Проблемы бионики
1999. Вып. 50. С. 162–168

ХТУРЭ

УДК 519.81

В.В. БЕСКОРОВАЙНЫЙ

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЕКТОРОВ ПРЕДПОЧТЕНИЙ В МОДЕЛЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

Одной из актуальных проблем моделирования интеллектуальной деятельности человека является создание моделей процессов выбора решений, базирующихся на теории интеллекта [1] и теории принятия решений [2]. Практическая значимость таких моделей обусловлена необходимостью повысить степень автоматизации процедур выбора решений в системах планирования, управления, проектирования. Важнейшим при формализации процесса выбора решений из множества альтернатив является определение метрики для их ранжирования. В качестве методологической основы для построения метрики традиционно используется теория полезности, в соответствии с которой для каждой из альтернатив u из допустимого множества X может быть определено значение ее полезности (ценности) $P(u)$. При этом, например, $u \succ v \leftrightarrow P(u) > P(v)$; $u \sim v \leftrightarrow P(u) = P(v)$, $u, v \in X$.

В моделях многокритериального выбора наиболее часто применяются метрики, построенные на основе аддитивной полезности:

$$P(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i(u), \tag{1}$$

где $P(u)$ – полезность альтернативы u; n – количество частных критериев (факторов выбора); λ_i - i-я координата вектора предпочтений λ (коэффициент, характеризующий степень важности критерия k_i), при этом $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \ge 0$; $\xi_i(u) = \xi_i(k_i(u))$ – функция полезности критерия k_i.

Если известен вид всех функций полезности $\xi_i(u)$, $i = \overline{1,n}$ и определен вектор предпочтений λ, то выбор для аддитивной схемы (1) обычно сводится к задаче оптимизации вида

$$u^o = \arg\max_{u \in X} P(u). \tag{2}$$

Предположим, что определены функции полезности $\xi_i(u)$ для всех частных критериев k_i, $i = \overline{1,n}$. Среди семейства функций полезности выделяется функция вида [3]

$$\xi_i(u)=\left(\frac{k_i(u)-k_{i\,нх}}{k_{i\,нл}-k_{i\,нх}}\right)^{\alpha_i}, \tag{3}$$

где $k_i(x)$ – значение i-го частного критерия для решения u; $k_{i\,нл}, k_{i\,нх}$ – наилучшее и наихудшее значения i-го критерия; α_i – коэффициент, определяющий вид зависимости. При $\alpha_i = 1$ имеет место линейная зависимость, при $0 < \alpha_i < 1$ – выпуклая вверх, при $\alpha_i > 1$ – выпуклая вниз зависимости. Эти формы отражают соответственно безразличие, уклонение и стремление к риску лица, принимающего решения (ЛПР). Вид универсальной функции полезности и метод идентификации ее параметров можно найти в [4].

Для приведения многокритериального выбора к задаче оптимизации (2) достаточно определить элементы вектора предпочтений λ. Традиционно последняя задача решается экспертным путем методами непосредственной оценки, ранжирования, последовательных предпочтений, парных сравнений. К недостаткам экспертных методов относят высокую трудоемкость, субъективизм, относительно невысокую точность оценок. Преодолеть их можно, используя для оценки компонент вектора предпочтений λ информацию о фактах выборов ЛПР среди альтернатив $u,v \in X$ [3]. Этот подход, называемый бихевиористическим, базируется на методе компараторной идентификации [1].

Суть этого метода применительно к задаче оценки векторов предпочтений состоит в следующем [5]. ЛПР воспринимает в процессе выбора пару альтернативных вариантов $u,v \in X$, которые формируют в его сознании субъективные оценки их полезности x и z. Схема компараторной идентификации для рассматриваемой задачи может быть представлена в виде некоторого объекта S. Отличительной особенностью такой задачи считается то, что выходные сигналы элементов $x = P(u)$ и $z = P(v)$ являются внутренними сигналами объекта S и не могут быть определены в ходе эксперимента (выбора ЛПР). Они анализируются компаратором F с выдачей выходного сигнала:

$$z = F(u,v) = \begin{cases} 1, \text{если } (x,y) \in R(X); \\ 0, \text{если } (x,y) \notin R(X), \end{cases} \tag{4}$$

где $R(X) \subseteq X \times X$ – соответствующее отношение на множестве X: эквивалентности $R_E(X) = \{(x,y): x,y \in X,\ x \sim y\}$; строгого предпочтения $R_S(X)=\{(x,y): x,y \in X,\ x \succ y\}$; нестрогого предпочтения $R_N(X)=\{(x,y): x,y \in X,\ x \geq y\}$.

Если в результате сравнения альтернативных вариантов сформировано некоторое отношение $R(X)$, то определение вектора предпочтений λ может быть сведено к решению системы линейных уравнений или неравенств.

Наиболее информативным является отношение эквивалентности. Для отношения эквивалентности $R_E(X)$ из условия $P(u) = P(v)$, $(u,v) \in R_E(X)$ получим систему, включающую $m+1$ линейное уравнение

$$\eta_j(\lambda) \equiv \sum_i [\xi_i(v) - \xi_i(u)]\lambda_i = 0, \ (u,v) \in R_E(X), \ j = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\eta_{m+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n+1},$$

где m – мощность отношения $R_E(X)$.

Для отношений строгого $R_S(X)$ и нестрогого $R_N(X)$ предпочтений получим соответственно системы линейных неравенств и нормирующих условий:

$$\eta_j(\lambda) \equiv \sum_i [\xi_i(v) - \xi_i(u)]\lambda_i < 0, \ (u,v) \in R_S(X), \ j = \overline{1,k}, \tag{6}$$

$$\eta_{k+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{1,n+1},$$

здесь k – мощность отношения $R_S(X)$;

$$\eta_j(\lambda) \equiv \sum_i [\xi_i(v) - \xi_i(u)]\lambda_i \leq 0, \ (u,v) \in R_N(X), \ j = \overline{1,l}, \tag{7}$$

$$\eta_{l+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ i = \overline{1,n+1},$$

где l – мощность отношения $R_N(X)$.

Первые части систем (5)-(7) являются однородными подсистемами и задают множества плоскостей, проходящих через начало координат. Вторые их части, являясь нормирующими условиями, определяют секущую. Таким образом, выполняется условие Хаара и системы (5)-(7) в общем случае являются несовместными. Универсальным, наиболее эффективным с вычислительной точки зрения путем решения подобных систем является поиск так называемой чебышевской точки [6]. Он позволяет свести исходные задачи к задачам линейного программирования.

Введя дополнительную переменную λ_{n+1} в систему (5), можно сформировать систему ограничений $|\eta_j(\lambda)| \leq \lambda_{n+1}$, $j = \overline{1,m}$ в виде

$$-\eta_j(\lambda) + \lambda_{n+1} \geq 0, \ \eta_j(\lambda) + \lambda_{n+1} \geq 0, \ j = \overline{1,m}, \tag{8}$$

$$\eta_{m+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Минимизация $\lambda_{n+1} \to \min$ в условиях ограничений (8) является типичной задачей линейного программирования и позволяет получить чебышевскую точку системы (5). Геометрически чебышевская точка λ^o в этом случае имеет наименьшее по модулю уклонение $|r|$ от всей системы плоскостей уравнений (5):

$$|r| = \min_{\lambda} \max_{j} |\eta_j(\lambda)| = \max_{j} |\eta_j(\lambda^o)|. \tag{9}$$

Введем дополнительную переменную λ_{n+1} в первые k ограничений системы (6) для бинарного отношения $R_N(X)$ и потребуем, чтобы выполнялись условия $\eta_j(\lambda) \leq \lambda_{n+1}$, $j = \overline{1, k}$. Тогда отыскание чебышевской точки системы (6) сводится к задаче линейного программирования $\lambda_{n+1} \to \min$ в условиях ограничений

$$-\eta_j(\lambda) + \lambda_{n+1} \geq 0, \quad j = \overline{1, k}, \tag{10}$$

$$\eta_{k+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Если система (6) совместна, то $r = \min_{\lambda} \max_{j} \eta_j(\lambda) \leq 0$, и полученное решение λ^o будет максимально устойчивым к возможным изменениям ее коэффициентов. Если же система (6) несовместна, то $r > 0$, и получаем чебышевское приближение, представляющее собой значение минимального уклонения для рассматриваемой системы. В этом случае для системы предпочтений, описываемой бинарным отношением $R_N(X)$, не существует ни одного вектора весовых коэффициентов частных критериев λ, удовлетворяющего (6).

Подобным образом к задаче линейного программирования сводится поиск чебышевского решения (приближения) для системы линейных неравенств и ограничений вида (7). При этом если система является совместной, то $r < 0$, и получим ее чебышевское решение. Для несовместной системы $r \geq 0$ и получим ее чебышевское приближение.

Описанный подход идентификации векторов предпочтений применим во многих практических задачах: на множестве альтернатив X частично сформировано бинарное отношение $\tilde{R}(X)$, определяемое, например, лишь выбором ЛПР единственного варианта u [5]; отношение $R(\tilde{X})$ определено на некотором подмножестве множества альтернатив $\widetilde{X} \subset X$; бинарное отношение $\widetilde{R}(\widetilde{X})$ частично определено на некотором подмножестве множества альтернатив $\widetilde{X} \subset X$. Точность получаемых оценок в рассмотренных ситуациях ниже, чем в случае отношений максимальной мощности. Наиболее общим случаем для множеств альтернатив X больших размеров является частичное формирование ряда бинарных отношений $\widetilde{R}_E(\widetilde{X})$, $\widetilde{R}_N(\widetilde{X})$, $\widetilde{R}_S(\widetilde{X})$ на некотором подмножестве альтернативных вариантов $\widetilde{X} \subset X$. Соответствующая задача линейного программирования для отыскания чебышевской точки в этом случае имеет вид $\lambda_{n+1} \to \min$ в условиях ограничений

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{n+1} - \sum_i [\xi_i(v) - \xi_i(u)]\lambda_i \geq 0, \ (u,v) \in \widetilde{R}_E(\widetilde{X}) \cup \widetilde{R}_N(\widetilde{X}), \\
&\lambda_{n+1} + \sum_i [\xi_i(v) - \xi_i(u)]\lambda_i \geq 0, \ (u,v) \in \widetilde{R}_E(\widetilde{X}), \\
&\lambda_{n+1} - \sum_i [\xi_i(v) - \xi_i(u)]\lambda_i > 0, \ (u,v) \in \widetilde{R}_S(\widetilde{X}), \\
&\sum_i \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Недостатком решений в виде чебышевской точки (решения или приближения) служит их ориентация исключительно на экстремальные ограничения

$$\lambda^o = \arg \min_{\lambda} \max_{j} \varphi_j(\lambda), \tag{12}$$

где $\varphi_j(\lambda) = \eta_j(\lambda)$ или $\varphi_j(\lambda) = \left| \eta_j(\lambda) \right|$ Альтернативой ему могут служить обобщенные решения систем (5)-(7), учитывающие удаление от всего множества ограничений [7]. В частности, для отношения эквивалентности $R_E(X)$ в качестве решения системы (5) может быть выбран вектор с компонентами $\lambda_i^o = \lambda_i^* / \sum_i \lambda_i^*$, $i = \overline{1,n}$, являющимися решениями задачи

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \| A\lambda - b \|_E \cdot \tag{13}$$

Здесь $\| A\lambda - b \|_E$ – евклидова норма вектора невязки; $A = [a_{ij}]$ – матрица коэффициентов для системы (5), $a_{ji} = [\xi_i(v) - \xi_i(u)]$, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$; j – номер пары (u,v) в бинарном отношении $R_E(X)$; $a_{m+1,i} = 1$, $i = \overline{1,n}$;

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]^T$; $b = [0,0,...,1]^T$. Поиск решения (13) может быть сведен к задаче квадратичного математического программирования без ограничений вида

$$f = [(1 - \sum_i \lambda_i)^2 + \sum_j (\sum_i a_{ji} \lambda_i)^2] \rightarrow \min_\lambda, \qquad (14)$$

решение которой не вызывает затруднений.

Аналогично (13)-(14) могут быть определены компоненты вектора весовых коэффициентов λ для отношений строгого $R_S(X)$ и нестрогого $R_N(X)$ предпочтений на множестве альтернативных решений X. При этом для $R_N(X)$ элементы матрицы A определяются из условия

$$a_{ji} = [\xi_i(v) - \xi_i(u)],\ j = \overline{1,l},\ a_{l+1,i} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (15)$$

где j, l – соответственно номер пары (u,v) и их количество в бинарном отношении $R_N(X)$;

Для отношения $R_S(X)$ элементами матрицы A являются

$$a_{ji} = [\xi_i(v) - \xi_i(u)],\ j = \overline{1,k},\ a_{k+1,i} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (16)$$

где j, k – соответственно номер пары (u,v) и их количество в бинарном отношении $R_S(X)$.

В случае, когда на основании сравнения вариантов ЛПР может быть частично сформирован ряд отношений $\widetilde{R}_E(\widetilde{X})$, $\widetilde{R}_N(\widetilde{X})$, $\widetilde{R}_S(\widetilde{X})$ на некотором подмножестве альтернативных вариантов $\widetilde{X} \subset X$, элементы матрицы A могут быть определены следующим образом:

$$a_{ji} = [\xi_i(v) - \xi_i(u)],\ j = \overline{1,N},\ a_{N+1,i} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (17)$$

где N – мощность отношения $\widetilde{R}(\widetilde{X}) = \widetilde{R}_E(\widetilde{X}) \cup \widetilde{R}_N(\widetilde{X}) \cup \widetilde{R}_S(\widetilde{X})$.

Несмотря на то, что при вычислении значений коэффициентов матрицы A не учитывается конкретный вид отношения $\widetilde{R}(\widetilde{X})$, получаемые решения по качеству не уступают чебышевским точкам, так как учитывают удаление от всей системы ограничений решаемой задачи.

Предложенное обобщение метода компараторной идентификации векторов предпочтений для аддитивных моделей многофакторного выбора решений позволяет применять его для совокупности бинарных отношений эквивалентности, предпочтения и нестрогого предпочтения. Это охватывает все возможные ситуации, возникающие в практике выбора решений: пассивный, полуактивный и активный эксперименты с участием ЛПР. При этом не требуются затраты на организацию и проведение экспертизы, получаемые оценки являются менее субъективными и более точными, чем традиционно используемые экспертные.

Список литературы: 1.*Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Вища шк., 1987. 170 с. 2.Теория выбора и принятия решений / И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубинский, В.Б. Соколов. М.: Наука, 1982. 328 с. 3.*Петров Э.Г.* Организационное управление городом и его подсистемами (методы и алгоритмы). Х.: Вища шк., 1986. 144 с. 4. *Петров Э.Г., Бескоровайный В.В., Писклакова В.П.* Формирование функций полезности частных критериев в задачах многокритериального оценивания //Радиоэлектроника и информатика. 1997. №1. С. 71-73. 5. *Овезгельдыев А.О., Петров К.Э.* Компараторная идентификация моделей интеллектуальной деятельности // Кибернетика и системный анализ. 1996. №5. С. 48-58. 6. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 460 с. 7. *Бескоровайный В.В.* Идентификация параметров моделей многокритериального выбора решений //4-я Междунар. конф. "Теория и техника передачи, приема и обработки информации"("Новые информационные технологии"); научные труды /ХТУРЭ, Харьков-Туапсе, 1998. С. 275-276.

Поступила в редколлегию 20.11.98