХ (обозначение согласно паспорту метрологической аттестации) и эластичную маску с трубопроводами, накладываемую герметично на нос и рот пациента. Конструктивно устройство ПРХ состоит из расходомера РА, блока преобразователей давления (далее БПД), модуля аналого-цифрового преобразователя АЦП, интерфейса USB и персонального компьютера ПК (ПЭВМ). В корпусе расходомера имеется цилиндрический диффузор с расширением диаметров по

направлению к источнику потребления воздуха (в основе принципа действия расходомера используется сопло Вентури). К корпусу расходомера крепится переходник с обратным клапаном КО и контрольной точкой давления КТД. К выходному отверстию переходника монтируется маска с входным каналом В для прохода вдыхаемого и выдыхаемого воздуха и каналом Г в виде гибкого рукава (трубки) РД2, входящего во внутрь маски и служащего для сообщения с носоглоткой пациента посредством удержания конца рукава губами.

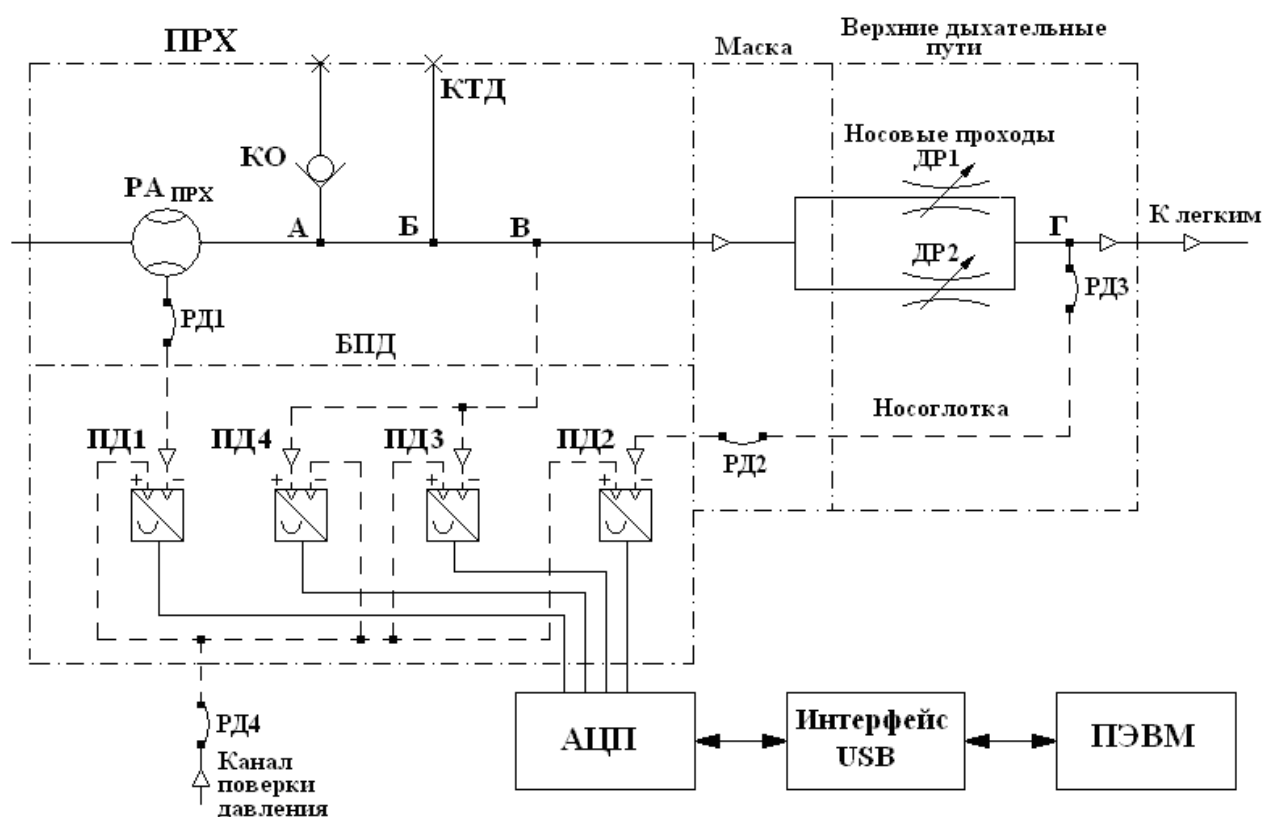


Рис. 7.4. Пневматическая принципиальная схема универсального устройства для тестирования носового дыхания разработки ХНУРЭ

Носовые проходы пациента схематично показаны как параллельно расположенные регулируемые дроссели (сопротивления) ДР1 и ДР2, каждый из которых включает сопротивления клапана (крыльев носа) и собственно носового прохода. Под регулируемостью дросселей подразумевается переменность значений сечений носовых проходов в зависимости от конкретного состояния пациента, например, до и после терапевтического лечения лорзаболеваний, при искривлении перегородок и их устранении в результате хирургической операции.

Блок БПД содержит преобразователи давления ПД1...ПД4 с электрическими разъемами и гибкие рукава (шланги) для сообщения с расходомером РА (РД1) и носоглоткой Г (РД2 и РД3). Гибкий рукав РД4 используется для одновременного тестирования (поверки) преобразователей давления ПД1...ПД4. Измерение давлений производится в следующих точках:

ПД1 – давление (разряжение) в расходомере РА;

ПД2 – давление (разряжение) в носоглотке пациента (за носовыми проходами – дросселями ДР1 и ДР2);

ПД3 – давление (разряжение) на входе в маску (точка В);

ПД4 – избыточное давление на выходе из маски (точка В).

Обратный клапан КО служит для снижения сопротивления воздуха при выдохе пациента.

Контрольная точка давления КТД служит для подсоединения дополнительного преобразователя давления (при необходимости).

На рис. 7.5 представлен общий вид риноманометра ТНДА.



Рис. 7.5. Общий вид риноманометра КРМ ТНДА и АЦП (расходомер РА с переходником и обратным клапаном смонтирован на блоке преобразователей давления)

Таким образом, при тестировании пациента определяется вдыхаемый через нос расход воздуха и перепад давлений на сопротивлениях ДР1 и ДР2 (одновременно на двух носовых проходах или поочередно). Обработка результатов тестирования производится путем построения графической зависимости перепада давлений от расхода и расчета отношения перепада давлений к расходу и мощности потока воздуха. При обратном течении потока воздуха (выдохе) контролю подлежит только избыточное давление (измеряется преобразователем ПДЗ).

Краткая техническая характеристика устройства КРМ ТНДА:

1. Диапазон измерения расхода, л/с 0,4...8;
2. Диапазон измерения давления, кПа 0,1...50;
3. Допустимая приведенная погрешность
при измерении давления, % ± 5 ($\pm 2,5$ для 50 кПа);
4. Допустимая относительная
погрешность при измерении расхода, % ± 5 ;
5. Масса блока преобразователей
давления и расходомера с маской, кг 0,4.

На основании изучения известных способов тестирования носового дыхания и проведенных в ХНУРЭ многочисленных экспериментов и анализа процессов, происходящих в системе дыхания человека на пути от всасывающего тракта (носовых проходов) до легких, мускульная мощность которых обеспечивает подачу требуемого организмом количества воздуха, предложено проведение тестирования пациентов на динамических режимах с открытым ртом и закрытым носом, и носом с закрытым ртом, только при максимальной возможной мускульной мощности на вдохе, достигаемой частотой и глубиной (амплитудой) вдоха. Именно такой подход позволяет при сравнении составляющих мощности при дыхании (расхода и давления воздуха) перейти к тестированию носового дыхания:

- путем расчета перепада давлений на носовых проходах (или одном из тестируемых проходов) без фактического измерения давления в ротовой полости (на выходе из носовых проходов);
- путем расчета расхода через носовые проходы (или один из них) без применения маски.

Графические зависимости перепада давлений на носовых проходах и расхода воздуха при форсированном дыхании (вдохе), приведены на рис. 7.6.

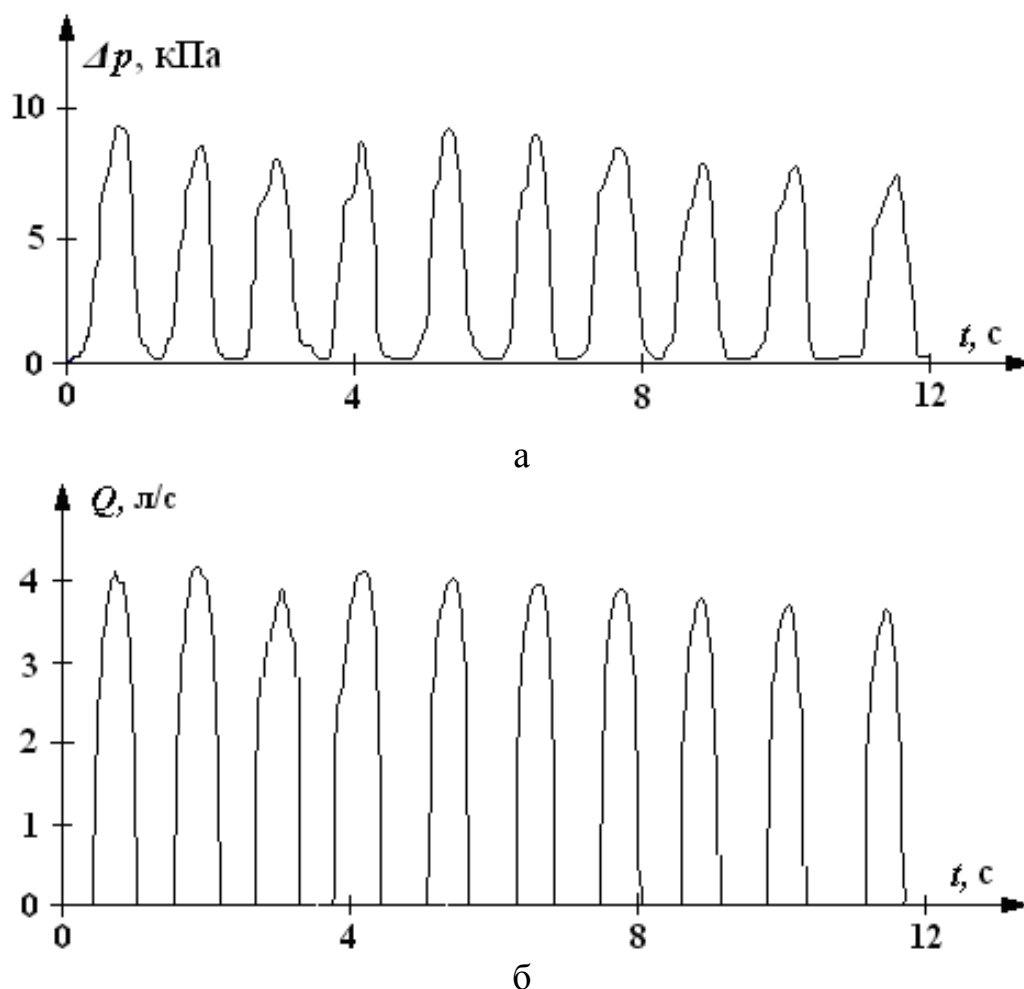


Рис. 7.6. Изменения перепада давлений (а) и расхода воздуха (б) в носовой полости при форсированном дыхании в норме

7.3.2. Анализ методов повышения достоверности риноманометрической диагностики

Для проведения автоматизированного анализа риноманометрических данных разрабатывалось программное обеспечение, основанное на алгоритме автоматизированного выделения максимальных значений динамических измеряемых сигналов. Учитывая априорную неопределенность объекта контроля (например, величина перепада давлений на носовых проходах существенно зависит от анатомического строения мягкого неба и может иметь постоянную составляющую), алгоритм основан на усреднении случайного сигнала методом скользящего среднего для устранения локальных помех, численном дифференцировании и поиске экстремумов по нулевым значениям производной измеряемого сигнала, а так же

определения амплитуды самого сигнала в точке экстремума (должна быть не менее 300 Па и 0,1 л/с для сигналов давления и расхода воздуха, соответственно) и последующем устранении смежных (относящихся к одному циклу дыхания) максимумов сигнала.

Рассмотрим модель линейной дискриминации (6.4) для оценивания вероятностей ошибок предлагаемого метода диагностики при форсированном дыхании с учетом F – статистик (6.3). Такая модель позволяет рассчитывать нижние границы расстояния Махаланобиса δ (6.24) и вероятности ошибок $P_{\text{ОШ}}$ диагностики (6.23) для сравнения диагностических особенностей подмножеств информативных сигналов. Для этого на базе оториноларингологического отделения Харьковской областной клинической больницы было обследовано 60 пациентов, разделенных на две группы по 30 человек в норме (состояние Θ_0) и при затруднении носового дыхания (состояние Θ_1). Для каждого пациента проводилось обследование методом активной задней риноманометрии при форсированном вдохе по десяти циклам дыхания соответственно. При этом, по рассмотренному выше алгоритму автоматизированного поиска максимумов, в каждом цикле вдоха вычислялись амплитудные значения перепада давления Δp и расхода воздуха Q в верхних дыхательных путях пациента и проводилось их усреднение по десяти циклам дыхания, а так же находились по четыре F -статистики F_0, F_{WG}, F_G, F_W (см. табл. 6.1) для каждого измеряемого сигнала (Δp и Q). Затем, для каждой группы пациентов находились статистические показатели: средние значения $m_i^{(0)}$ и $m_i^{(1)}$ и среднеквадратические отклонения соответствующих показателей, причем для расчета по формуле (6.24) выбиралось максимальное среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_i = \max(\sigma_i^{(0)}, \sigma_i^{(1)}).$$

Таким образом, в расчетах участвовали десять информативных параметров $X_i (i = \overline{1,10})$ – по пять для каждого измеряемого сигнала. Первые пять $\{X_i\}_1^5$ относятся к характеристикам перепада давления Δp , а вторые пять $\{X_i\}_6^{10}$ – к характеристикам расхода воздуха.

Далее, согласно введенным обозначениям, выполнялись расчеты махаланобисового расстояния по формуле (6.24) и вероятности ошибки принятия решения по формуле (6.23) для каждого параметра. Результаты расчетов приводятся в табл. 7.5 и 7.6.

Таблица 7.5

**Дискриминантные характеристики параметров сигнала
перепада давления Δp**

Параметр		Состояния объекта контроля		Расстояние Махаланобиса δ	Вероятность ошибки $P_{\text{Ош}}$
		Θ_0	Θ_1		
X_1	$\overline{\Delta p}$, кПа	8,70	16,5	2,1	$\leq 0,3$
	$\sigma_{\Delta p}$, кПа	2,26	3,80		
X_2	$\overline{F_{0p}}$	111,50	65,20	0,98	$\leq 0,62$
	$\sigma_{F_0 \Delta p}$	47,10	22,14		
X_3	$\overline{F_{WG \Delta p}}$	6,41	18,70	0,87	$\leq 0,68$
	σ_{FWGp}	3,47	14,20		
X_4	$\overline{F_{G \Delta p}}$	48,40	38,20	0,50	$\leq 0,81$
	$\sigma_{FW \Delta p}$	19,6	12,95		
X_5	$\overline{F_{W \Delta p}}$	18,25	35,30	0,92	$\leq 0,65$
	$\sigma_{FW \Delta p}$	4,77	11,32		
$X_{i=1}^5$	$\delta_{\Delta p}$			2,7	$\leq 0,18$

Как видно из приведенных таблиц, по средним значениям сигналов, а так же с учетом их F -статистик, метод анализа динамического сигнала перепада давлений обладает большими дискриминантными характеристиками по сравнению с данными о расходе воздуха (в 1,5 раза большее расстояние Махаланобиса как при анализе средних значений сигналов, так и с учетом F -статистик). Это объясняется физической возможностью пациента при затрудненном носовом дыхании кратковременно обеспечить расход близкий к нормальному за счет повышения перепада давлений на носовых проходах. При этом, используя только

средние значения сигналов перепада давлений и расхода воздуха, можно получить вероятность ошибки менее 0,21. Учет же всех информативных параметров случайных измерительных сигналов позволяет получить расстояние Махалобиса $\delta_{\{X_i\}_1^{10}} = 3,25$ и, соответственно, понизить вероятность ошибки до величины менее 0,1. При ранжировании признаков в порядке убывания расстояния Махалобиса можно провести анализ влияния количества параметров на дискриминантные характеристики метода диагностики. На рис. 7.7 и 7.8 приведены кумулятивные характеристики увеличения расстояния Махалобиса и уменьшения вероятности ошибки диагностики в функции размерности пространства и информативных параметров давления и расхода воздуха. Очевидным является то, что три наименее значимых параметра на вероятность принятия диагностического решения практически не влияют и могут быть исключены из расчетов.

Таблица 7.6

Дискриминантные характеристики параметров сигнала расхода воздуха Q

Параметр		Состояния объекта контроля		Расстояние Махалобиса δ	Вероятность ошибки $P_{\text{ОШ}}$
		Θ_0	Θ_1		
X_6	$\bar{Q}$, л/с	3,10	0,80	1,43	$\leq 0,48$
	σ_Q , л/с	1,60	0,43		
X_7	$\bar{F}_{0Q}$	77,95	47,62	0,74	$\leq 0,72$
	$\sigma_{F_{0Q}}$	40,50	12,37		
X_8	$\bar{F}_{WGQ}$	4,50	3,80	0,33	$\leq 0,88$
	σ_{FWGQ}	2,15	1,76		
X_9	$\bar{F}_{GQ}$	6,10	7,94	0,50	$\leq 0,81$
	$\sigma_{FW_{\Delta P}}$	3,12	3,63		
X_{10}	$\bar{F}_{WQ}$	9,70	13,1	0,60	$\leq 0,76$
	σ_{FWQ}	3,77	5,65		
$X_i \frac{10}{6}$	δ_Q			1,82	$\leq 0,37$

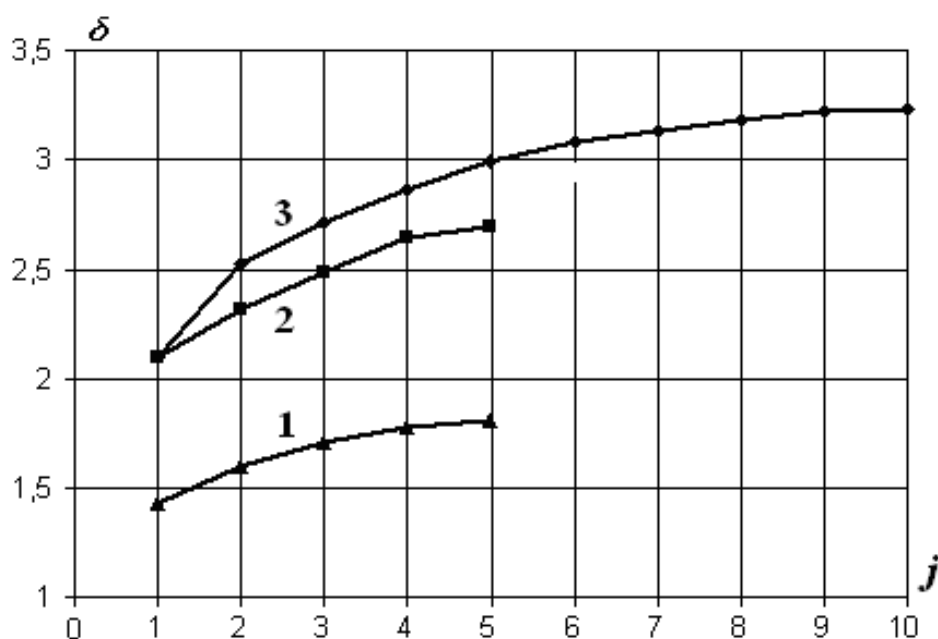


Рис. 7.7. Зависимость увеличения расстояния махалонобиса по мере добавления признаков в модель дискриминации $\delta = F(j)$, где j – размерность пространства информативных параметров: 1 – для сигнала расхода воздуха; 2 – для сигнала перепада давления; 3 – с учетом признаков всех сигналов

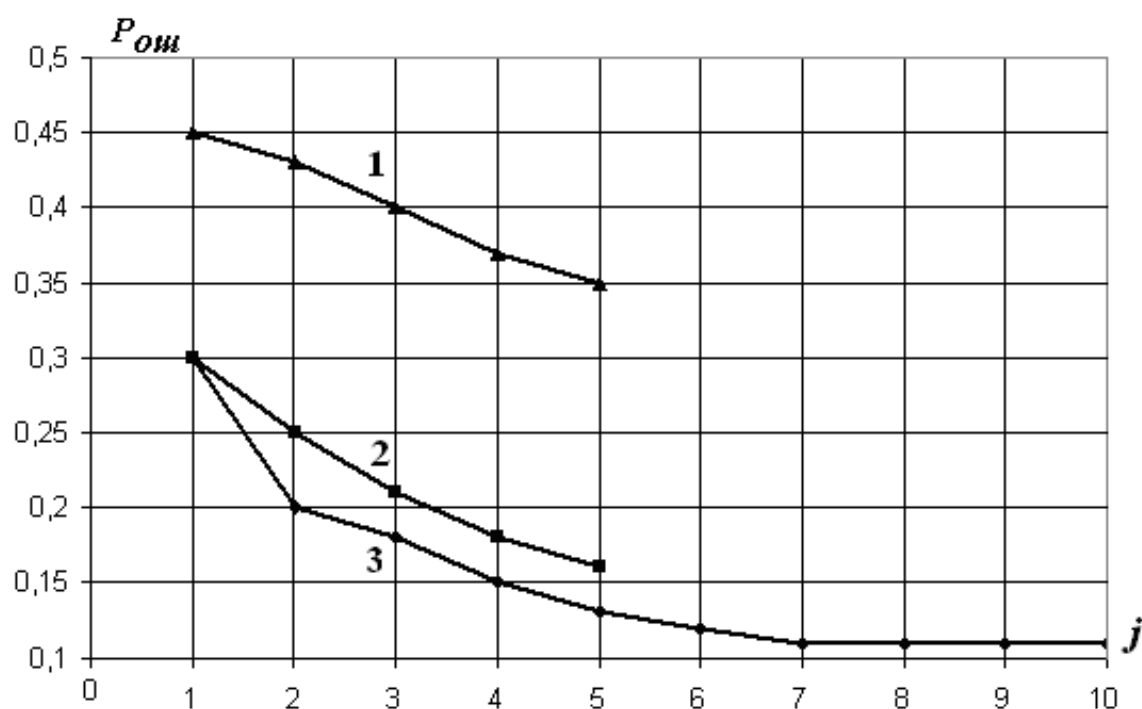


Рис. 7.8. Зависимость снижения вероятности ошибки принятия решения по мере добавления признаков в модель дискриминации $P_{ош} = F(j)$: 1 – для сигнала расхода воздуха; 2 – для сигнала перепада давления; 3 – с учетом признаков всех сигналов

Проведенный анализ методов риноманометрии и теоретических основ их построения позволил разработать метод и устройство для тестирования носового дыхания для компьютерной риноманометрии КРМ ТНДА. Предложенный оригинальный метод тестирования носового дыхания пациента при форсированном вдохе позволил выявить следующую закономерность: наибольшими дискриминантными свойствами обладают параметры сигнала перепада давлений – пациент при затрудненном носовом дыхании временно может обеспечить расход воздуха через носовые проходы близкий к нормальному за счет повышения перепада давлений на носовых проходах.

Используя для анализа дыхания только средние максимальных значений сигналов перепада давлений и расхода воздуха, можно получить вероятность ошибки диагностического решения менее 0,21 ($P_{\text{ош}} \leq 0,21$). Учет всех показателей диагностических сигналов позволяет снизить вероятность ошибки диагностики затрудненного носового дыхания до величины менее 0,1 ($P_{\text{ош}} \leq 0,1$). Таким образом, добавление к параметрам аппаратно-методологических средств измерений F -статистик обеспечивает существенное (с 0,21 до 0,1) снижение вероятности ошибки принятия диагностического решения. Такие подходы возможно применить в других областях медицины, например, при планировании нейрохирургических вмешательств [111-115].

ВЫВОДЫ

1. Доказана принципиальная возможность повышения точности косвенных методов измерения влажности за счет оптимального выбора ее уровней для алгоритмической модели экспресс-контроля. Показано, что применение процедур распознавания уровней контролируемого параметра приводит к повышению достоверности контроля качества сыпучих материалов с неопределенной биохимической структурой.

2. Показана возможность применения статистик накопленных сумм, как информативных параметров спектрально-нестационарных измерительных сигналов, для повышения достоверности систем функциональной диагностики биологических объектов. Доказана

эффективность применения нормализующих преобразований для построения условных равномерных шкал диагностируемых состояний.

3. Доказана эффективность применения информационно-измерительных технологий дисперсионного и кусочно-регрессионного преобразований динамических априори нестационарных сигналов для получения дополнительной информации при ограничениях на время наблюдения биологического объекта функциональной диагностики. Практически показано влияние на вероятность ошибки диагностики размерности пространства информативных параметров. Доказано, что введение в измерительный эксперимент динамических режимов в функционировании объекта диагностики позволяет получить информационную избыточность, что повышает достоверность диагностики (например, введением форсированного дыхания при риноманометрическом тестировании).

ЛИТЕРАТУРА

1. Технічне діагностування та контроль технічного стану. Терміни та визначення: ДСТУ 2389-94. – [Чинний від 1995-01-01]. – К. : Держстандарт України, 1994. – 24 с. – (Національний стандарт України).
2. Контроль неруйнівний. Терміни та визначення: ДСТУ 2865-94. – [Чинний від 1996-01-01]. – К. : Держстандарт України, 1995. – 52 с. – (Національний стандарт України).
3. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю: навч. посіб. / [Володарський Є.Т., Кухарчук В.В., Поджаренко В.О., Сердюк Г.Б.]. – Вінниця: Велес, 2001. – 219 с.
4. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники / П.П. Орнатский – К. : Вища школа, 1983. – 455 с.
5. Бромберг Э.М. Тестовые методы повышения точности измерений / Э.М. Бромберг, К.Л. Куликовский – М. : Энергия, 1978. – 176 с.: ил.
6. Туз Ю.М. Структурные методы повышения точности измерительных приборов / Ю.М. Туз – К.: Вища школа, 1976. – 285с.
7. Кондрашов С.І. Методи підвищення точності систем тестових випробувань електричних вимірювальних перетворювачів у робочих режимах: Монографія / С.І. Кондрашов. – Х.: НТУ «ХПІ», 2004. – 224 с.
8. Евтухов П.С. Властивості алгоритму корекції систематичних похибок з використанням розрахункових поправок. [Текст] / П.С. Евтухов // Методи та прилади контролю якості. Івано-Франківськ. – 2006. – № 16. – С. 93 – 94.
9. Таланчук М.П. Засоби вимірювання в автоматичних інформаційних та керуючих системах: [підручник для вузів] / М.П. Таланчук, Ю.О. Скрипник, В.О. Дібровний – К. : Райдуга, 1994. – 672с.
10. Туз Ю.М. Автоматическая коррекция погрешностей и расширение функциональных возможностей цифровых вольтметров и мультиметров / Ю.М. Туз, В.В. Литвих // Измерения, контроль и автоматизация: Научно-технический сборник Выпуск 1 (65). – М. : Информприбор, 1988. – С. 1–15.
11. Ціделко В.Д. Обробка даних і подання результату вимірювання: Монографія / В.Д. Ціделко, Н.А. Яремчук – К. : ІВЦ «Видавництво Полі-техніка», 2002. – 176 с.
12. Дибенко К.И. Контроль статических и динамических параметров одного типа измерительных каналов [Текст] / К.И. Дибенко, С.И. Кондрашов, В.Н. Балев // Український метрологічний журнал. Випуск 2. – 2000. – С. 59 – 62.
13. Балев В.Н. Методы и средства контроля погрешностей измерительных каналов автоматизированных систем контроля и управления: дис. канд. техн. наук: 05.11.15 / В. Н. Балев–Х. : 1999. – 216с.
14. Montgomery D.C. Introduction to Statistical Quality Control / D.C. Montgomery – [4th ed] – New York. : John Wiley & Sons, 2001. – 796 p.
15. Саврасов Ю.С. Оптимальные решения / Ю.С. Саврасов – М. : Радио и связь, 2000. – 152 с.
16. Press S.J. Bayesian statistics: principles, models and applications (Байесовские статистики: принципы, модели и приложения) / S.J. Press. – New York:John Wiley, 1988. – 453 p.

17. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 т. / [под ред. В.И. Кузнецова и Е.Ю. Барзиловича]. – М.: машиностроение, 1990 – Т.8: Эксплуатация и ремонт. – 1990. – 320 с.
18. Малайчук В.П. Інформаційно-вимірювальні технології неруйнівного контролю: [навч. посіб.] / В.П. Малайчук, О.В. Мозговой, О.М. Петренко – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2001. – 240 с.
19. Маєвський С.М. Основи побудови систем аналізу сигналів у неруйнівному контролі / С.М. Маєвський, В.П. Бабак, Л.П. Щербак – К. : Либідь, 1993. – 200 с.
20. Малайчук В.П. Основы теории обработки сигналов в технических системах управления и контроля / В.П. Малайчук – Д.: Изд-во ДГУ, 1990. – 115 с.
21. Малайчук В.П. Обработка информации в средствах и системах неразрушающего контроля / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой – Д. : Изд-во ДГУ, 1992. – 168 с.
22. Малайчук В.П., Автоматизированная система проектирования технологий не разрушающего контроля / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой, А.Н. Петренко // Материалы IX ежегодного международного семинара – выставки. – Ялта. Украина, 10-14 сентября 2001г.
23. Малайчук В.П. Математическая дефектоскопия: Монография / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой – Днепропетровск. : Системные технологии, 2005. – 180 с.
24. Филипов М.В. Подходы к оценке остаточного ресурса технических объектов [Текст] / М.В. Филинов, А.С. Фурсов, В.В. Ключев // Контроль. Диагностика. – 2006. – № 8 (98). – С. 6 – 16.
25. Малайчук В.П. Обработка многомерных нестационарных случайных пространственно-временных рядов в задачах мониторинга. [Текст] / В.П. Малайчук, А.В. Мозговой // Методи та прилади контролю якості. – Івано-Франківськ – 2005. – № 15 – с.90-93.
26. Коробцов А.С. Показатели качества неразрушающего контроля [Текст] / А.С. Коробцов // Контроль. Диагностика. – 2006. – № 1. – С. 32 – 42.
27. Неразрушающий контроль и диагностика: справочник / [Ключев В.В., Соснин Ф.Р., Филинов В.Н. и др.]; под ред. В.В. Ключева. – М. : Машиностроение, 2003. – 656 с.
28. Тараненко Ю. К. Регресійні моделі для оцінки метрологічних характеристик віброчастотних вимірювачів щільності [Текст] / Ю.К. Тараненко, О.М. Петренко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький. : – 2006. – № 2. – С. 18-23.
29. Земельман М.А. Метрологические основы технических измерений / М.А. Земельман – М. : Из-во стандартов, 1991. – 228 с.
30. Мордасов Д.М. Технические измерения плотности сыпучих материалов: [учеб. пособие] / Мордасов Д.М., Мордасов М.М. – Тамбов. : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 80 с.
31. Себко В.В. Погрешности совместного измерения радиуса, электропроводности и температуры цилиндрического проводящего изделия. [Текст] / В.В. Себко // Український метрологічний журнал. – Х. : 2002. – Вип. 2. – С. 26 – 30.
32. Себко В.В. Погрешности одновременного определения магнитной проницаемости, удельного электрического сопротивления и температуры

цилиндрического изделия. [Текст] / В.В. Себко // Український метрологічний журнал. – Х. : 2002. – Вип. 4. – С. 23 – 28

33. Аникин В.В. Метрологическое обеспечение контроля и определение показателей качества электрической энергии. Современное состояние и перспективы развития. [Текст] / В.В. Аникин, А.С. Давыдов, А.Н. Попенака // Український метрологічний журнал. – Х. : 2004. – Вип. 2. – С. 16 – 18.

34. Бровкин Ю.Н. Методики неразрушающего контроля качества полупроводниковых солнечных элементов с помощью ёмкостного зондирования. [Текст] / Ю.Н. Бровкин, С.В. Плаксин, Л.М. Погорелая // Український метрологічний журнал. – Х. : 2004. – Вип. 4. – С. 49 – 52.

35. Пелешок Т.М. Обґрунтування структури алгоритму автоматичної компенсації мультиплікативних похибок первинних вимірювальних перетворювачів. [Текст] / Т.М. Пелешок // Методи та прилади контролю якості. – Івано-Франківськ. : 2005. – № 15 – С.62-64.

36. Патон Б.Є., Неруйнівний контроль в Україні. [Текст] / Б.Є. Патон, В.О. Троїцький, Ю.М. Посипаймо // Інформаційний бюлетень Українського товариства неруйнівного контролю та технічної діагностики. – 2003. – № 2(18). – С. 5-9.

37. Володарский В.Я. Влияние на точность измерения несоответствия исследуемого объекта приписываемой ему модели / В.Я. Володарский, В.Я. Розенберг, В.А. Рубичев // Измерительная техника. – 1969. – № 7. – С. 18-20.

38. Мокин Б.И. Математические модели и информационно-измерительные системы для технической диагностики трансформаторных вводов. / Мокин Б.И., Грабко В.В., Динь Тхань Вьет. – Винница. : ВГТУ «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1997. – 130с.

39. Лухвич А.А. Оценка влияния мешающих факторов при магнитной толщинометрии. [Текст] / А.А. Лухвич, А.А. Лукьянов, А.К. Шукевич // Дефектоскопия. – 2008. – № 8 – С.43-52.

40. Акопьян В.А. Корреляционные связи параметров сигналов акустической эмиссии с коррозионными повреждениями в алюминиевых сплавах. [Текст] / В.А. Акопьян, В.Е. Рожков, С.Н. Шевцов // Дефектоскопия. – 2007. – № 6 – С.51-59.

41. Бурдинский Э.В. Повышение достоверности метода электроизмерений при оценки площади повреждения изоляции газопровода. [Текст] / Э.В. Бурдинский, И.А. Меркурьева, И.В. Глотов [и др.] // Контроль. Диагностика. – М. : 2008. – № 5 – С.6-13.

42. Семенов Г.Н. Моделювання процесів несанкціонованих відборів і витікань нафти з магістрального нафтопроводу на основі нечіткої логіки. [Текст] / Г.Н. Семенов, О.В. Кучмистенко, // Методи та прилади контролю якості. – Івано-Франківськ, 2005. – № 15 – С. 32-36.

43. Енюков И. Выбор решающего правила в условиях конечной обучающей выборки / И. Енюков. // Сборник «Статистические проблемы управления» – Вильнюс. : 1976. – Вып. 14. – С. 127-136.

44. Штефан Н.В. Методи та алгоритми ефективної обробки результатів вимірювального експерименту: дис. канд. техн. наук: 05.11.15 / Наталя Володимірівна Штефан – Х. : 2004. – 161 с.

45. Рыбалко В.В. Параметрическое диагностирование энергетических объектов на основе факторного анализа в среде Statistica. [Текст] / В.В. Рыбалко // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2004. – № 2 (6). – С. 78 – 83.

46. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / [М. Басвиль, А. Вилски и др.]; пер. с англ. под ред. М. Басвиль, А. Банвениста. – М. : Мир, 1989. – 278 с.

47. Мельничук С.І. Перспективи реалізації методу вимірювання витрати і кількості газу на основі зміни спектральних характеристик шумів контрольованого середовища [Текст] / С.І. Мельничук, О.П. Шашкевич // Методи та прилади контролю якості. – 2003. – №11. – С. 64 – 68.

48. Диментберг М.Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами / М.Ф. Диментберг – М. : Наука, 1989. – 176 с.

49. Акустическая диагностика и контроль на предприятиях топливно-энергетического комплекса / [В.М. Баранов, А.И. Гриценко, А.М. Карасевич и др.] – М. : Наука, 1998. – 304 с.

50. Борисенко А.Н. Современные системы и средства контроля технического состояния дизельных двигателей [Текст] / А.Н. Борисенко, О.В. Лавриненко // Вестник НТУ «ХПИ». – Х. : НТУ «ХПИ», 2008. – № 56. – С. 26-33. – (Тематический выпуск «Автоматика и приборостроение»)

51. Самсонов В.П. Оценка частотных спектров нестационарного диагностического вибросигнала при исследовании топливной аппаратуры дизельной установки [Текст] / В.П. Самсонов, О.Ю. Кропачек // Вестник НТУ «ХПИ». – Х. : НТУ «ХПИ», 2003. – №21. – С.197-201. – (Серия «Автоматика и приборостроение»).

52. Нечипорук В.В. Метод підвищення точності систем діагностики технічного обладнання на основі стаціонаризації вимірювальної інформації: дис. канд. тех. наук: 05. 11. 16 / Віталій Володимирович Нечипорук – К. : 2007. – 115 с.

53. Володарський Є. Т. Дворівневий структурний аналіз вібродіагностичних сигналів [Текст] // Є. Т. Володарський, Д. С. Шантир, С.В. Шантир // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – № 1. – С. 171-175.

54. Надежность и эффективность в технике: справочник в 10 т. / [ред. совет: В.С. Авдеевский (предс.) и др.]. – М.: Машиностроение. – 1987. – Т.9. Техническая диагностика / [под общ. ред. В.В. Клюева, П.П. Пархоменко]. – 1987. – 352 с.

55. Калябин С.Ю. Использование кумулятивных статистик в задачах обнаружения спектральных изменений случайных сигналов [Текст] / С.Ю. Калябин, В.В. Муляров // Вестник НТУ «ХПИ» — Х. : НТУ «ХПИ», 2005. – №7. – С. 68-72. – (Серия «Автоматика и приборостроение»).

56. Козленко М.І. Дослідження ефективності застосування різних типів сигналів в інформаційних каналах систем керування та контролю. [Текст] / М.І. Козленко // Методи та прилади контролю якості. – Івано-Франківськ. : 2006. – № 16 – С.91-93.

57. Цапенко М.П. Измерительные информационные системы: Структуры и алгоритмы, системотехническое проектирование: [учеб. пособие для вузов] / М.П. Цапенко – [2-е изд., перераб. и доп.] – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 440 с.

58. Рекомендация. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей: МИ 2083-93. – [Введен с 1992-01-01]. – М. : Изд-во стандартов, 1991. – 9 с.

59. Соболев В.И. Косвенные измерения при вероятностной зависимости между непосредственно измеряемыми и косвенно определяемыми величинами [Текст] / В.И. Соболев // Измерительная техника. – 2006. – №7. – С. 17-20.

60. Клейман А.С. Обработка результатов измерений, распределенных по законам, отличным от нормального / А.С. Клейман – Х. : ХИРЭ, 1992. – 132 с.
61. Володарский Е.Т. Планирование и организация измерительного эксперимента / Е.Т. Володарский, Б.Н. Малиновский, Ю.М. Туз – К. : Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 280 с.
62. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности / Я. Б. Шор. – М. : Сов.радио, 1994. – 198 с.
63. Barker T.B. Quality by experimental design (Качество планированием эксперимента) / Barker T.B. New – York: Marcel Dekker, 1985. – 488 p.
64. Давиденко А.П. Организация и планирование научных экспериментов, патентование: [учеб. пособие] / А.П. Давиденко – Х.: НТУ «ХПИ», 2004. – 320 с.
65. Гудмен И. Нечеткие множества как классы эквивалентности случайных множеств / И. Гудмен // Материалы научной конференции « Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения» – М. : Радио и связь, 1986. – С. 59-61.
66. Klement E.P. Characterizations of finite fuzzy measures using Markoff kernels / E.P. Klement // Journal Math. Anal. Applic. – 1980. – N 75 (2). – P. 330-339.
67. Hirota K. Extended Fuzzy expression of probabilistic sets. In Advances ger (ed) / K. Hirota // North-Holland Publishing Co. – 1979. – P. 201-214.
68. Sugeno M. In Fuzzy Automata and Decis. Processes / Ed. M.M. Gupta – New York: North-Holland Publishing Co., 1977. – P. 89-102.
69. Маркова Е.В. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей / Е.В. Маркова, А.В. Лисенков. – М. : Наука, 1973. – 220 с.
70. Дивак М.П. Оптимальна адаптивна процедура прийняття рішень на основі інтервальних моделей / М.П. Дивак, А.В. Пукас, Г.В. Сапожник // Відбір і обробка інформації. – 2006. – № 24(100). – С. 23 – 28.
71. Ланге Ф.Г. Статистические аспекты построения измерительных систем. / Ф.Г. Ланге – М. : Радио и связь, 1981.
72. Терентьев С.Н. Оптимизация систем цифровой передачи измерительных сигналов: [учеб. пособие] / С.Н. Терентьев, А.Б. Глухов, Л.В. Константинова. – Харьков. : НТУ «ХПИ», 2002. – 268 с.
73. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники: в 3-х кн. Кн. третья / Б.Р. Левин. – М. : Советское радио, 1976. – 288 с.
74. Бархатов В.А. Обнаружение сигналов и их классификация с помощью распознавания образов. [Текст] / В.А. Бархатов // Дефектоскопия. – 2006. – № 4 – С.14-27.
75. Єріна А.М. Статистичне моделювання та прогнозування: [навч. посіб] / Єріна А.М. – К. : КНЕУ, 2001. – 170 с.
76. Мироновский Л. А. Функциональная диагностика динамических систем [Текст] / Л. А. Мироновский // Автоматика и телемеханика. – 1980. – №8 – С. 96–121.
77. Рабинович В.И. Информационные характеристики средств измерения и контроля / В.И. Рабинович, М.П. Цапенко – М. : Энергия, 1968. – 91 с.
78. Чинков В.М. Основи метрології та вимірювальної техніки: [навч. посібн.] / В.М. Чинков – [2-е вид., перероб. і доп.]– Х. : НТУ «ХПИ», 2005. – 524 с.
79. Кисіль І.С. Метрологія, точність і надійність засобів вимірювань: [навч. посібник] / І.С. Кисіль – Івано-Франківськ: Видавництво «Факел», 2000. – 400 с.
80. Володарський Е.Т. Статистична обробка даних: [навч. посібник] / Е.Т. Володарський, Л.О. Кошева. – К. : НАУ, 2008. – 308с.

81. Миленький А.В. Классификация сигналов в условиях неопределенности (статистические методы самообучения в распознавании образов) / А.В. Миленький – М. : Сов. Радио, 1985. – 329 с.
82. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П.Харт; пер. с англ. под ред. В.Л. Стефанюк. – М. : Мир, 1976. – 512 с.
83. Раудис Ш.Ю. О качестве априорной информации при построении алгоритма классификации [Текст] / Ш.Ю. Раудис // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1972. – №4 – С. 168-174.
84. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента / Н. Джонсон, Ф.Лион; пер. с англ. под ред. Э.К. Лецкого. – М. : Мир, 1981. – 520 с.
85. Шефе Г. Дисперсионный анализ / Г. Шефе; пер. с англ. Б.А. Севостьянов. – [2-е изд.] – М. : Наука, 1980. – 512 с.
86. Евланов Л.Г. Контроль динамических систем / Л.Г. Евланов. – [2-е изд.] – М. : Наука, 1979. – 432 с.
87. Жураковський Ю.П. Теорія інформації та керування / Ю.П. Жураковський, В.П. Полторак. – Київ. : Вища школа, 2001. – 255 с.
88. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники: в 3-х кн. Кн. вторая. / Б.Р. Левин – М. : Сов. радио, 1975. – 392 с.
89. Жовинский А.Н. Инженерный экспресс-анализ случайных процессов / А.Н. Жовинский, В.Н. Жовинский – М. : Энергия, 1979. – 112 с.
90. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон; пер. с англ. под ред. Ю. К. Беляева – М. : Мир, 1975. – 756 с.
91. Баранов В.М. Диагностика материалов и конструкций топливно-энергетического комплекса / [В.М. Баранов, А.М. Карасевич, Е.М. Кудрявцев и др.] – М. : Энергоатомиздат, 1999. – 360 с.
92. Кендэл М. Временные ряды / М. Кендэл; пер с англ. Ю.П. Лукашина – М. : Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
93. Надежность и эффективность в технике: Справочник в 10 т./ [ред. совет: В.С Авдуевский (предс.) и др.]. – М. : Машиностроение, Т.4: Методы подбора в надежности / [под общ. ред. В.А. Мельникова, Н.А. Северцева]. – 1987. – 280 с.
94. Надежность и эффективность в технике: Справочник в 10 т./ [ред. совет: В.С Авдуевский (предс.) и др.]. – М. : Машиностроение, 1986. – Т.1: Методология. Организация. Технология / [под ред. А.И. Рембезы]. – 1986. – 224 с.
95. Щапов П.Ф. Оптимизация полиномиальных уравнений косвенного измерения в условиях неопределенности метрологического эксперимента [Текст] / П.Ф. Щапов // Український метрологічний журнал. – 2004. – Вип. 2. – С. 5 – 8.
96. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер; пер. с англ. под ред. М.Б. Малютова – М. : Мир, 1980. – 456 с.
97. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / [под ред. В.С. Королюка]. – К. : Наукова думка, 1978. – 584 с.
98. Щапов П.Ф. Классификационные задачи при двухпараметровом измерении влажности [Текст] / П.Ф. Щапов, М.П. Качанов // Украинский метрологический журнал. – 2002. – Вып. 4. – С. 12-14.
99. Pollard J.H. A handbook of numerical and statistical techniques / J.H. Pollard – Cambridge University Press. : London – New York – Melbourne, 1976. – 344 p.
100. Переяслова И.Г. Статистика: [учебн. пособие] / И.Г. Переяслова. – [изд. 2-е.]. – Ростов Н/Д. : Феникс, 2005. – 282 с.

101. Айвазян С.А. Классификация многомерных наблюдений / С.А. Айвазян, З.И. Бежаева, О.П. Староверов – М. : Статистика, 1974. – 240 с.
102. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф – Л. : Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
103. Раудис Ш. Ограниченность выборки в задачах классификации [Текст] / Ш. Раудис // Сборник «Статистические проблемы управления» – Вильнюс, 1976. – Вып. 18. – С. 1-185.
104. Пикалис В. Ошибки линейного классификатора с независимыми признаками при малом объеме обучающей выборки [Текст] / В. Пикалис // Сборник «Статистические проблемы управления» – Вильнюс, 1973. – Вып. 5. – С. 69-101. явл. 21.03.2003; Надрук. 17.11.2003, Бюл. №11. – 6 с.
105. Станкевич Н. Я. Лучевая диагностика повреждений и заболеваний околоносовых пазух / Станкевич Н. Я. // Новости лучевой диагностики. – 1998. – № 4. – С. 8-9.
106. Keyhani K. Numerical simulation of airflow in the human nasal cavity / Keyhani K, Sherer P.W., Mozell M.M. // Journal of biomechanical engineering. – 1995. – Vol. 117. – P. 429-441.
107. Козлов В.С. Акустическая ринометрия и передняя активная ринометрия в исследовании носового цикла / Козлов В.С., Державина Л.Л., Шиленкова В.В // Российская ринология. – 2002. – № 1. – С. 4-11.
108. Безшапочний С.Б. Ендоскопічна ендоназальна функціональна хірургія: достоїнства, недоліки, перспективи / Безшапочний С.Б., Лобурець В.В. // Ринологія. – 2002. – № 2. – С. 3 – 10.
109. Щурук Г.З. Можливості використання комп'ютерної томографії з об'ємною реконструкцією в діагностиці захворювань порожнини носа, навколоносових пазух і лицьового черепа / Щурук Г.З. // Журнал вушних, носових і горлових хвороб. – 2001. – № 2. – С. 64 – 69.
110. Опыт применения спиральной компьютерной томографии с последующей виртуальной эндоскопией для планирования малоинвазивных хирургических вмешательств в ринологии / Гарюк Г.И., Меркулов А.Ю. Гарюк О.Г. [и др.] // Ринологія. – 2004. – № 3. – С. 32-34.
111. Сакало С.М. Надвисокі частоти в медицині (терапія і діагностика): Навч. посіб. / С.М. Сакало, В.В. Семенець, О.Ю. Азархов– Х.: ХНУРЕ; Колегіум, 2005. – 264 с.
112. Шамраева О.О. Выбор метода сегментации костных структур на томографических изображениях / Е.О. Шамраева, О.Г. Аврунин // Бионика интеллекта. – 2006. – № 2 (65). – С. 83-87.
113. Шамраева Е.О. Построение моделей черепных имплантов по рентгенографическим данным/ Е.О. Шамраева, О.Г. Аврунин// Прикладная радиоэлектроника.– 2005.– Т 4.– С. 441-443.
114. Аврунин О.Г. Реконструкция объемных моделей черепа и имплантата по томографическим снимкам/ О.Г. Аврунин, Е.О. Шамраева, А.А. Шамраев // Системи обробки інформації.– 2007. – Vol. 9(67). – С. 137-
115. Аврунин О.Г. Возможности реконструкции черепных дефектов по данным краниографии / О. Г. Аврунин, А. И. Бых, Е.О Шамраева //Технічна електродинаміка.– Тем. випуск «Силова електроніка та енергоефективність».– 2008.– Т. 4.– С. 113-116.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ ПОВЫШЕНИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ КОНТРОЛЯ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ	6
1.1. Анализ существующих методов повышения достоверности: Общие подходы к уменьшению неопределенности первичной информации об объекте контроля и диагностики	6
1.1.1. Структурно-алгоритмические методы	6
1.1.2. Методы, использующие временную избыточность	12
1.1.3. Общие подходы к повышению достоверности контроля и диагностики при неопределенности первичной информации	15
1.2. Анализ информационных свойств системы много- параметрического контроля стохастических сложных объектов	19
1.3. Анализ моделей контролируемых величин в условиях статистических неоднородностей измерительного эксперимента	24
1.3.1. Общая модель контролируемой величины.....	24
1.3.2. Математическая модель статической контролируемой величины с неоднородностями дискретного типа.....	27
1.3.3. Математическая модель динамической контролируемой величины с неоднородностями дискретного типа.....	31
1.3.4. Математическая модель контролируемой величины в условиях неоднородностей непрерывного и дискретного типов...	34
1.4. Анализ влияния систематической и случайной составляющих неопределенности измерения на достоверность контроля	36
1.5. Обобщение результатов анализа.....	39
2. УМЕНЬШЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ВЕЛИЧИН, ВОСПРОИЗВОДИМЫХ НЕСТАНДАРТНЫМИ ОБРАЗЦАМИ СОСТАВА ВЕЩЕСТВ	46
2.1. Тестирование контролируемых величин на отсутствие или наличие дискретной неоднородности	48
2.2. Исследование влияния нелинейности функции первичного преобразования на точность воспроизведения значений контролируемой величины	56
2.2.1. Вероятностная модель многопараметрических измерений.....	56
2.2.2. Свойства вероятностной модели при неопределенности значений воспроизводимых величин	59

3. АНАЛИЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВХОДНЫХ И КОНТРОЛИРУЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ	63
3.1. Анализ полиномиальных моделей преобразования при неопределенности входных величин	64
3.1.1. Базовые модели со случайными переменными. Выбор критерия адекватности модели	64
3.1.2. Информационный анализ регрессионной модели	67
3.1.3. Оптимизация регрессионной модели по максимуму ожидаемой информации.....	71
3.2. Анализ регрессионных моделей с априорно Неопределенными коэффициентами	75
3.2.1. Тестирование на линейность действительной функции измерительного преобразования	75
3.2.2. Тестирование функции измерительного преобразования на отсутствие смещения	81
3.3. Анализ случайных погрешностей регрессионного преобразования	84
4. СИНТЕЗ ПРОЦЕДУР ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ВЕЛИЧИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАЦИЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	90
4.1. Общая модель многоальтернативной параметрической дискриминации и выбор правила принятия решений	91
4.2. Выбор числа уровней контролируемой величины	94
4.3. Анализ ограничений на выбор максимальной размерности вектора контролируемых величин	103
4.4. Использование моделей параметрической дискриминации для коррекции погрешностей регрессионных преобразований	106
5. ОБНАРУЖЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ СВОЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТРОЛИРУЕМЫХ ВЕЛИЧИН	113
5.1. Синтез информативных параметров спектрально-нестационарных входных сигналов	113
5.2. Уменьшение интервала равномерного квантования во времени при ограничениях на длительность наблюдения	116
5.3. Планирование минимального времени наблюдения при контроле спектральных изменений	122
5.4. Стабилизация дисперсий информативных параметров в диапазоне изменений контролируемых состояний. Синтез комплексного информативного параметра	129
5.5. Синтез информативных параметров входных	

сигналов, нестационарных по математическому ожиданию	136
6. АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ	
СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО	
ТЕСТИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ	146
6.1. Анализ эффектов проявления неопределенности	
при информационных преобразованиях случайных	
контролируемых величин	146
6.1.1. Модели функционального преобразования	147
6.1.2. Модель алгоритмического преобразования	148
6.2. Оценка информативности тестовых статистик моделей	
дисперсионного анализа	150
6.3. Оценка информативности тестовых статистик моделей	
регрессионного анализа	153
6.4. Оценка информативности тестовых статистик	
дискриминантного анализа	156
 7. ИНЖЕНЕРНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ	
ДОСТОВЕРНОСТИ КОНТРОЛЯ И ДИАГНОСТИКИ ОБЪЕКТОВ	
С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ	161
7.1. Система технологического экспресс-контроля относительной	
влажности сыпучих материалов с априори неопределенной	
биохимической структурой	161
7.1.1. Описание объекта контроля. Выбор контролируемых	
величин	161
7.1.2. Выбор числа уровней контролируемой влажности	
по влияющим факторам. Оценка погрешностей	
преобразования контролируемых величин	162
7.1.3. Синтез регрессионной и алгоритмической моделей	
преобразования. Выбор оптимального числа уровней	
контролируемого параметра	165
7.2. Система диагностики и контроля нечетких	
функциональных состояний биологических объектов	167
7.3. Информационно-измерительная система	
медицинской диагностики	171
7.3.1 Основные принципы построения компьютерного	
риноманометра для тестирования носового дыхания	171
7.3.2. Анализ методов повышения достоверности	
риноманометрической диагностики	175
 ЛИТЕРАТУРА	182

Наукове видання

ЩАПОВ Павло Федорович
АВРУНІН Олег Григорович

ПІДВИЩЕННЯ ВИРОГІДНОСТІ КОНТРОЛЮ ТА ДІАГНОСТИКИ ОБ'ЄКТІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Монографія
(російською мовою)

Відповідальний за випуск *О.В. Полярус*

Авторська редакція

Комп'ютерна верстка *Н.В. Журавльової*

Підписано до друку 24.02.2010 р. Формат 60 × 84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman Cyr. Віддруковано на ризографії.
Ум.друк. арк. 11,2. Обл.-вид. арк. 13,5.
Зам. № 56/11. Тираж 300 прим. Ціна договірна.

ВИДАВНИЦТВО
Харківського національного автомобільно-дорожнього університету

Видавництво ХНАДУ, 61002, Харків-МСП, вул. Петровського, 25.
Тел. /факс: (057)700-38-72; 707-37-03, e-mail: rio@khadi.kharkov.ua

Свідоцтво Державного комітету інформаційної політики, телебачення
та радіомовлення України про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції, серія ДК №897 від 17.04 2002 р.