

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Балансне компонування L_p сфер

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи ПМм-23-2

Іщенко А.Л.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність

113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма

Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Романова Т.Є.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджментуКафедра прикладної математикиРівень вищої освіти другий (магістерський)Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.**ЗАВДАННЯ**
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУздобувачеві Іщенко Андрію Леонідовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Балансне компонування L_p сферзатверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.3. Вихідні дані до роботи постановка задачі балансногокомпонування геометричних об'єктів визначених за допомогою L_p сфер

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання3. Програмна реалізація4. Результати обчислювального експерименту5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Романова Т.Є.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 68 с., 9 рис., 3 дод., 45 джерел.

ДОПУСТИМИ ВІДСТАНІ, КОМПОНУВАННЯ, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, НЕЛІНІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ, СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОЇ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ, УМОВА БАЛАНСУ. 3D ОБ'ЄКТИ, L_p НОРМА.

Об'єкт дослідження – процес оптимізації балансного компонування тривимірних геометричних об'єктів.

Предмет дослідження – математичне та комп'ютерне моделювання балансного компонування тривимірних опуклих об'єктів, що визначені L_p нормою.

Мета роботи – побудова математичної моделі та розробка алгоритму розв'язання задачі балансного компонування тривимірних опуклих об'єктів з використанням L_p норм.

У кваліфікаційній роботі досліджується нестандартна задача компонування геометричних об'єктів, що визначені L_p нормою (L_p сфер). Проведено огляд і аналіз існуючих моделей та методів розв'язання оптимізаційних задач компонування сферичних та несферичних об'єктів. Побудовано математичну модель як задачу нелінійного програмування та розроблено алгоритм розв'язання задачі компонування множини L_p сфер у L_p сферичному контейнері мінімального радіусу із урахуванням мінімально допустимих відстаней за умови балансу. Створено відповідне програмне забезпечення. Розроблено систему комп'ютерної візуалізації результатів оптимізації компонування L_p сфер. Проведено чисельні експерименти для різних L_p норм із застосуванням глобального солверу BARON та локального солверу IPOPT.

Розроблене програмне забезпечення може бути використано підприємствами та компаніями, що займаються оптимізацією проектування літальних апаратів у космічній техніці, дизайну структури матеріалів у матеріалознавстві, топологічної оптимізації у адитивному виробництві.

ABSTRACT

Introductory note: 68 pages, 9 figures, 3 appendixes, 45 sources.

ALLOWABLE DISTANCES, BALANCE CONDITION, COMPUTER
VISUALIZATION SYSTEM, LAYOUT, L_p NORM, MATHEMATICAL MODEL,
NONLINEAR OPTIMIZATION, 3D OBJECTS.

Object of research – the process of optimizing the balanced layout of three-dimensional geometric objects.

Purpose of research – mathematical and computer modeling of the balanced layout of three-dimensional convex objects, which are defined by the L_p norm.

Subject of study – constructing a mathematical model and developing a solution algorithm for the problem of balance layout of 3D convex objects using L_p norms.

Methods of research – geometric design theory for mathematical modeling of placement constraints of 3D convex objects defined by L_p norms and development of an algorithm for solving the balance layout of L_p spheres. The BARON solver for finding global extrema of nonlinear optimization problems, the IPOPT solver for finding local extrema of nonlinear optimization problems.

The qualification work studies a non-standard layout problem of geometric objects defined by the L_p norm (L_p spheres). A comprehensive review and analysis of models and methods for solving optimization layout problems of spherical and non-spherical objects is provided. A mathematical model is constructed as a nonlinear programming problem is constructed. An algorithm of solving the problem of layout a given set of L_p spheres into a L_p spherical minimum-radius container is developed, taking into account the minimal allowable distance subject to a balance condition. The corresponding software is created. A system for computer visualization of layout of L_p spheres is developed. Numerical experiments are presented for different L_p norms using the global solver BARON and the local solver IPOPT.

The developed software can be used by enterprises and companies engaged in the optimization of aircraft design in space engineering, the material structures in materials science, topological configurations in additive manufacturing.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	9
Вступ.....	10
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження.....	13
1.1 Елементи теорії геометричного проєктування.....	13
1.2 Засоби математичного моделювання для тривимірних об'єктів заданих евклідовою метрикою.....	15
1.3 Методологія розв'язання задачі геометричного проєктування.....	18
1.4 Постановка задач дослідження	20
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	22
2.1 Методологія розв'язання задачі	23
2.2 Математична модель задачі BPLpS.....	26
2.3 Метод розв'язання задачі BPLpS.....	29
Висновки за розділом 2.....	30
3 Програмна реалізація	32
3.1 Опис програми оптимізації компонування тривимірних Lp сфер із застосуванням AMPL.....	32
3.2 Опис системи Lp RenderTech	32
3.3 Опис інтерфейсу системи Lp RenderTech	33
3.4 Вимоги до системи Lp RenderTech	36
Висновки за розділом 3.....	36
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз.....	37
4.1 Обчислювальні експерименти для розв'язання задачі BPLpS із застосуванням глобального солвера BARON	37
4.2 Обчислювальні експерименти для розв'язання задачі BPLpS із застосуванням локального солвера IPOPT	37
Висновки за розділом 4.....	39
Висновки	41

	8
Перелік джерел посилання	43
Додаток А Лістинг програми оптимізації компонування тривимірних L_p сфер, із застосуванням AMPL.....	48
Додаток Б Лістинг системи L_p RenderTech	50
Додаток В Приклад глобального розв’язка задачі BPLpS, отриманого NLP солвером BARON	66

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

3D об'єкт – тривимірний геометричний об'єкт;

L_p сфера – тривимірний геометричний об'єкт заданий L_p нормою;

BPLpS (Balance Layout L_p Spheres) – задача компоновання тривимірних L_p сферичних об'єктів (L_p сфер) у L_p сферичному контейнері мінімального радіусу із урахуванням мінімально допустимих відстаней за умови балансу;

NLP – нелінійне програмування;

IPOPT – Interior Point OPTimizer, локальний солвер (local solver);

BARON – Branch-And-Reduce Optimization Navigator, глобальний солвер (global solver);

AMPL – A Mathematical Programming Language

L_p RenderTech є система комп'ютерної візуалізації (рендерингу) результатів оптимізації компоновання L_p сфер у L_p сфері.

ВСТУП

Актуальність теми. На сучасному етапі інтерес до ефективного розв'язання задач розміщення тривимірних (3D) об'єктів стрімко зростає. Це пояснюється надзвичайною складністю методів їхнього розв'язання та широким спектром практичних застосувань, у тому числі в таких важливих галузях науки та техніки: адитивні технології (розміщення декількох моделей із забезпеченням щільного заповнення усього об'єму робочої камери 3D принтера, що використовує SLS технологію); промислові технології (упаковка промислових матеріалів; задачі пакування в нанотехнологіях під час моделювання мікроструктури матеріалів); аерокосмічна галузь (компонування приладів та обладнання; моделювання структур ракетних палив); матеріалознавство (пакування гранул та їх ущільнення; взаємодія частинок між собою; моделювання структур бетону, піску, вугілля, пористих вибухових речовин та твердих матеріалів); хімічна промисловість (пакування каталізаторів; моделювання абсорбції газу); дослідження з охорони довкілля та неядерна енергетика (розміщення об'єктів у зонах підвищеного ризику); дослідження з енергетики (розміщення повітряних енергетичних установок).

Останні п'ять років у зарубіжній літературі з'являються публікації, в яких розглядаються практичні задачі, що зводяться до оптимізаційних задач упаковки тривимірних об'єктів, що мають несферичну форму. Оскільки задачі є NP-складними, під час їх розв'язання зазвичай використовуються евристичні методи. Деякі дослідники пропонують підходи на основі математичного моделювання і загальних процедур оптимізації. Однак, як правило, існуючі математичні моделі не враховують важливі для практики обмеження на мінімально допустимі відстані між об'єктами та обмеження балансу.

У зв'язку з цим наукового та практичного значення набуває проблема створення інтелектуальних інформаційних технологій розв'язання оптимізаційних задач упаковки тривимірних об'єктів, що задані неевклідовою метрикою, з урахуванням мінімально допустимих відстаней та обмежень балансу, в опуклі

контейнери мінімального об'єму, що потребує розробки: конструктивних засобів математичного і комп'ютерного моделювання обмежень розміщення; нових математичних моделей у вигляді задач нелінійного програмування; ефективних методів пошуку допустимих та локально оптимальних розв'язків із застосуванням сучасних NLP солверів (програмного забезпечення для розв'язання задач нелінійного програмування).

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є побудова математичної моделі та розробка алгоритму розв'язання задачі балансного компоунування тривимірних опуклих об'єктів з використанням L_p норм, Метою роботи є побудова математичної моделі та розробка алгоритму розв'язання задачі балансного компоунування тривимірних опуклих об'єктів з використанням L_p норм, що дозволяє значно спростити аналітичний опис умов розміщення 3D об'єктів складної конфігурації заданих евклідової метрикою.

Для досягнення поставленої мети поставлено наступні завдання:

- провести огляд застосувань і аналіз публікацій, що присвячені моделям та методам розв'язання оптимізаційної задачі компоунування геометричних об'єктів;
- побудувати математичну модель задачі компоунування заданої множини тривимірних L_p сферичних об'єктів (L_p сфер) у L_p сферичному контейнері мінімального радіусу із урахуванням мінімально допустимих відстаней за умови балансу (у подальшому, BPLpS – Balance Layout L_p Spheres) як задачу нелінійного програмування;
- розробити метод розв'язання задачі BPLpS;
- провести чисельні експерименти для розв'язання задачі BPLpS при різних значеннях параметру p L_p норми із застосуванням глобального солверу BARON та локального солверу IPOPT;
- розробити систему комп'ютерної візуалізації (редерингу) результатів оптимізації компоунування тривимірних L_p сферичних об'єктів.

Об'єктом дослідження є процес оптимізації балансного компоунування тривимірних геометричних об'єктів.

Предметом дослідження є математичне та комп'ютерне моделювання балансного компонування тривимірних опуклих об'єктів, що визначені L_p нормою.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи геометричного проєктування для математичного моделювання обмежень розміщення геометричних об'єктів визначених L_p нормами та розробки алгоритму розв'язання задачі балансного компонування L_p сфер. Солвер BARON для пошуку глобальних екстремумів задач нелінійної оптимізації, солвер IPOPT для пошуку локальних екстремумів задач нелінійної оптимізації.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, представлено на III International Scientific & Practical Conference «Learning & Teaching: in the World after War» (Kharkiv, October 8, 2024) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Елементи теорії геометричного проектування

Теорія геометричного проектування вивчає коло фундаментальних і прикладних проблем, спрямованих на реалізацію ідеї математичного та комп'ютерного моделювання процесу оптимального розміщення реальних об'єктів і створення ефективних методів оптимізації цього процесу відповідно до заданого критерію оптимальності та визначених технологічних обмежень.

Задачі геометричного проектування, зокрема задачі розміщення дво- та тривимірних (2D&3D) об'єктів, задачі розкрою та пакування (Cutting & Packing, C&P), мають широкий спектр застосувань в різних наукових та практичних галузях знань, у тому числі: промислові технології та сільське господарство, аерокосмічна галузь, біотехнології, медицина, матеріалознавство, хімія, дослідження з охорони довкілля та енергетика.

У зв'язку з цим наукового та практичного значення набуває проблема створення засобів математичного та комп'ютерного моделювання, сучасних методів оптимізації та засобів візуалізації різноманітних варіантів розміщення.

Це вимагає формалізації задач розміщення та побудови математичних моделей, що в свою чергу, дозволяє за вихідними даними одержати найкращий варіант розміщення відповідно до заданого критерію якості.

Оптимізаційні задачі геометричного проектування (задачі розкрою, пакування, компонування, завантаження, покриття) є NP-складними.

Задача геометричного проектування полягає в розміщенні множини геометричних об'єктів у деякої області (контейнері). Об'єкти повинні бути розміщені відповідно до умов розміщення, тобто без взаємного перекриття (умова неперетину) і повністю всередині контейнера (умова включення). Необхідно оптимізувати певний критерій, наприклад, максимізувати кількість об'єктів, ро-

зміщених у контейнері, або мінімізувати метричні характеристики контейнера для заданих об'єктів [2, 3].

Однією з найбільш часто досліджуваних задач розміщення є компоновання сферичних об'єктів. Умови неперетину сфер стверджують, що відстань між кожною парою центрів має бути принаймні сумою радіусів. Відповідно, умова включення гарантує, що відстань між центром сфери та центром сферичного контейнера не перевищує різниці їх радіусів. Области застосування варіюються від планування радіохірургічного лікування пухлин [4, 5] до вивчення структури наноматеріалів [6, 7]; від пакування сфер в теорії кодування [8, 9] до моделювання структур матеріалів в адитивному виробництві [10 – 16] і посилання в них.

Створення конструктивних засобів побудови адекватних математичних моделей у вигляді, що дозволяє застосувати до розв'язання задачі відомі методи локальної та глобальної оптимізації.

Таким чином виникає необхідність створення методології математичного моделювання оптимізаційних задач геометричного проектування.

Побудова математичних моделей задач розміщення засноване на аналітичному описі теоретико-множинних відносин між об'єктами (належності об'єкта області розміщення, розміщення об'єкта на допустимій відстані до межі області, неперетину об'єктів, розміщення кожної пари об'єктів на допустимій відстані, орієнтація об'єктів, зони заборони).

Міжнародна організація ESICUP поєднує провідних учених світу, які досліджують засоби, моделі та методи розв'язання задач розкрою та пакування.

Аналітичний опис взаємодій пари геометричних об'єктів, що мають довільну просторову форму (irregular objects), є фундаментальною базою створення методології математичного моделювання задач, пов'язаних з перетворенням геометричної інформації. Найбільш потужним засобом аналітичного моделювання відношень геометричних об'єктів є метод ϕ -функцій (the ϕ -function technique).

1.2 Засоби математичного моделювання для тривимірних об'єктів заданих евклідовою метрикою

У класі задач геометричного проектування як математичні моделі матеріальних об'єктів розглядається клас ϕ -об'єктів – це непорожні точкові множини $A \subset R^3$, які задовольняють такі вимоги: канонічно замкнута множина; внутрішність і замикання множини A мають один і той же гомотопічний тип; в будь-якій точці $x \in cl A$ існує окіл $U_x \subset cl A$, такий, що $int U_x$ і $cl U_x$ мають один і той же гомотопічний тип.

Нехай $A \subset R^3$ і $B \subset R^3$ – ϕ -об'єкти. Вважаємо, що, принаймні, один з об'єктів обмежений. Відповідно, місце розміщення об'єкта A визначається вектором змінних параметрів розміщення (v_A, θ_A) , де: $v_A = (x_A, y_A, z_A)$ – вектор трансляції, $\theta_A = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – кути Ейлера. Позначимо $u_A = (v_A, \theta_A, \lambda_A)$ вектор змінних об'єкта A і $u_B = (v_B, \theta_B, \lambda_B)$ вектор змінних об'єкта B . Надалі, об'єкт A , повернений на кути $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, трансльований на вектор v позначимо як $A(u) = \{p \in R^3 : p = v + M(\theta) \cdot p^0, \forall p^0 \in A^0\}$, де A^0 позначає нетрансльований і неповернутий об'єкт A , $M(\theta) = M(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – стандартна матриця повороту.

Однією з найважливіших задач під час моделювання розміщення об'єктів є побудова такої функції, яка б описувала відношення між парою ϕ -об'єктів A і B .

Означена функція має враховувати такі ситуації:

- об'єкти A і B не мають спільних точок, тобто $cl A \cap cl B = \emptyset$, де $cl(\cdot)$ – замикання об'єкта $(\cdot)$;
- об'єкти A і B перетинаються, тобто $int A \cap int B \neq \emptyset$, де $int(\cdot)$ – внутрішність об'єкта $(\cdot)$;
- об'єкти A і B дотикаються, тобто $fr A \cap fr B \neq \emptyset$ та $int A \cap int B = \emptyset$, де $fr(\cdot)$ – границя об'єкта $(\cdot)$.

Визначення 1.1. Неперервна, усюди визначена функція $\Phi^{AB}(u_A, u_B)$ нази-

вається ϕ -функцією об'єктів $A(u_A)$ і $B(u_B)$, якщо вона задовольняє такі властивості:

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) < 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) \neq \emptyset,$$

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0, \text{ якщо } \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset \text{ і } \text{fr}A(u_A) \cap \text{fr}B(u_B) \neq \emptyset,$$

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) > 0, \text{ якщо } A(u_A) \cap B(u_B) = \emptyset,$$

тут $\text{fr}A$ позначає топологічну границю, а $\text{int } A$ – внутрішність об'єкта A .

З метою аналітичного опису обмежень на допустимі відстані між геометричними об'єктами введено поняття нормалізованої ϕ -функції.

Нехай задано обмеження на мінімально допустиму відстань ρ між ϕ -об'єктами $A(u_A)$ і $B(u_B)$, тобто $\text{dist}(A(u_A), B(u_B)) \geq \rho$, де $\text{dist}(A(u_A), B(u_B)) = \min_{a \in A, b \in B} \text{dist}(a, b)$ – евклідова відстань між $A(u_A)$ і $B(u_B)$,

$\text{dist}(a, b) = \sqrt{(x_a^2 - x_b^2) + (y_a^2 - y_b^2) + (z_a^2 - z_b^2)}$ – евклідова відстань між точками a і b в $\mathbb{R}^3$.

Визначення 1.2. ϕ -функція $\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$ називається нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням між об'єктами $A(u_A)$ і $B(u_B)$, за умови $\text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset$, тобто

$$\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) = \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) \Leftrightarrow \text{int } A(u_A) \cap \text{int } B(u_B) = \emptyset.$$

У термінах ϕ -функцій обмеження $\text{dist}(A(u_A), B(u_B)) \geq \rho$ еквівалентне нерівності $\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) \geq \rho$, де $\tilde{\Phi}^{AB}$ – нормалізована ϕ -функція об'єктів $A(u_A)$ і $B(u_B)$, $u_A = (x_A, y_A, z_A, \theta_A)$ і $u_B = (x_B, y_B, z_B, \theta_B)$.

Побудова нормалізованих ϕ -функцій для довільних ϕ -об'єктів – досить складна процедура. Через це для моделювання мінімально допустимих відстаней між об'єктами пропонується використовувати вільні від радикалів псевдо-

нормалізовані ϕ -функції.

Визначення 1.3. Неперервна всюди визначена функція $\widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$ називається псевдонормалізованою ϕ -функцією об'єктів $A(u_A)$ і $B(u_B)$, якщо виконуються такі властивості:

$$\widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) > 0, \text{ якщо } \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) > \rho,$$

$$\widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) = 0, \text{ якщо } \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) = \rho,$$

$$\widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) < 0, \text{ якщо } \text{dist}(A(u_A), B(u_B)) < \rho.$$

Зокрема,

$$\text{dist}(A(u_A), B(u_B)) > \rho \Leftrightarrow \tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) \geq \rho \Leftrightarrow \widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) \geq 0,$$

$$\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) = \rho \Leftrightarrow \widehat{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) = 0.$$

Ґрунтуючись на визначеннях 1.1 – 1.3 зазначених вище, загальна математична модель задачі геометричного проєктування зі змінними метричними характеристиками області розміщення має вигляд

$$\min_{(p,u) \in W} \kappa,$$

де $W = \{(p, u) : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, q > g \in I_n, \Phi_i(p, u_i) \geq 0, i \in I_n, \mu(u) \geq 0\}$ – область допустимих розв'язків.

У загальному випадку, ϕ -функція може бути визначено як негладка функція

$$\Phi = \max_{k=1, \dots, \eta} f_k = \max_k \min_t f_{kt},$$

де f_{kt} – гладка функція.

Тому область допустимих розв’язків W можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
 W &= W_1 \cup \dots \cup W_s \cup \dots \cup W_\eta, \\
 W_s &= \{u \in R^\sigma : Y_s(u) \geq 0\}, \quad Y_s(u) = \min_t f_s^t, \quad t \in I_s, \\
 \kappa(u^*) &= \text{extr}\{\kappa(u_1^*), \dots, \kappa(u_s^*), \dots, \kappa(u_\eta^*)\}, \\
 \kappa(u_s^*) &= \text{extr}_{u \in W_s \subset R^\sigma} \kappa(u), s = 1, 2, \dots, \eta.
 \end{aligned}$$

Оцінка кількості змінних задачі – $O(n)$, а кількості нерівностей, що описують область допустимих рішень W – $O(n^2)$.

1.3 Методологія розв’язання задачі геометричного проєктування

Для розв’язання оптимізаційної задачі математичної оптимізації, описаної в попередньому розділі, тобто знаходження глобального мінімуму (або принаймні хорошого наближення до нього) цільової функції F застосовується наступна стратегія.

Враховуючи початкове наближення, тобто точку $U = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ в просторі допустимих розв’язків W , алгоритм виконує локальний пошук локального мінімуму функції F .

Точка $U \in W$ відповідає певному розміщенню об’єктів $T_1, \dots, T_n$ усередині T_0 , і переміщення точки $U \in W$. Алгоритм дозволяє одночасний рух усіх об’єктів $T_1, \dots, T_n$ у області T_0 .

Завдяки використанню ϕ -функцій алгоритм здатний розміщувати всі об’єкти одночасно, тобто здійснювати локальний пошук у багатовимірному просторі рішень. У загальному випадку ϕ -функції є кусково-гладкими неперер-

рвними функціями.

Для допустимої початкової точки $U_1 = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in W$, алгоритм знаходить локальний мінімум цільової функції. Точніше, враховуючи, що $U_1 \in W$ алгоритм утворює підмножину $W_{j,1} \subset W$ простору розв'язків W , що містить U_1 , тобто $U_1 \in W_{j,1}$.

Тоді алгоритм знаходить $U_2 \in W_{j,1}$ таку, що $F(U_2) \leq F(U)$ для всіх $U \in W_{j,1}$ (або принаймні в околі U_2), тобто $U_2 \in W_{j,2}$. Далі алгоритм формує іншу підмножину U_3 таку, що $F(U_3) \leq F(U)$, і знаходить таку точку $U \in W_{j,2}$, що для всіх (або принаймні в околі U_3) $F(U_3) < F(U_2)$. Цю процедуру повторюють, поки не буде знайдено локальний мінімум цільової функції.

Щоб знайти глобальний мінімум F у просторі розв'язків W , слід застосувати вичерпний пошук, тобто пошук по кожній підмножині $W_j \subset W$, що в більшості випадків є нереальним завданням, оскільки кількість цих підмножин може бути порядку 10^{10} . На практиці можна перевірити лише кілька (добре вибраних) початкових точок $U_1, \dots, U_k \in W$, тому проблема пошуку допустимих початкових розміщень стає першорядним.

У багатьох промислових застосуваннях досвідчені фахівці «вручну» \ manually (за допомогою систем CAD systems) створюють високоякісний макет, після чого можна швидко запустити програму комп'ютерної оптимізації, щоб максимально (локально) покращити результат.

У багатьох інших практичних застосуваннях, однак, немає доступних «експертних розміщень» (expert layouts), і потрібно покладатися на створені комп'ютером початкові домовленості. У таких ситуаціях використовуються різні евристики (та «метаетеуристики»), найпростішою та найпопулярнішою, є *bottom-left* процедура розміщення. Вона розміщує об'єкти один за одним у найнижчому лівому вільному куті контейнера. Під час позиціонування об'єкта процедура враховує раніше розміщені об'єкти, спочатку щоб уникнути перетин, а потім (у деяких реалізаціях) для заповнення пустот, які залишилися порожніми

на попередніх етапах, або на кожному кроці об'єкт, який буде розміщено наступним, вибирається випадковим чином з ймовірністю, пропорційною його довжині.

Багато дослідників використовують різні евристики, щоб змінити експертні компоновки, та отримати інші розміщення (і таким чином знайти інші компоненти простору допустимих розв'язків W). Можна поміняти місцями два випадково вибрані об'єкти або застосувати більш складні стратегії, такі як «алгоритми пошуку табу» або імітований відпал, або різні генетичні алгоритми.

У деяких реалізаціях об'єктам (тимчасово) дозволено перетинатись та рухатися один через одного, щоб алгоритм міг виконувати ширший пошук у просторі рішень. У цьому випадку необхідно оцінити (і штрафувати) ступінь перекриття об'єктів, щоб алгоритм поступово розділив їх і врешті-решт прийшов до можливого макета (без перекриття). Стосовно цього ϕ -функції також можуть бути корисними, оскільки вони забезпечують таку функцію, як оцінка ступеня перекриття. Інші автори розробляють різні засоби для штрафних функцій перетину.

1.4 Постановка задач дослідження

У даній роботі розглянуто новий клас задач геометричного проектування компонування геометричних об'єктів, визначених L_p нормою [35]. Показано, що різні тривимірні геометричні форми можна генерувати, вибираючи відповідні значення параметру L_p норми, зберігаючи при цьому простоту опису умов розміщення.

Додаткові обмеження на допустимі розміщення, мотивовані застосуваннями, також можуть бути враховані. Наприклад, у розробці дизайну супутникового модуля умови мінімально допустимих відстаней між обладнанням та умова рівноваги/балансу накладаються, щоб забезпечити близькість між центром тяжіння контейнера та центром тяжіння системи об'єктів [36 – 38].

Метою класичних задач пакування є пошук щільного розміщення, наприклад, максимізація заповнення контейнера або пошук мінімального контейнера. Однак у багатьох сучасних застосуваннях концепція щільної упаковки була переглянута.

У розрідженій компоновки відстань між об'єктами, а також між об'єктами і контейнером повинна бути урахована. Дисперсне (розріджене) компонування виникає, наприклад, при термічної обробки деталей, надрукованих на 3D, від неспечених частинок порошку [39]. Створення системи пустотних структур для мінімізації ваги деталей, які отримані за допомогою 3D друку, вимагає допустимої відстані між пустотами для забезпечення механічної міцності виробів [40].

У кваліфікаційній роботі:

- сформулювати задачу компонування заданої множини тривимірних Lp сферичних об'єктів (Lp сфер) у Lp сферичному контейнері мінімального радіусу із урахуванням мінімально допустимих відстаней за умови балансу (BPLpS – Balance Layout Lp Spheres);
- побудувати математичну модель задачі BPLpS як задачу нелінійного програмування;
- запропонувати метод розв'язання задачі BPLpS;
- провести чисельні експерименти для розв'язання задачі BPLpS при різних значеннях параметру p із застосуванням глобального солверу BARON та локального солверу IPOPT;
- розробити систему комп'ютерної візуалізації (редерингу) результатів оптимізації компонування тривимірних Lp сферичних об'єктів.

2 ВИБІР ТА ОБГРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Компонування об'єктів, що мають певну симетрію, можна знайти, наприклад, у біології [17, 18] та матеріалознавстві [19]. Так звані супереліпсоїди широко використовуються для представлення різних форм частинок у гранульованих і м'яких речовинах [20, 21]. Відповідні задачі пакування/компонування зазвичай вирішуються шляхом чисельного моделювання з використанням методів скінченних елементів.

Компонування (пакування) об'єктів несферичної форми є однією з найскладніших задач у класі задач геометричного проектування. Різні геометричні засоби використовуються для моделювання умов розміщення, таких як растровий метод, NoFit Polygon, метод ϕ -функцій [22, 23]. Метод ϕ -функцій є ефективним засобом математичного моделювання відношень геометричних об'єктів. Для розв'язання оптимізаційних задач розміщення метод ϕ -функцій дозволяє використовувати математичне програмування. Перевагою методу ϕ -функцій є можливість урахування мінімально допустимих відстаней при описі обмежень розміщення об'єктів, що часто потрібно при проектуванні компоновок.

Задачі компонування, що виникають при управлінні багаторесурсними проектами ($n \geq 4$), можна знайти в [24]. Один із підходів спростити аналітичний опис умов розміщення – апроксимація об'єктів складної конфігурації набором сфер. Компонування об'єктів, що представлені об'єднаннями сфер, утворює важливий клас задач нерегулярного розміщення, що виникають при вивченні багатокомпонентних структур, наприклад, у медицині та нанотехнологіях [25, 26]. Тісно пов'язана з цим задача покриття областей сферами. У роботах [27, 28, 29] нерегулярні об'єкти апроксимовані об'єднанням сфер.

Більшість публікацій вивчають компонування сфер, що визначені евклідовою метрикою. Однак можна розглянути багато прикладних і теоретичних задач компонування, наприклад, створення квадратних, шестикутних або дванадцятикутних датчиків CMS [30] або розміщення квадратів у квадратному ко-

нтейнері [31] як пакування сфер, визначених відповідною нормою. Використання неевклідових норм у задачах пакування двовимірних сфер запропоновано у [32- 35]. Розробка засобів моделювання відношень геометричних об'єктів, що задані неевклідовими нормами є актуальною проблемою, а спрощення опису обмежень розміщення для тривимірних об'єктів складної конфігурації є актуальною проблемою / challenging problem.

2.1 Методологія розв'язання задачі

Нехай задано сімейство Lp сфер

$$S_i(\xi_i) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \xi_i\| \leq r_i\}, \quad i \in I := \{1, \dots, m\},$$

із заданим радіусом $r_i > 0$ і змінним центром $\xi_i \in R^3$, де $\|x\|$ означає норму. Однією з найвідоміших норм є Lp норма, яка визначається як

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

де p – дійсне число і

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_k |x_k|$$

є нескінченною нормою.

Термін Lp сфери (Lp сферичного об'єкта) використовується, щоб підкреслити, що широкий спектр просторових форм **може бути згенерований** у тривимірному просторі шляхом вибору параметру p Lp норми [35].

Для різних $p > 1$ L_p норми породжують різні опуклі об'єкти у $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$, наприклад, діаманти (ромби), сфери (круги), багатогранники (багатокутники) з “округлими” кутами, куби (квадрати). Рис. 2.1 ілюструє деякі форми в $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$ для $p = 1, p = 1.5, p = 2, p = 3, p = 6$ і $p = \infty$.

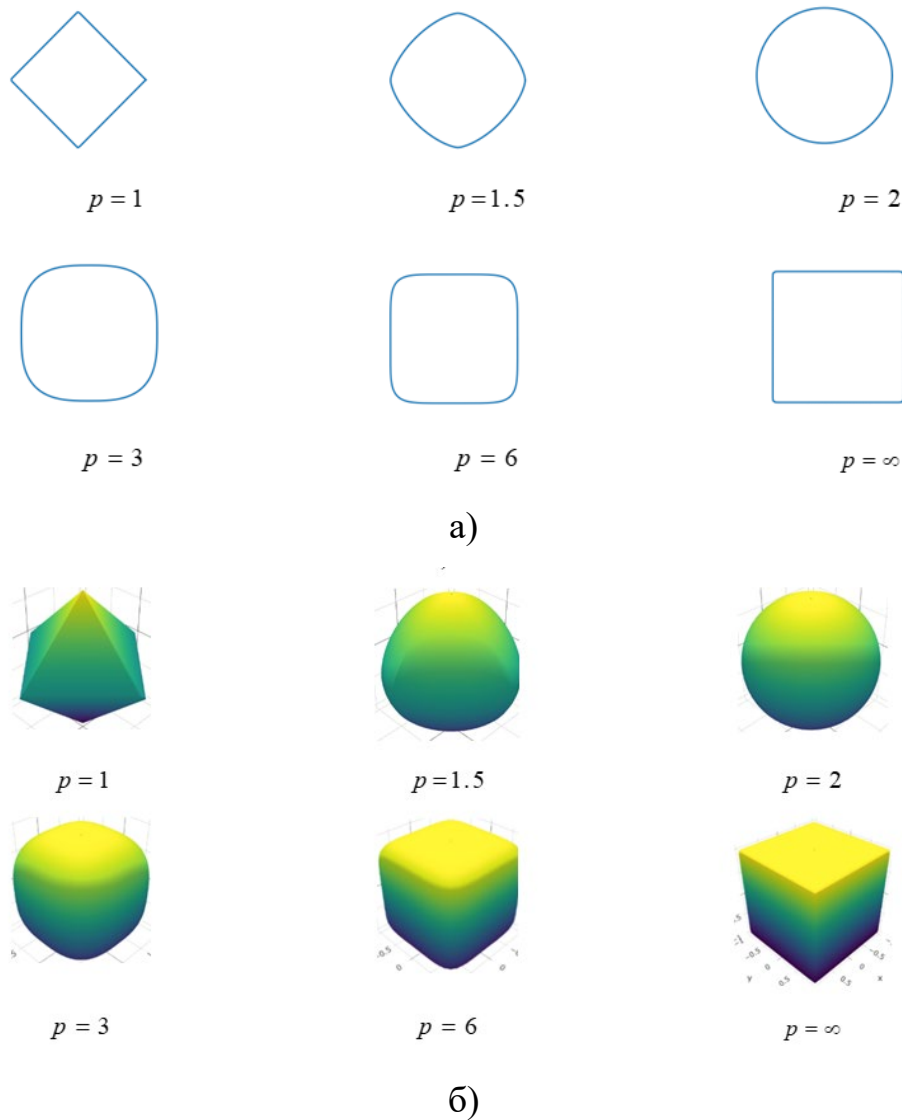


Рисунок 2.1 – Одиничні L_p -сфери для різних $p \geq 1$: а) у $\mathbb{R}^2$; б) у $\mathbb{R}^3$

Задача BPLpS. Знайти розміщення сімейства L_p сфер $S_i(\xi_i)$, $i \in I$ у більшій L_p сфері $S_0(\xi_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \xi_0\| \leq R\}$, $n=2, 3$ (у подальшому, контейнер) мінімального радіусу за умов:

а) включення L_p сфери $S_i(\xi_i)$, $i \in I$ у сферичний контейнер $S_0(\xi_0)$,

$$-\|\xi_i - \xi_0\| + (R - r_i) \geq 0, \forall i \in I;$$

б) неперетину кожної пари Lp сфер $S_i(\xi_i)$ та $S_j(\xi_j)$

$$\|\xi_i - \xi_j\| + (r_i - r_j) \geq 0, \forall (i, j) \in \Lambda,$$

$$\Lambda = \{(i, j) : i \in I, j \in I, i > j\};$$

в) відповідності (балансу) між центрами тяжіння системи Lp сфер і контейнером

$$\sum_i^m w_i \xi_i = \xi_0,$$

w_i є вагою $S_i(\xi_i)$, $i \in I$;

г) мінімально допустимої відстані для включення

$$-\|\xi_i - \xi_0\| + (R - r_i - \rho) \geq 0, \forall i \in I,$$

що стверджує, що відстань між Lp сферою $S_i(\xi_i)$ і межею контейнера S_0 становить принаймні $\rho \geq 0$.

Якщо $\rho = 0$ для всіх $i \in I$, то ця умова збігається з обмеженням включення а);

д) мінімально допустимої відстані для неперетину

$$\|\xi_i - \xi_j\| - (r_i + r_j + \rho) \geq 0, \forall (i, j) \in \Lambda,$$

що гарантує, що відстань між двома Lp сферами $S_i(\xi_i)$ та $S_j(\xi_j)$ становить принаймні $\rho \geq 0$. Якщо $\rho = 0$, то ця умова збігається з умовою неперетину б).

2.2 Математична модель задачі BPLpS

Задача BPLpS формулюється як модель нелінійного програмування

$$\min_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, R)} R \quad (2.1)$$

за умов

$$\Phi_i(\xi_i, R) = -\|\xi_i - \xi_0\| + (R - r_i - \rho) \geq 0 \text{ для } i \in I, \quad (2.2)$$

$$\Phi_{ij}(\xi_i, \xi_j) = \|\xi_i - \xi_j\| - (r_i + r_j + \rho) \geq 0 \text{ для } (i, j) \in \Lambda, \quad (2.3)$$

$$\sum_i^m w_i \xi_i = \xi_0. \quad (2.4)$$

У задачі (2.1) – (2.4), Φ_i є псевдонормалізованою ϕ -функцією Lp сфери $S_i(\xi_i)$ та множини $\mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\xi_0)$, Φ_{ij} є псевдонормалізованою ϕ -функцією Lp сфер $S_i(\xi_i)$ та $S_j(\xi_j)$ обмеження (2.2) – (2.3) визначають умови допустимих відстаней для неперетину та включення, а нерівність (2.4) є умовою балансу. Останнє гарантує, що центр тяжіння системи сфер $S_i(\xi_i)$, $i \in I$ збігається з центром контейнера $S_0(R)$.

У тривимірному випадку модель (2.1) – (2.4) має вигляд

$$\min_{(\xi, R)} R \quad (2.5)$$

за умов

$$\Phi_i(\xi_i, R) = -\left(\|x_i - x_0\|^p + \|y_i - y_0\|^p + \|z_i - z_0\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + (R - r_i - \rho) \geq 0, \quad (2.6)$$

$$i \in I,$$

$$\Phi_{ij}(\xi_i, \xi_j) = -\left(\|x_i - x_j\|^p + \|y_i - y_j\|^p + \|z_i - z_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + (r_i - r_j - \rho) \geq 0, \quad (2.7)$$

$$(i, j) \in \Lambda,$$

$$\sum_i^m w_i x_i = x_0, \quad \sum_i^m w_i y_i = y_0, \quad \sum_i^m w_i z_i = z_0. \quad (2.8)$$

Альтернативна модель може бути представлена так:

$$\min_{(\xi, R)} R \quad (2.9)$$

за умов

$$\Phi_i(\xi_i, R) = -\left(\|x_i - x_0\|^p + \|y_i - y_0\|^p + \|z_i - z_0\|^p\right) + (R - r_i - \rho)^p \geq 0, \quad (2.10)$$

$$R \geq r_i + \rho, \quad i \in I,$$

$$\Phi_{ij}(\xi_i, \xi_j) = -\left(\|x_i - x_j\|^p + \|y_i - y_j\|^p + \|z_i - z_j\|^p\right) + (r_i - r_j - \rho)^p \geq 0, \quad (2.11)$$

$$(i, j) \in \Lambda,$$

$$\sum_i^m w_i x_i = x_0, \quad \sum_i^m w_i y_i = y_0, \quad \sum_i^m w_i z_i = z_0. \quad (2.12)$$

Модель (2.5) – (2.8) для нескінченної норми $\|x\|_\infty$ приймає вигляд

$$\min_{(x, y, R)} R \quad (2.13)$$

за умов

$$\Phi_i(\xi_i, R) = - + (R - r_i - \rho) \geq 0, \quad i \in I, \quad (2.14)$$

$$\Phi_{ij}(\xi_i, \xi_j) = \max\{|x_i - x_j| + |y_i - y_j| + |z_i - z_j|\} + (r_i - r_j - \rho) \geq 0, \quad (2.15)$$

$$(i, j) \in \Lambda,$$

$$\sum_i^m w_i x_i = x_0, \sum_i^m w_i y_i = y_0, \sum_i^m w_i z_i = z_0, \quad (2.16)$$

де $x = (x_i, i \in I)$, $y = (y_i, i \in I)$, $z = (z_i, i \in I)$.

Більшість локальних і глобальних комерційних розв'язувачів NLP (нелінійного програмування) не дозволяють пряме використання негладких виразів $\max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}$ в моделях NLP.

Тому перетворимо модель (2.13) – (2.16) на еквівалентну оптимізаційну задачу, застосовуючи підхід, запропонований у статті [35]

$$\min_{(x, y, v, u, \pi, R)} R$$

за умов

$$\begin{aligned} v_i &= \pi_i^x |x_i - x_0| + \pi_i^y |y_i - y_0| + \pi_i^z |z_i - z_0| \text{ для } i \in I, \\ v_i &\leq R - r_i - \rho, \quad i \in I, \\ v_i &\geq |x_i - x_0|, \quad v_i \geq |y_i - y_0|, \quad v_i \geq |z_i - z_0|, \quad i \in I, \\ \pi_i^x + \pi_i^y + \pi_i^z &= 1, \quad \pi_i^x \geq 0, \quad \pi_i^y \geq 0, \quad \pi_i^z \geq 0, \quad i \in I, \\ u_{ij} &= \pi_{ij}^x |x_i - x_j| + \pi_{ij}^y |y_i - y_j| + \pi_{ij}^z |z_i - z_j|, \quad (i, j) \in \Lambda, \\ u_{ij} &\geq |x_i - x_j|, \quad u_{ij} \geq |y_i - y_j|, \quad u_{ij} \geq |z_i - z_j|, \quad u_{ij} \geq r_i + r_j + \rho, \quad (i, j) \in \Lambda, \\ \pi_{ij}^x + \pi_{ij}^y + \pi_{ij}^z &= 1, \quad \pi_{ij}^x \geq 0, \quad \pi_{ij}^y \geq 0, \quad \pi_{ij}^z \geq 0 \text{ для } (i, j) \in \Lambda, \\ \sum_i^m w_i x_i &= x_0, \quad \sum_i^m w_i y_i = y_0, \quad \sum_i^m w_i z_i = z_0, \end{aligned}$$

де $x = (x_i, i \in I)$, $y = (y_i, i \in I)$, $z = (z_i, i \in I)$, $v = (v_i, i \in I)$, $u = (u_{ij}, (i, j) \in \Lambda)$,
 $\pi = (\pi_i^x, \pi_i^y, \pi_i^z, i \in I, \pi_{ij}^x, \pi_{ij}^y, \pi_{ij}^z, (i, j) \in \Lambda)$.

2.3 Метод розв'язання задачі BPLpS

Для розв'язання задачі (2.9) – (2.12) використовується стратегія мульти-старта, яка включає три основних етапи. На першому етапі формується множина допустимих стартових точок. Другий етап реалізує пошук локальних мінімумів задачі (2.9) – (2.12) для кожної стартової точки, отриманої на першому етапі. На третьому етапі вибирається найкращий з отриманих на другому етапі розв'язків. Цей результат вважається розв'язком задачі (2.9) – (2.12).

Для побудови допустимих стартових точок задачі компонування 3D Lp сфер застосуємо наступний алгоритм.

Крок 1. Генеруємо множину випадкових точок $v'_i = (x'_i, y'_i, z'_i)$, $i \in I_n$ в межах одиничної Lp сфери Ω' . Формуємо вектор $v' = (v'_1, \dots, v'_n)$.

Крок 2. Збільшуємо Lp сфери $\lambda S_i(v_i), i \in I_n$ в межах одиничної Lp сфери Ω' з центром $(0,0,0)$, розв'язуючи таку задачу нелінійного програмування:

$$\max_{(v, \lambda)} \lambda \quad (2.16)$$

за умов

$$\omega_{ij}(v_i, v_j, \lambda) \geq 0, (i, j) \in \Lambda, \quad (2.17)$$

$$\omega_i(v_i, \lambda) \geq 0, i \in I_n, \quad (2.18)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad (2.19)$$

$$\sum_i^m w_i x_i = x_0, \sum_i^m w_i y_i = y_0, \sum_i^m w_i z_i = z_0, \quad (2.20)$$

починаючи з допустимої точки $(v', \lambda' = 0)$.

У задачі (2.16) – (2.20) змінна λ є параметром масштабування кожної Lp

сфери $S_i, i \in I_n$, $\omega_{ij}(v_i, v_j, \lambda)$ є ϕ -функцією $\lambda(S_i(v_i) \oplus S(\rho))$ і $\lambda S_j(v_j)$ для $(i, j) \in \Lambda$, $\omega_i(v_i, \lambda)$ є ϕ -функцією об'єктів $\lambda(S_i(v_i) \oplus S(\rho))$ і $\bar{\Omega}' = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } \Omega'$.

Зауважимо, що нерівності (2.17) та (2.18) забезпечують умови неперетину та включення для масштабованих Lp сфер $\lambda(S_i(v_i) \oplus S(\rho))$, $i \in I_n$, враховуючи обмеження (2.19).

Позначимо точку локального мінімуму задачі (2.16) – (2.20) як (v'', λ'') .

Крок 3. Задаємо $S^{(0)} = \frac{1}{\lambda''}$, $x_i^{(0)} = \frac{x_i''}{\lambda''}$, $y_i^{(0)} = \frac{y_i''}{\lambda''}$, $z_i^{(0)} = \frac{z_i''}{\lambda''}$.

Крок 4. Формуємо вектор $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)})$.

Точку $(v^{(0)}, R^{(0)})$ використаємо як допустиму стартову точку задачі (2.13) – (2.16).

Крок 5. Реалізуємо пошук локально оптимальних розв'язків задачі (2.13) – (2.16) з використанням методу декомпозиції, який дозволяє звести задачу великої розмірності $O(n^2)$ до послідовності задач нелінійного програмування значно меншої розмірності $O(n)$, що ґрунтується на алгоритмі, наведеному в [42].

На рисунку 2.2 наведено блок схему алгоритму.

Висновки за розділом 2

Другий розділ присвячений вибору та обґрунтуванню методу розв'язання задачі дослідження. Сформульовано задачу компонування тривимірних Lp сферичних об'єктів (Lp сфер) у Lp сферичному контейнері мінімального радіусу із урахуванням мінімально допустимих відстаней за умови балансу, BPLpS (Balance Layout Lp Spheres). Побудовані математичні моделі задачі BPLpS як моделі нелінійного програмування для різних Lp норм, $\|x\|_\infty$ $p > 1$, включаючи нескінченну норми $\|x\|_\infty$. Описано метод розв'язання для пошуку локальних

екстремумів задачі BPLpS із застосуванням стратегії мультістарту.

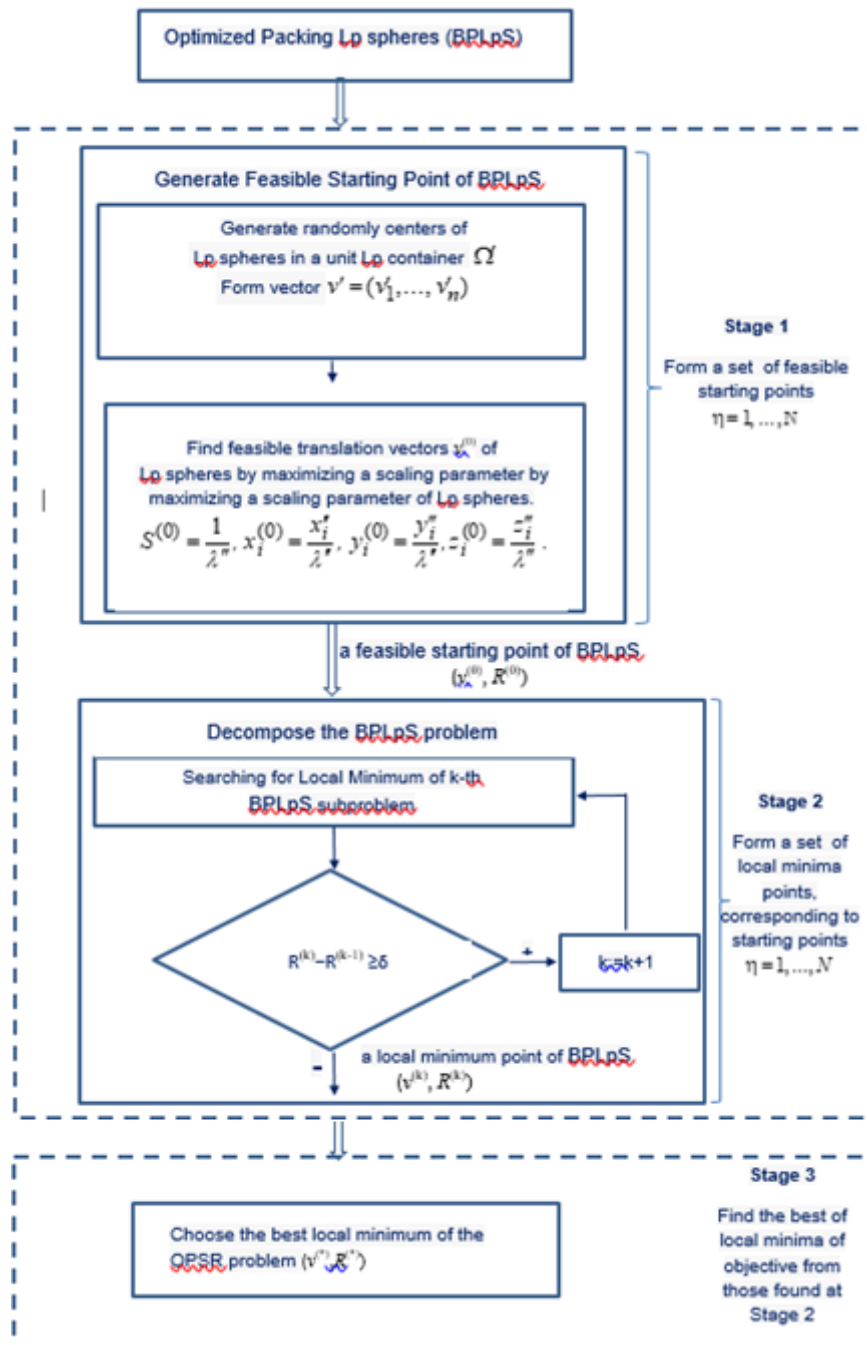


Рисунок 2.2 – Блок-схема алгоритму

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Опис програми оптимізації компонування тривимірних L_p сфер, із застосуванням AMPL

Використовуючи платформу NEOS та мову для задання моделі AMPL, реалізуємо наведений в розділі 2 алгоритм для моделі нелінійного програмування для різних L_p норм. Та знайдемо розв’язок для різних заданих параметрів. Результати розрахунку представлені в розділі 4. А лістинг програми представлений в додатку А.

3.2 Опис системи L_p RenderTech

Система L_p RenderTech є програмним засобом рендерингу результатів оптимізації компонування L_p сфер (далі ПЗ або L_p RenderTech) у L_p сфері (контейнеру) зі заданими параметрами кожної L_p сфери, як то власне p параметр, координати центру, радіус, колір з альфа параметром і розмір деталізації. ПЗ побудований на базі таких засобів:

- .Net фреймворк версії 8;
- фреймворк Windows Presentation Foundation (WPF);
- бібліотеки Nzy3d.Wpf;
- бібліотеки OpenTK;
- бібліотеки MIConvexHull.

Після отримання даних від користувача та запуску рендерингу ПЗ, використовуючи дані для L_p сфер, виконує розрахунок масиву точок поверхні кожної L_p сфери. Після цього ПЗ спрямовує отриманні масиви точок до бібліотеки MIConvexHull, де використовуючи QuickHull алгоритм [45], виконується групування точок в трикутники, з яких будується апроксимована поверхня ко-

жної L_p сфери. Варто зазначити, що для групування точок в трикутники в QuickHull алгоритмі використаний стандартний допуск на відстань до площин, який становить 1^{-10} .

Після чого за допомогою фреймворка WPF та бібліотек Nzy3d.Wpf і OpenTK формується трьохвимірна сцена з L_p сферами.

3.3 Опис інтерфейсу системи L_p RenderTech

Головне вікно L_p RenderTech має вигляд на рис. 3.1. В центральній частині відображається сцена з L_p сферою за замовченням. За допомогою маніпулятора миша можливо зміна ракурсу огляду сцени та масштабу сцени.

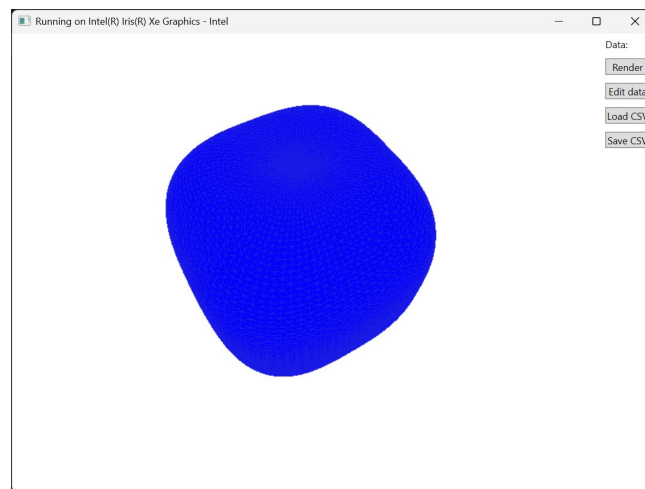
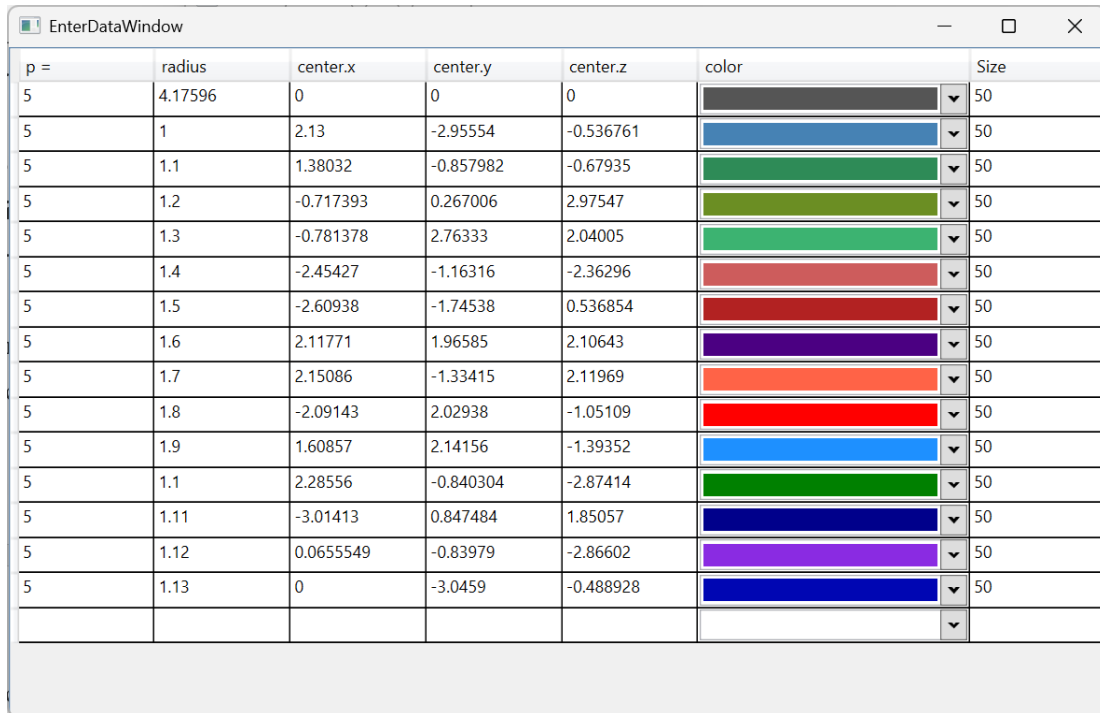


Рисунок 3.1 – Головне вікно системи L_p RenderTech

В правій стороні основного вікна розміщенні основні елементи керування. Кнопка «Render» відповідає за оновлення рендерингу сцени, що дозволяє оновити відображення сцени після зміни даних. Кнопка «Load CSV» дозволяє завантажити данні з файлу формату CSV. Кнопка «Save CSV» дозволяє зберегти поточні данні в файл формату CSV. Кнопка «Edit data» викликає діалогове вікно (представлене на рис. 3.2) для вводу та редагування поточних да-

них для рендерингу сцени. Для вводу достатньо використовувати останній пус-
тий рядок, зміни будуть прийняти при зміні фокусу на інший рядок або після
використання клавіші клавіатури «Enter».



p =	radius	center.x	center.y	center.z	color	Size
5	4.17596	0	0	0		50
5	1	2.13	-2.95554	-0.536761		50
5	1.1	1.38032	-0.857982	-0.67935		50
5	1.2	-0.717393	0.267006	2.97547		50
5	1.3	-0.781378	2.76333	2.04005		50
5	1.4	-2.45427	-1.16316	-2.36296		50
5	1.5	-2.60938	-1.74538	0.536854		50
5	1.6	2.11771	1.96585	2.10643		50
5	1.7	2.15086	-1.33415	2.11969		50
5	1.8	-2.09143	2.02938	-1.05109		50
5	1.9	1.60857	2.14156	-1.39352		50
5	1.1	2.28556	-0.840304	-2.87414		50
5	1.11	-3.01413	0.847484	1.85057		50
5	1.12	0.0655549	-0.83979	-2.86602		50
5	1.13	0	-3.0459	-0.488928		50

Рисунок 3.2 – Діалогове вікно вводу і редагування даних

Дані представлені в табличній формі, де кожний рядок це окрема Lp сфера, яка має параметр p , радіус, координати центру, колір відображення, та параметр деталізації (чим більший параметр, тим більш детально буде прорахована Lp сфера).

Значення для параметру p , радіусу, координат центра можуть бути як цілими так і дійсними в десятковій формі. Значення параметру деталізації має бути цілим числом.

Для вводу кольору відображення Lp сфери використовується стандартне для ОС Windows діалогове вікно вибору кольору представлене на рис. 3.3, яке має дві вкладки, що дозволяють 2 різних способів вибору кольору. Також варто зазначити що вкладка «Advanced» дозволяє вводити значення альфа каналу кольору, що дозволяє змінювати прозорість відображення Lp сфери.

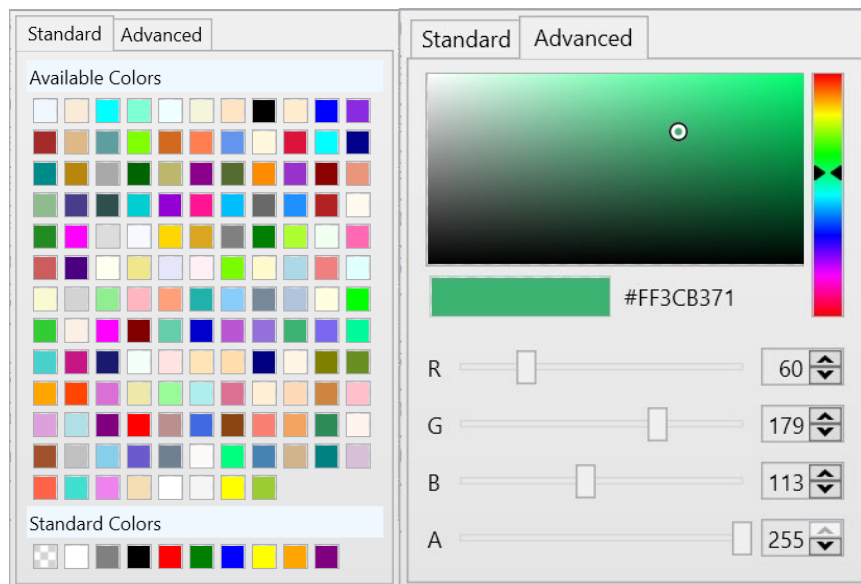


Рисунок 3.3 – Діалогове вікно вводу кольору

Після змінних даних варто застосувати кнопку «Render», яка запустить обчислення зі зміненими даними і оновить відображення сцени. На рис. 3.4 представлений приклад оновленої сцени.

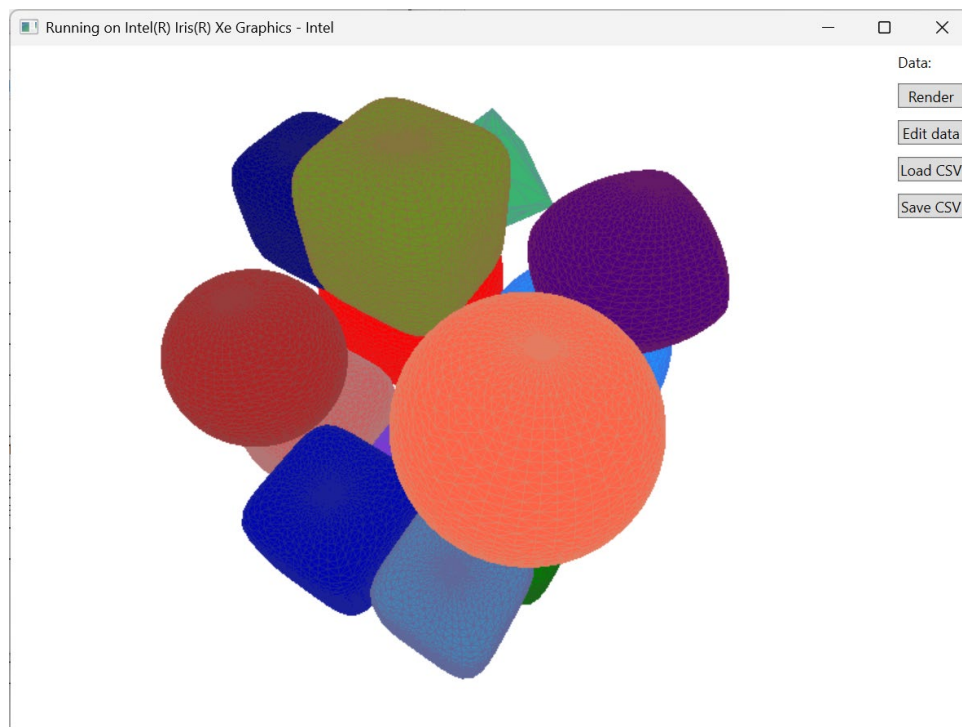


Рисунок 3.4 – Оновлене головне вікно системи *Lp* RenderTech

При роботі з форматом CSV в *Lp* RenderTech треба слідувати вимогам,

так щоб файл мав розширення csv, а контент мав першу строчку виду: «pNorm,radius,X,Y,Z,color,size». Далі наступні строчки мають містити дані *Lp* сфери через кому, де спочатку значення *p* параметру, радіусу, значення *X* координати центру, значення *Y* координати центру, значення *Z* координати центру, значення кольору в шістнадцятковому форматі та значення розміру деталізації, як наприклад в даній строчці: «5,1,2.13,-2.95554,-0.536761, FF4682B4,50»

3.4 Вимоги до системи *Lp* RenderTech

Система *Lp* RenderTech для своєї роботи використовує середовище ОС Windows версії 11 та вище. Сам ПЗ не має локалізації і використовує англomовний інтерфейс та ввід даних ігнорує локалізацію ОС. Однак ПЗ використовує деякі елементи інтерфейсу ОС Windows, які будуть використовувати поточну локалізацію.

Рекомендоване апаратне забезпечення має мати графічний прискорювач як вбудований в центральний процесор так і дискретний від його потужності залежить швидкість роботи ПЗ. Решта компонентів мають бути відповідати рекомендованим вимогам до ОС Windows версії 11 та вище.

Висновки за розділом 3

Третій розділ присвячено опису програмної реалізації. Наведено опис програми оптимізації компонування тривимірних *Lp* сфер із застосуванням платформи AMPL. Опис розробленої комп'ютерної системи *Lp* RenderTech візуалізації результатів оптимізації компонування *Lp* сфер у *Lp* сфері (контейнеру), включаючи дизайн інтерфейсу та вимоги до системи.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

У цьому розділі надано результати обчислювальних експериментів для розв'язання задачі BPLpS для різних Lp норм.

4.1 Обчислювальні експерименти для розв'язання задачі BPLpS із застосуванням глобального солвера BARON

У першій групі прикладів розглянуто компоновки $m = 5$ Lp сфер з радіусами $r[1] := 1.0$, $r[2] := 1.1$, $r[3] := 1.2$, $r[4] := 1.3$, $r[5] := 1.4$, $\{w_i = r_i, i = 1, \dots, m\}$. На рис. 4.1 наведено конфігурації Lp сфер у сферичному контейнері мінімального радіуса R^* для різних значень параметра $p \geq 1$, що відповідають розв'язкам задачі BPLpS, отриманим глобальним солвером BARON [43].

4.2 Обчислювальні експерименти для розв'язання задачі BPLpS із застосуванням локального солвера IPOPT

У другій групі прикладів наведено компоновки $m = 14$ Lp сфер з радіусами, $\{w_i = r_i, i = 1, \dots, m\}$ для різних значень параметра $p \geq 1$, що відповідають розв'язкам, отриманим локальним солвером IPOPT [44].

На рисунку 4.3а наведено конфігурації Lp сфер у сферичному контейнері мінімального радіуса R^* для різних значень параметра $p \geq 1$, що відповідають розв'язкам задачі BPLpS, отриманим локальним солвером IPOPT для, $p = 0$, а на рисунку 4.3б – для, $p = 0.5$.



$p=1, R^*=2.69999, time=25116.1 \text{ (sec)}$



$p=1.5, R^*=2.78883, time=3588.66 \text{ (sec)}$



$p=3, R^*=2.82728, time=462.023 \text{ (sec)}$



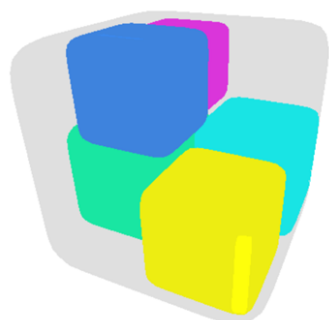
$p=4, R^*=2.78045, time=37.549 \text{ (sec)}$



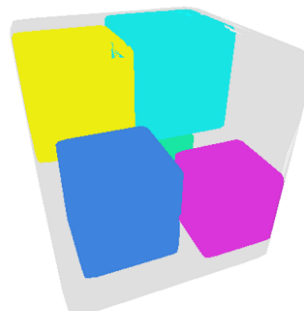
$p=5, R^*=2.75327, time=18.0505 \text{ (sec)}$



$p=7, R^*=2.7208, time=6.65768 \text{ (sec)}$



$p=9, R^*=2.70792, time=8.00313 \text{ (sec)}$



$p=\infty, R^*=2.70002, time=3586.49 \text{ (sec)}$

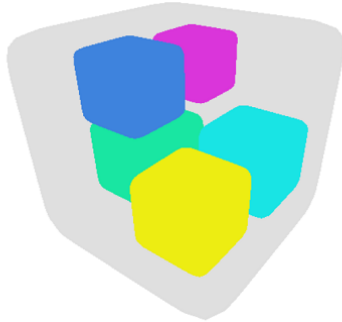
Рисунок 4.1 – Щільне компонування Lp сфер, що відповідають глобальним розв'язкам задачі BPLpS для першої групи прикладів: компонування, $\rho = 0$



$p=7, R^*=3.48508, time=10.4347 \text{ (sec)}$



$p=9, R^*=3.46583, time=8.50744 \text{ (sec)}$



$p=10, R^*=3.46073, time=4.63688 \text{ (sec)}$



$p=1.5, R^*=3.59456, time=0.576392 \text{ (sec)}$

Рисунок 4.2 – Розріджене компонування Lp сфер, що відповідають глобальним розв'язкам задачі BPLpS для першої групи прикладів, $p = 0.5$

Висновки за розділом 4

У четвертому розділі надано результати обчислювальних експериментів для двох груп прикладів, що відповідають глобальним та локальним розв'язкам задачі BPLpS (щільного а розрідженого компонування) для різних Lp норм $p > 1$, отриманих із застосуванням глобального солвера BARON та локального солвера IPOPT.

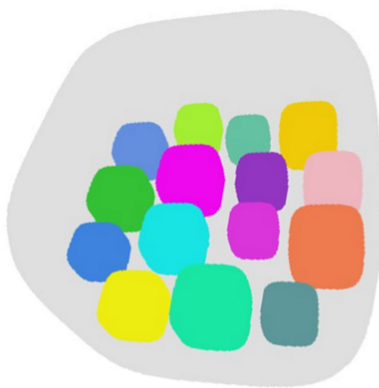


$p=5, R^*=5.43294, time=6.58233 \text{ (sec)},$



$p=7, R^*=6.41586, time=0.697117 \text{ (sec)}, d=0,$

а)



$p=8, R^*=5.54294, d=0.5, m=10$
 $time = 7.88233 \text{ (sec)}$



$p=4, R^*=6.54186, d=0.5, m=15$
 $time = 0.871197 \text{ (sec)}$

б)

Рисунок 4.3 – Компонування Lp сфер, що відповідають локальним розв'язкам задачі BPLpS для другої групи прикладів: а) щільне комплектування, б) розріджене комплектування

ВИСНОВКИ

У роботі досліджено задачу компоновання тривимірних геометричних об'єктів, яка має широкий спектр практичних застосувань, які варіюються від планування радіохірургічного лікування пухлин до вивчення структури наноматеріалів; від пакування сфер в теорії кодування до моделювання структур матеріалів в адитивному виробництві. Компоновання об'єктів, що мають певну симетрію, можна знайти, наприклад, у біології та матеріалознавстві. Компоновання об'єктів несферичної форми є однією з найскладніших задач у класі задач геометричного проектування. Додаткові обмеження на допустимі розміщення, мотивовані застосуваннями, також можуть бути враховані. Наприклад, у розробці дизайну супутникового модуля умови мінімально допустимих відстаней між обладнанням та умова рівноваги (баланс між центром тяжіння контейнера та центром тяжіння системи об'єктів) накладаються.

Більшість публікацій вивчають компоновання об'єктів, що визначені евклідовою метрикою. Розробка засобів моделювання відношень геометричних об'єктів, що задані неевклідовими нормами є актуальною проблемою. Це дозволить значно спростити аналітичний опис обмежень розміщення для тривимірних об'єктів складної конфігурації.

Різні геометричні фігури можна генерувати використовуючи різні параметри одної з найвідоміших норм – L_p норм. Розглянуто клас неперервних задач компоновання опуклих об'єктів, визначених як сферичні об'єкти в термінах сімейства L_p норм. Сформульовано задачу компоновання L_p сферичних об'єктів у L_p сферичному контейнері мінімального об'єму за умови балансу. Побудовано математичну модель як задачу нелінійного програмування. Показано, що це формулювання може бути викладено для різних геометричних форм, вибравши відповідне значення параметру L_p норми, зберігаючи при цьому простоту опису умов розміщення. Розроблено метод розв'язання з застосуванням алгоритму побудови допустимих стартових розміщень та методу де-

композиції для пошуку локальних мінімумів. Наведені результати обчислень для прикладів з використанням солверів BARON, IPOPT, що продемонстрували потенційні можливості методології для широкого спектру задач компоновання 3D об'єктів.

Передбачається, що L_p контейнер і L_p сфери мають однакові форми. Це стосується, наприклад, задач кластеризації, коли ряд подібних об'єктів замінюється одним більшим об'єктом такої самої форми. Однак, використовуючи відповідність $\|x\|_p \leq \|x\|_r$ для $x \in R^3$, $1 \leq r \leq p$ між значеннями різних L_p норм, отримані рішення можна використовувати для побудови допустимих розв'язків для задач компоновання, де форми для L_p контейнера та L_p сфер відрізняються. Це може бути корисно, наприклад, при побудові допустимих стартових розміщень в евристичних підходах.

У подальших дослідженнях було б також цікаво перевірити приклади задач вищої розмірності, які виникають, наприклад, у багаторесурсному управлінні проектами [24].

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Ishchenko A., Romanova T. Balance packing 2D spheres defined by arbitrary norms. Learning & Teaching: in the World after War: Conference Proceedings of III International Scientific & Practical Conference, Kharkiv, Ukraine, 2024. P. 215. doi: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13991498>.
2. Bennell J.A., Oliveira J.F. The geometry of nesting problems: A tutorial. *European Journal of Operational Research*. 2008. Vol. 184, P. 397–415.
3. Bennell J.A., Oliveira J.F.. A tutorial in irregular shape packing problems. *Journal of the Operational Research Society*. 2009. Vol. 60 (Suppl 1), P. 93–105.
4. Wang J. Packing of unequal spheres and automated radiosurgical treatment planning. *Journal of Combinatorial Optimization*. 1999. Vol. 3, P. 453–463.
5. Sutou A., Dai Y. Global optimization approach to unequal sphere packing problems in 3D. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2002. Vol. 114, P. 671–694.
6. Recent advances on modelling of structures of multi-component mixtures using a sphere packing approach / L. Burtseva, B. Valdez Salas, R. Romero, F. Werner. *International Journal of Nanotechnology*. 2016. Vol. 13. P. 44–59.
7. Ma P., Chan H.-K. Densest-packed columnar structures of hard spheres: An investigation of the structural dependence of electrical conductivity. *Front. Phys.* 2021. Vol. 9. doi: <https://doi.org/10.3389/fphy.2021.778001>.
8. Conway J.H., Sloane N.J.A. Sphere packings, lattices and groups. New York: Springer. 1999. P. 706.
9. Cullina D., Kiyavash N. Generalized sphere-packing bounds on the size of codes for combinatorial channels. *IEEE Transactions of Information Theory*. 2016. Vol. 62, P. 4454–4465.
10. Optimized filling of a given cuboid with spherical powders for additive manufacturing / Duriagina Z., Lemishka I., Litvinchev I. [et al.]. *Journal of the Operations Research Society of China*. 2021. Vol. 9, P. 853–868.
11. Stress-field driven conformal lattice design using circle packing algorithm /

F. Liu, M. Chen, L. Wang [et al.]. *Heliyon*. 2023. Vol. 9(3). P. 144–148.

12. Castillo I., Kampas F.J., Pinter J.D. Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications. *European Journal of Operational Research*. 2008. Vol. 191, P. 786–802.

13. Hifi M., M'Hallah R. A literature review on circle and sphere packing problems: models and methodologies. *Advances in Operations Research*. 2009. P. 150–154.

14. Scheithauer G. Introduction to Cutting and Packing Optimization. *Problems, Modeling Approaches, Solution Methods*. Springer. 2018.

15. Optimized packing multidimensional hyperspheres: a unified approach / Y. Stoyan, G. Yaskov, T. Romanova. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2020 Vol. 17. P. 6601–6630.

16. Rao Y., Luo Q. Intelligent Algorithms for Packing and Cutting Problem. Springer. 2022. P. 340.

17. Dechant P.-P., Twarock R. Models of viral capsid symmetry as a driver of discovery in virology and nanotechnology. *Biochemist*. 2021. Vol. 43(1). P. 20–24.

18. Evolution of a virus-like architecture and packaging mechanism in a repurposed bacterial protein / S. Tetter, N. Terasaka, A. Steinaue [et al.] . *Science*. 2021. Vol. 372(6547). P. 1220–1224.

19. Understanding the structure and dynamics of local powder packing density variations in metal additive manufacturing using set Voronoi analysis / A. Phua, J. Smith, C.H.J. Davies [et al.]. *Powder Technology*. 2023. Vol. 418, P. 118–272.

20. Zhao C., Gao Q., Chen Y. Application of parametric function in construction of particle shape and discrete element simulation. *Powder Technology*. 2021. Vol. 387. P. 481–493.

21. Influence of various DEM shape representation methods on packing and shearing of granular assemblies / B. Soltanbeigi, A. Podlozhnyuk, C. Kloss. [et al.]. *Granular Matter*. 2021. Vol. 23. P. 26.

22. Irregular packing problems: A review of mathematical models / A.A.S. Leao, F.M.B. Toledo, J.F. Oliveira [et al.] . *European Journal of Operational*

Research. 2020. Vol. 282. P. 803–822.

23. Two-dimensional irregular packing problems: A review / B. Guo, Y. Zhang, J. Hu [et al.]. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2022. Vol. 8. doi: <https://doi.org/10.3389/fmech.2022.966691>.

24. Fasano G. Solving Non-standard Packing Problems by Global Optimization and Heuristics. Cham: Springer. 2014. P. 135

25. Treatment Planning for Self-Shielded Radiosurgery / JR. Adler, A. Schweikard, Y. Achkire [et al.]. *Cureus*. 2017. Vol. 9(9):e1663. doi: <https://doi.org/10.7759/cureus.1663>.

26. Boles M.A., Talapin D.V. Many-body effects in nanocrystal superlattices: departure from sphere packing explains stability of binary phases, *Journal of the American Chemical Society*. 2015. Vol. 137(13). P. 4494–4502.

27. Banhelyi B., Palatinus E., Levai B.L. Optimal circle covering problems and their applications. *Central European Journal of Operations Research*. 2015. Vol. 23, P. 815–832.

28. An optimized covering spheroids by spheres / A. Pankratov, T. Romanova, I. Litvinchev, J.A. Marmolejo-Saucedo. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, P. 1846. doi: <https://doi.org/10.3390/app10051846>

29. Romanova T., Litvinchev I., Pankratov A. Packing ellipsoids in an optimized cylinder. *European Journal of Operational Research*. 2020. Vol. 285, P. 429–443.

30. Prvan M., Ozegovic J., Misura A.B. On calculating the packing efficiency for embedding hexagonal and dodecagonal sensors in a circular container. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. Vol. 3, P. 1–16. doi: <https://doi.org/10.1155/2019/9624751>.

31. Arruda V.P.R., Mirisola L.G.B., Soma N.Y. Almost squaring the square: optimal packings for non-decomposable squares. *Pesquisa Operacional*. 2022. Vol. 42. e262876. P.1–13. doi: <https://doi.org/10.1590/0101-7438.2022.042.00262876>.

32. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Approximate packing: Integer programming models, valid inequalities and nesting. *Optimization and Its*

Applications. Cham: Springer. 2015. Vol. 105. P. 117–135.

33. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Packing circular-like objects in a rectangular container. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015. Vol. 54, P. 259–267.

34. Litvinchev I., Infante L., Ozuna L. Using different norms in packing circular objects. *Intelligent Information and Database Systems*. 2015. Cham: Springer. P. 540–548.

35. A New Class of Irregular Packing Problems Reducible to Sphere Packing in Arbitrary Norms / I. Litvinchev, A. Fischer, T. Romanova, P. Stetsyuk. *Mathematics*. 2024, Vol. 12, P. 935. doi: <https://doi.org/10.3390/math12070935>.

36. Kovalenko A., Romanovav T., Stetsyuk P., Balance packing problem for 3D-objects: mathematical model and solution methods. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51(4), P. 556–565.

37. Stetsyuk P., Romanova T., Scheithauer G. On the global minimum in a balanced circular packing problem. *Optimization Letters*. 2016. Vol. 10. P. 347–1360.

38. Fasano G., Pinter J.D. Modeling and Optimization in Space Engineering: State of the Art and New Challenges, New York: Springer. 2019. P. 481.

39. Sparsest packing of two-dimensional objects / T. Romanova, A. Pankratov, I. Litvinchev [et al.], *International Journal of Production Research*. 2021, Vol. 59(13), P. 3900–3915. doi: <https://doi.org/10.1080/00207543.2020>.

40. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing / T. Romanova, Y. Stoyan, A. Pankratov [et al.]. *International Journal of Production Research*. 2021 Vol. 59(2), P. 560–575. doi: <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1697836S>.

41. Narici L., Beckenstein E. Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics (Second ed.). Boca Raton: CRC Press, 2011. P. 591.

42. Decomposition Algorithm for Irregular Placement Problems / T. Romanova, Y. Stoyan, A. Pankratov [et al.]. *Intelligent Computing and Optimization. ICO 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2020, Vol. 1072, P. 214–221. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-33585-4>.

43. Sahinidis N.V., BARON 21.1.13: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs. User's manual. 2021. P. 30.
44. Wächter A. , Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, Mathematical Programming. 2006, Vol. 106(1), P. 25–57.
45. MIConvexHull. URL: <https://designengrmlab.github.io/MIConvexHull/> (дата звернення: 09.01.2025).