Для вычисления функций $I_n(x)$ предварительно заносим «1» в R_0, R_4, R_7, R_8; значение «x» — в R_1, а величины m и $4n^2$ — в R_2 и R_5 соответственно. Тогда Программа 1[0] расчета модифицированной функции Бесселя $I_n(x)$ n-го порядка запишется, как показано в табл. 1.

Таблица 1

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИП1	61	17	ИП5	65	34	+	10
01	$F\pi$	20	18	ПП4	64	35	П4	44
02	×	12	19	Fx^2	22	36	ИП0	60
03	2	02	20	—	11	37	1	01
04	×	12	21	ИП0	60	38	+	10
05	$F\sqrt{}$	21	22	÷	13	39	П0	40
06	П3	43	23	ИП6	66	40	ИП2	62
07	ИП1	61	24	×	12	41	1	01
08	Fe^x	16	25	ИП7	67	42	—	11
09	ИП3	63	26	×	12	43	П2	42
10	÷	13	27	1 — 1	0L	44	$Fx=0$	5E
11	П3	43	28	П7	47	45	17	17
12	ИП1	61	29	ИП8	68	46	ИП8	68
13	8	08	30	+	10	47	ИП3	63
14	×	12	31	П8	48	48	×	12
15	$F\frac{1}{x}$	23	32	ИП4	64	49	с/п	50
16	П6	46	33	2	02			

Инструкция. После ввода исходных данных и занесения программы нажимаем В/о, с/п. Для контроля можно проверить, в частности, величины модифицированных функций Бесселя нулевого, первого и второго порядков при значениях аргумента $x = 10$ и коэффициента $m = 4$: $I_0(10) = 2815{,}7078$; $I_1(10) = 2670{,}9698$ и $I_2(10) = 2281{,}5046$ (табличные данные [4]: 2815,7; 2671,0 и 2281,5 соответственно). Полная продолжительность расчетов функций Бесселя для $x \gg 10$ не превышает обычно 35 с.

Для вычисления функций Маркума $Q(x, y)$ в области достаточно больших значений ее аргументов x и (или) y, т. е. при $xy > 10$ лучше использовать следующее разложение в ряд [1]:

$$Q(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n I_n(xy). \tag{3}$$

В указанной области значений аргументов $xy > 10$ сначала находятся величины $I_0(xy)$ и $I_1(xy)$ с помощью асимптотического разложения (1), а затем используется рекуррентная формула [1; 4; 5]

$$I_{n+1}(z) = \frac{2}{z} I_{n-1}(z) - I_n(z) \tag{4}$$

для определения модифицированных функций Бесселя остальных порядков, необходимых для расчетов $Q(x, y)$ с требуемой точностью.

УДК 621.391

М. А. ИВАНОВ, канд. техн. наук, *Б. И. МАКАРЕНКО*, д-р техн. наук,
И. А. ЯКОВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук

РАСЧЕТ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ СИСТЕМ ЦИФРОВОЙ СВЯЗИ НА ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРАХ

Дальнейшее совершенствование средств связи обусловливает актуальность проблемы повышения удельных скоростей передачи цифровой информации [1; 2] и, следовательно, увеличения кратности фазовой (ФМ), относительной (ОФМ), узкополосной частотной (ЧМ) и других полосно-эффективных методов модуляции дискретных сигналов [2; 3]. Однако разработка и внедрение высокоскоростных систем цифровой связи осложняются значительными, прежде всего вычислительными, трудностями анализа их реальной помехоустойчивости [1—3].

Цель работы — описание программ оценки помехоустойчивости наиболее распространенных на практике когерентных и оптимальных некогерентных систем цифровой передачи, эффективных в указанной области значений h и предназначенных для современных микрокалькуляторов типа Б3-34, МК-54 и МК-56.

При использовании известных методик количественного исследования верности когерентной или некогерентной передачи дискретных сигналов методами их цифровой модуляции (Приложение 3 справочника [2]) наиболее сложен расчет модифицированных функций Бесселя $I_n(x)$, функции Маркума $Q(x, y)$ и функции Никольсона $V(x, y)$ для средних и больших значений их аргументов x и (или) y. Поэтому при $x \gg 10$ целесообразно использовать следующее асимптотическое соотношение для определения модифицированной функции Бесселя $I_n(x)$ n-го порядка [4]:

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left\{1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!\, 8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8x)^2} - \right.$$
$$- \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!\,(8x)^3} + \cdots + (-1)^m \times$$
$$\left. \times \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \cdots [4n^2 - (2m-1)^2]}{m!\,(8x)^m} + \cdots + 0(|x|^{-2m-2}) \right\},$$
$$\forall h \in N_0, \tag{1}$$

где $\forall$ — квантор общности; N_0 — расширенное множество натуральных чисел, включающее в себя обычное множество натуральных чисел N и нуль; $0(|x|^{-2m-2})$ — обозначение остатка, характеризующего погрешность приближения функции $I_n(x)$ рядом (1) и не превышающего абсолютного значения $C|x|^{-(2m+2)}$; $C = \text{const}$. Очевидно, что коэффициенты a_m формулы (1) можно вычислить последовательно с помощью рекуррентного выражения [4; 5]

$$a_m = -a_{m-1} \frac{4n^2 - (2m-1)^2}{m \cdot 8x}, \tag{2}$$

причем $a_0 \triangleq 1$.

С учетом соотношений (1), (2), (4), формулу (3) можно привести к виду

$$Q(x,\ y) \cong e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{l} \left(\frac{x}{y}\right)^n \frac{e^{xy}}{\sqrt{2\pi xy}} \left\{1 - \frac{4n^2 - 1^2}{8xy} + \right.$$

$$+ \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8xy)^2} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!\,(8xy)^3} + \cdots +$$

$$\left. + (-1)^m \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\cdots[4n^2-(2m-1)^2]}{m!\,(8xy)^m} \right\}. \qquad (5)$$

Здесь при вычислении $I_0(\cdot)$ $m := 4$, а для расчета $I_1(\cdot)$ $m := 5$. Для вычисления функции $Q(x,\ y)$ предварительно заносим «1» в R_0, R_4, R_7, R_8; «0» — в R_5; а значения xy — в R_1; $m := 4$ — в R_2; $\frac{x}{y}$ — в R_6 и $\left[xy - \frac{x^2}{2}\right]$ — в R_a. Кроме того, в Программе 1^0 для вычисления $I_n(x)$ команду 07 заменяем на ИПа и после Программы 1^0 вводим Подпрограмму $2^0 - 1$ (табл. 2).

Таблица 2

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
50	1	01	55	5	05
51	П0	40	56	П2	42
52	П4	44	57	4	04
53	П7	47	58	П5	45
54	П8	48	59	с/п	50

Данная Подпрограмма $2^0 - 1$ вводится для подготовки к вычислению величины $e^{-\frac{x^2}{2}} I_1(x,\ y)$. После этого нажимаются кнопки БП 17, с/п и вычисляется значение $e^{-\frac{x^2}{2}} I_1(xy)$. Затем в R_5 вводится величина $e^{-\frac{x^2}{2}}\left[I_0(xy) + \frac{x}{y} I_1(xy)\right]$, для чего записывается Подпрограмма $2^0 - 2$ (табл. 3). Следующие значения $e^{-\frac{x^2}{2}} I_k(xy)$ включают в себя модифицированные функции Бесселя $I_k(\cdot)$ высших порядков $k \geqslant 2$, и поэтому вычисляются с использованием рекуррентной формулы (4) с помощью Подпрограммы $2^0 - 3$ (табл. 4).

Таблица 3

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	ИП8	68	64	+	10
61	ППв	6L	65	П5	45
62	×	12	66	с/п	50
63	ИП9	69			

Таблица 4

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
67	↑	0E	76	ИП8	68	85	ИП5	65
68	ИП1	61	77	П9	49	86	+	10
69	÷	13	78	ИПС	6[	87	П5	45
70	ИП8	68	79	П8	48	88	ИПd	6Г
71	×	12	80	ИПd	6Г	89	1	01
72	ИП9	69	81	ИПв	6L	90	+	10
73	—	11	82	Fx^y	24	91	Пd	4Г
74	I—I	0L	83	ИП8	68	92	ИП5	65
75	ПС	4[	84	×	12	93	с/п	50

Инструкция. После ввода программы вычислений и исходных данных нажимаем кнопки В/о, с/п и рассчитываем значение $e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(xy)$. Затем вводим полученное значение $e^{-\frac{x^2}{2}} I_0(xy)$ в R_8, нажимая П8 и нажав потом с/п, подготавливаемся для вычисления величины $e^{-\frac{x^2}{2}} \times I_1(xy)$. После этого нажимаем БП 17, с/п и рассчитываем $e^{-\frac{x^2}{2}} \times I_1(xy)$. Нажимая затем ПУ, БП 17, с/п, вычисляем значение $e^{\frac{x^2}{2}} \times \left[I_0(xy) + \frac{x}{2} I_1(xy)\right]$ и вводим его в R_5. Набрав после этого 2, БП 66, с/п, рассчитываем величину $e^{-\frac{x^2}{2}} \sum \left(\frac{x}{y}\right)^n I_n(x, y)$. Следующие приближения осуществляются таким образом: нажимают последовательно 4, БП 66, с/п, затем — 6, БП 66, с/п и т. д., увеличивая каждый раз на два число, набираемое перед БП 66, с/п. Нетрудно убедиться в том, что полное время расчета одного значения Q-функции Маркума после набора вычислительной программы составляет $(300 + 20l)$ с, где l — количество итераций, необходимых для получения требуемого числа достоверных разрядов искомой величины. В частности, при значении произведения аргументов данной Q-функции $xy = 10$ указанные временные затраты в три-четыре раза меньше общей длительности вычислений с помощью известной программы [2], а в случае больших значений этого произведения полная продолжительность расчетов с использованием предлагаемой программы сокращается в десятки раз — при одинаковой точности и достоверности получаемых количественных оценок.

Указанная Q-функция Маркума используется для вычисления вероятности ошибки при некогерентном приеме дискретных сигналов [1; 2]. В частности, выражение для определения вероятности ошибки $p_2(n/k)$ при оптимальном некогерентном приеме неортогональных двоичных равномощных сигналов в гауссовских каналах цифровой связи имеет вид

$$p_2^{(n/k)} = Q\left[\sqrt{\frac{h^2}{2}(1-\rho^2)},\ \sqrt{\frac{h^2}{2}(1+\sqrt{1-\rho^2})}\right] - \frac{1}{2}e^{-\frac{h^2}{2}}I_0\left(\rho\frac{h^2}{2}\right), \tag{6}$$

где ρ — коэффициент неортогональности передаваемых сигналов (повышение полосной эффективности связи сопряжено с нарушением ортогональности используемых сигналов, поэтому в последнем случае имеем $0 < \rho \leqslant 1$ [1]).

Программу 2° вычислений Q-функции необходимо изменить таким образом, чтобы учесть вычитаемый член $\frac{1}{2}e^{-\frac{h^2}{2}} I_0 (\rho \frac{h^2}{2})$. С этой целью Подпрограмму 2° — 2 преобразуем, как указано в табл. 5.

Таблица 5

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
60	ИПУ	69	63	ИП8	68	66	+	10
61	2	02	64	ИПв	6L	67	П5	45
62	÷	13	65	x	12	68	с/п	50

При использовании Подпрограммы 2° — 3 вместо команды $2n$ БП 66, с/п нужно набирать $2n$, БП 68, с/п. Необходимо учитывать также, что для выполнения расчетов по формуле (6) под xy следует понимать $\rho\frac{h^2}{2}$, т. е. $xy \triangleq \rho\frac{h^2}{2}$,

$$\text{а } xy - \frac{x^2}{2} = (\rho - 1)\frac{h^2}{2} \text{ и } \frac{x}{y} \triangleq \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{1+\sqrt{1-\rho^2}}} = \frac{1-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}.$$

Аналогично рассчитывается [1; 3] или оценивается [2] вероятность ошибки некогерентного приема и многопозиционных (в общем случае — неортогональных) дискретных сигналов.

Для вычисления функции Никольсона [1—3]

$$V(x,\ y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x\int_0^{\frac{y}{x}t} e^{-\frac{t^2+u^2}{2}}\,dt\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}\,\hat{\Phi}\left(\frac{y}{x}t\right)dt \tag{7}$$

целесообразно использовать следующее соотношение для оценки значения интеграла вероятностей:

$$\hat{\Phi}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\beta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \cong \frac{1}{2}[1 - (1 + 10^{-6}\beta(C_6 + \beta(C_5 +$$
$$+ \beta(C_4 + \beta(C_3 + \beta(C_2 + C_1\beta))))))^{-16}], \tag{8}$$

имеющее при $C_1 = 5{,}383$; $C_2 = 48{,}891$; $C_3 = 38{,}004$; $C_4 = 3227{,}626$; $C_5 = 21141{,}006$ и $C_6 = 49867{,}347$ абсолютную погрешность, не превышающую $5 \cdot 10^{-7}$. Итак, решение поставленной задачи сводится к численному интегрированию (7). Сравнительный анализ известных применяемых в настоящее время методов численного интегрирования показывает, что одним из наиболее точных является, по-видимому, метод Гаусса (погрешность σ интегрирования убывает пропорционально седьмой степени «длины» σ шага интегрирования). Несколько уступают ему по точности приблизительно эквивалентные между собой метод Чебышева и метод Боде (для них $\sigma \sim \sigma^6$). Затем следует метод Симпсона ($\sigma \sim \sigma^5$). Далее — метод так называемых открытых формул Гаусса ($\sigma \sim \sigma^3$) и, наконец, точный метод средних прямоугольников ($\sigma \sim \sigma^2$). Однако методы Гаусса, Чебышева и Боде не обладают свойством робастности, т. е. их корректное использование требует, как правило, применения достаточно сложной процедуры регуляризации [1; 4; 6], что неизбежно сопровождается заметным снижением вычислений [1; 2]. Поэтому с прикладной точки зрения эффективен точный метод Симпсона, практическое использование которого обеспечивает также и существенную экономию времени вычислений (для заданной погрешности численного интегрирования).

Чтобы обеспечить возможность использования рассматриваемых типов программируемых микрокалькуляторов при вычислении функции Никольсона методом Симпсона по формулам (7), (8), необходимо применять так называемую составную разновидность формулы Симпсона [4]:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{q-1} \int_{a+2i\sigma}^{a+2(i+1)\sigma} f(x)\,dx \cong$$

$$\cong \frac{\sigma}{3} \sum_{i=0}^{q-1} \{f(a+2i\sigma) + 4f[a+(2i+1)\sigma] +$$

$$+ f[a+2(i+1)\sigma]\}, \qquad (9)$$

где $\sigma = \dfrac{b-a}{2q}$.

Составленная при этом Программа 3^0 расчета V-функции Никольсона составным методом Симпсона приведена в табл. 6.

Инструкция. Предварительно заносим значения: a — в R_a (в рассматриваемом случае $a = 0$); $\sigma = \dfrac{x}{2q}$ — в R_b ; $2q$ — в R_0; C_1— в R_6; C_2— в R_5; C_3— в R_4; C_4— в R_3; C_5— в R_2; C_6— в R_1; $\dfrac{y}{x}$ — в R_d.

Затем нажимаем В/о, с/п. При этом полное время вычислений $(35 \times \times 2q)$ с. Если требуется обеспечить не менее трех верных рядов, то при $x \sim 10$ необходимо брать $2q = 20$ и, следовательно, продолжительность расчетов составляет около 700 с или менее 11 мин 40 с. Выигрыш в длительности расчетов по Программе 3^0 по сравнению с применением метода средних прямоугольников составляет для данного случая 8 мин 20 с [4]. Легко убедиться в том, что указанный выигрыш в скорости вычислений по Программе 3^0 по сравнению с применением метода средних прямоугольников будет быстро возрастать при

Таблица 6

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ИПа	6.	33	3	03	66	×	12
01	ПП	53	34	÷	13	67	ИП3	63
02	38	38	35	ИПС	6[	68	+	10
03	ИПС	6[	36	×	12	69	ИП7	67
04	+	10	37	Па	4.	70	×	12
05	Пс	4[	38	с/п	50	71	ИП2	62
06	ИПа	6.	39	Fx^2	22	72	+	10
07	ИПв	6L	40	2	02	73	ИП7	67
08	+	10	41	÷	13	74	×	12
09	Па	4.	42	1 — 1	0L	75	ИПI	61
10	ПП	53	43	Fe^x	16	76	+	10
11	38	38	44	П8	48	77	ИП7	67
12	4	04	45	$F\pi$	20	78	×	12
13	×	12	46	2	02	79	6	06
14	ИПС	6[	47	×	12	80	$F \cdot 10^x$	15
15	+	10	48	$F\sqrt{}$	21	81	÷	13
16	ПС	4[	49	$F\frac{1}{x}$	23	82	1	01
17	ИПа	6.	50	ИП8	68	83	+	10
18	ИПв	6L	51	×	12	84	Fx^2	22
19	+	10	52	П8	48	85	Fx^2	22
20	Па	4.	53	ИПd	6Г	86	Fx^2	22
21	ПП	53	54	ИПа	6.	87	Fx^2	22
22	38	38	55	×	12	88	$F\frac{1}{x}$	23
23	ИПС	6[	56	П7	47	89	1	01
24	+	10	57	ИП6	66	90	—	11
25	ПС	4[	58	×	12	91	|—|	0L
26	ИП9	69	59	ИП5	65	92	2	02
27	2	02	60	+	10	93	÷	13
28	—	11	61	ИП7	67	94	ИП8	68
29	П9	49	62	×	12	95	×	12
30	$Fx=0$	5E	63	ТП4	64	96	В/о	52
31	ОО	00	64	+	10			
32	ИПв	6L	65	ИП7	67			

увеличении значений аргумента x и (или) с повышением требований к точности расчетов (требований к необходимому количеству достоверных разрядов искомых чисел) — при относительно небольшом (лишь на 16 команд) усложнении программирования.

Функция Никольсона применяется при расчетах верности передачи многопозиционных дискретных сигналов по когерентным каналам цифровой связи [1—3]. Например, общая формула для оценки помехоустойчивости (вероятности ошибки $p_M^{(k)}$) когерентного приема M-ичных ФМ-символов на фоне гауссовских шумов с равномерным спектром может быть записана следующим образом:

$$p_M^k = \frac{3}{2} - F\left(\sqrt{2h}\sin\frac{\pi}{M}\right) - \frac{1}{M} - $$
$$- 2V\left(\sqrt{2h}\sin\frac{\pi}{M},\ \sqrt{2h}\cos\frac{\pi}{M}\right). \qquad (10)$$

Для вычисления вероятности ошибки $p_M^{(k)}$ передачи M-позиционных ФМ-сигналов по гауссовским каналам когерентной связи в соответствии с формулой (10) величина $\frac{\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}}{2q}$ заносится в R_b, а значение $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}$ — в R_d. Из Программы 3[0] исключаем команды 92 и 93 путем последовательного нажатия кнопок БП 92, ПРГ, КНОП, КНОП, АВТ и затем В/о, с/п. После вычисления на индикаторе появляется рассчитанное значение $2V\left(\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M},\ \sqrt{2}h \cos \frac{\pi}{M}\right)$. Этот результат заносим в R_0, нажимая с данной целью По. Затем вычисляем величину $F\left(\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}\right) + 2V\left(\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M},\ \sqrt{2}h \cos \frac{\pi}{M}\right)$, для чего сначала рассчитываем значение $\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}$, нажав для этого ИПв, набрав $2q$ и набрав затем x, БП 56, с/п. При этом на экране высвечивается вычисленное значение $F\left(\sqrt{2}h \sin \frac{\pi}{M}\right)$. Нажимая потом ИПо, $+$, $\uparrow$ и набирая значение $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{M}\right)$, далее нажимаем $\leftrightarrow$, и на индикаторе высвечивается искомая величина вероятности ошибки $p_M^{(k)}$.

Таким образом, предложены удобные для инженерной практики вычислительные программы достаточно точной количественной оценки помехоустойчивости высокоскоростной передачи дискретных сообщений по когерентным или некогерентным каналам цифровой связи с многопозиционными и, в общем случае, неортогональными сигналами. Приведенные программы расчета предназначены для использования в современных микроЭВМ типа БЗ-34, МК-54, МК-56 и наиболее эффективны для области средних и больших значений отношения сигнал-шум, т. е. при средних и больших значениях отношения энергии элемента дискретного информационного сигнала к спектральной плотности мощности шумов используемого канала связи.

Список литературы: 1. *Финк Л. М.* Теория передачи дискретных сообщений. М., 1970. 728 с. 2. *Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н.* Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справ./ Под ред. Л. М. Финка. М., 1981. 232 с. 3. *Иванов М. А., Макаренко Б. И., Яковлев И. А.* Фазово-частотная модуляция дискретных сигналов // Радиотехника. 1985. № 11. С. 62—65. 4. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган: Пер. с англ. М., 1979. 832 с. 5. *Цветков А. Н., Епанечников В. А.* Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника БЗ-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54». М., 1984. 175 с. 6. *Трохименко Я. К., Любич Ф. Д.* Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. К., 1985. 328 с.

Поступила в редколлегию 10.10.86