

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Метод R -функцій в аналізі течій в'язкої теплопровідної рідини

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи САУМ-23-1

Журавель І.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник асист. Славик О.В.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Журавлю Ігорю Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Метод R -функцій в аналізі течій в'язкої теплопровідної рідини

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель стаціонарної течії в'язкої теплопровідної рідини (лінійне наближення)

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ асист. Славик О.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 59 с., 4 табл., 24 рис., 1 дод., 13 джерел.

ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР, В'ЯЗКА ТЕПЛОПРОВІДНА РІДИНА, ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ, ВИХОР ШВИДКОСТІ, МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, МЕТОД РІТЦА, ЛІНЕАРИЗОВАНА ЗАДАЧА.

Об'єкт дослідження – стаціонарні гідродинамічні процеси у в'язкій нестисливій теплопровідній рідині.

Мета роботи – застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язання задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини (лінеаризована за Стоксом задача).

Методи дослідження – структурний метод (метод R -функцій) для побудови структур розв'язку розглядуваних крайових задач та методі Рітца для апроксимації невизначених компонент зазначених структур.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини. Було проведено системний аналіз проблеми комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини та сценаріїв її вирішення, зроблено висновок про доцільність використання структурного методу (методу R -функцій) у поєднанні з методом Рітца. На основі методики побудови структур розв'язку побудовано жмуток функцій, що точно задовольняє всі крайові умови задачі. Для апроксимації невизначеної компоненти жмутка запропоновано використати метод Рітца. Запропонована методика була алгоритмізована та програмно реалізована у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3. Наведено результати обчислювального експерименту для тестових задач.

ABSTRACT

Introductory note: 59 pages, 4 tables, 24 figures, 1 appendix, 13 sources.

FIELD OF TEMPERATURES, VISCOSITY OF HEAT-CONDUCTING LIQUID, STREAM FUNCTION, VELOCITY VORTEX, *R*-FUNCTION METHOD, RITZ METHOD, LINEARIZED PROBLEM.

Object of research – stationary hydrodynamic processes in a viscous incompressible heat-conducting liquid.

Purpose of work – apply the structural method (*R*-function method) to solve the problem of computer modeling of flows in a viscous heat-conducting liquid (linearized Stokes problem).

Methods of research – the structural method (*R*-function method) for constructing structures of the solution to the considered boundary problems and the Ritz method for approximating the undefined components of these structures.

The qualification work addresses the problem of computer modeling of flows in a viscous heat-conducting liquid. A systematic analysis of the problem of computer modeling of flows in a viscous heat-conducting liquid and scenarios for its solution was conducted, concluding that it is advisable to use the structural method (*R*-function method) in conjunction with the Ritz method. Based on the methodology for constructing solution structures, a bundle of functions that precisely satisfies all boundary conditions of the problem was constructed. To approximate the undefined component of the bundle, it is proposed to use the Ritz method. The proposed methodology has been algorithmized and programmatically implemented in the computer algebra system Mathematica 13.3. Results of computational experiments for test problems are presented.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини	9
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини	12
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	20
1.4 Постановка задач дослідження	23
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	24
2.1 Структурний метод (метод R -функцій) в обчислювальній гідродинаміці	24
2.2 Застосування структурного методу (метода R -функцій) при аналізі течій в'язкої теплопровідної рідини	35
Висновки за розділом 2	39
3 Програмна реалізація	40
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3	40
3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини	41
3.3 Опис програми	41
Висновки за розділом 3	42
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	43
Висновки за розділом 4	53
Висновки	54
Перелік джерел посилання	55
Додаток А Лістинг програми	57

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі, пов'язані з рухом рідини, відіграють важливу роль у розвитку сучасної техніки та природознавства, а саме у теплоенергетиці, геофізиці, біології тощо. У багатьох практично важливих випадках рідину можна з великою достовірністю вважати в'язким нестисливим ньютонівським середовищем, і процеси, що протікають в ньому, можуть бути промодельовані за допомогою рівнянь Нав'є-Стокса. Відомо, що розв'язання поставленої задачі можна отримати теоретичним шляхом або за допомогою фізичного експерименту. Проте з розвитком можливостей обчислювальної техніки активніше використовується математичне та комп'ютерне моделювання. Зазвичай до розрахунку в'язких течій використовують чисельні методи. В основному ці чисельні методи використовують метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. Вони прості у реалізації, але не мають необхідної властивості універсальності – при переході до нової області (особливо некласичної геометрії) необхідно генерувати нову сітку, а часто і замінювати складні ділянки межі простими, складеними, наприклад, із відрізків прямих. Точно врахувати геометрію області можна, скориставшись конструктивним апаратом теорії R -функцій, розробленим акад. В.Л. Рвачовим та його учнями. Отже, розробка нових, а також удосконалення існуючих методів математичного та комп'ютерного моделювання стаціонарних течій теплопровідної в'язкої рідини на основі методу R -функцій та проєкційних методів є важливою задачею, що і робить тему кваліфікаційної роботи актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язання задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини (лінеаризована за Стоксом задача). Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і системний аналіз сучасного стану задачі «комп'ютерне моделювання стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини (лінійна задача)»;

- розглянути основні теоретичні відомості із застосування структурного методу (методу R -функцій) у обчислювальній гідродинаміці;
- застосувати структурний метод (метод R -функцій) до розв’язання задачі комп’ютерного моделювання течій в’язкої теплопровідної рідини (лінеарізована за Стоксом задача);
- розробити чисельний алгоритм розв’язання зазначеної задачі;
- реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи можливості системи комп’ютерної алгебри Wolfram Mathematica 13.3;
- провести обчислювальний експеримент для тестових задач та здійснити аналіз його результатів.

Об’єктом дослідження є стаціонарні гідродинамічні процеси у в’язкій нестисливій теплопровідній рідині.

Предметом дослідження є методи комп’ютерного моделювання та чисельного аналізу стаціонарних течій в’язкої теплопровідної рідини лінійна задача).

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються структурний метод (метод R -функцій) для побудови структур розв’язку розглядуваних крайових задач та метод Рітца для апроксимації невизначених компонент зазначених структур.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини

Об'єктом аналізу є «задача комп'ютерного моделювання стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини (лінійна задача)».

Системна модель об'єкта створюється з метою вивчення етапів побудови глобальної математичної моделі фізичних процесів при стаціонарній течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини і побудови найбільш ефективного методу розв'язання. Вона включає побудову моделей, що пов'язані між собою і впливають один на одний з фізичних процесів, що протікають в системі; побудову геометричної моделі системи; розрахунок поля швидкостей рідини в області, яка стане перевіркою правильності побудови моделі.

Система «задача комп'ютерного моделювання стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини (лінійна задача)» відноситься до цілеспрямованих систем, для яких призначення визначається їх здатністю (властивістю) сприймати потреби і виконувати певні дії для задоволення цих потреб.

Досліджувана система – задача розрахунку стаціонарних течій теплопровідної рідини.

Призначенням системи є надання глобальної математичної моделі для її подальшого використання для різних фізичних процесів у в'язкій рідині. Задля реалізації мети системи використовують різні ресурси. До таких ресурсів належать: інформаційні, технологічні, енергетичні.

Морфологічний опис системи почнемо з опису зовнішнього середовища, що наведене на рисунку 1.1.

Зовнішнє середовище – сукупність всіх об'єктів поза межами системи, зміна властивостей яких впливають на систему, і тих об'єктів, чії властивості змінюються внаслідок поведінки системи [1 – 3].

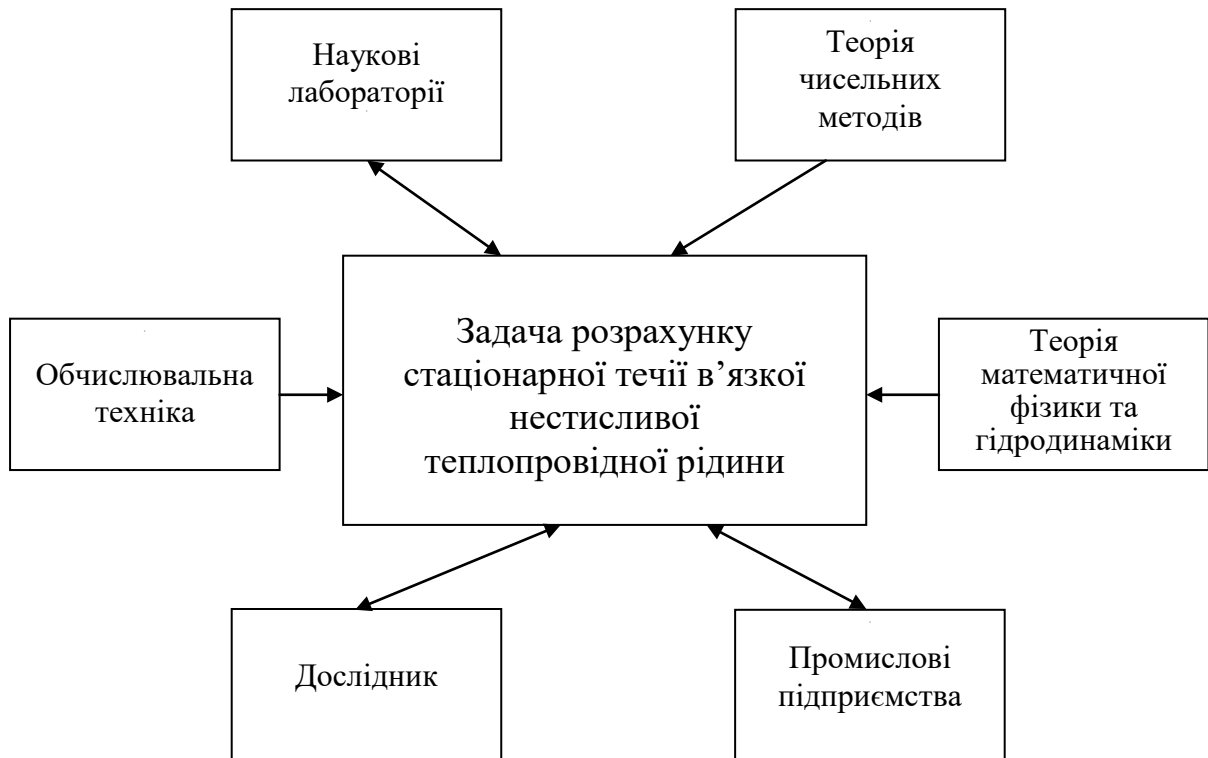


Рисунок 1.1 – Модель зовнішнього середовища системи

Об'єкти зовнішнього середовища:

- наукові лабораторії забезпечують умови щодо досліджень;
- обчислювальна техніка є засобом моделювання стаціонарних течій теплопровідної рідини та чисельного аналізу течій;
- дослідник безпосередньо проводить експерименти, вибирає методи та способи моделювання та чисельного аналізу стаціонарних течій теплопровідної рідини;
- на підставі теорії математичної фізики та гідродинаміки будується метод розв'язання задачі розрахунку стаціонарних течій теплопровідної рідини;
- промислові підприємства використовують результати досліджень, впроваджуючи нові технології у виробництво;
- теорія чисельних методів використовується для моделювання стаціонарних течій теплопровідної рідини.

Модель типу «чорний ящик» системи «задача розрахунку стаціонарної

течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини» подана на рисунку 1.2. Така модель є вихідною при побудові моделі складної системи, що акцентує увагу дослідника на взаємодії системи із зовнішнім середовищем. Тут виходами системи є цільові продукти. Входи – це вплив середовища на систему. Зміст «чорного ящика» не розкривається, оскільки увага звертається лише на межі системи. Межі, у свою чергу, підкреслюють цілісність системи, відокремленість її від зовнішнього середовища та взаємодію системи та середовища.

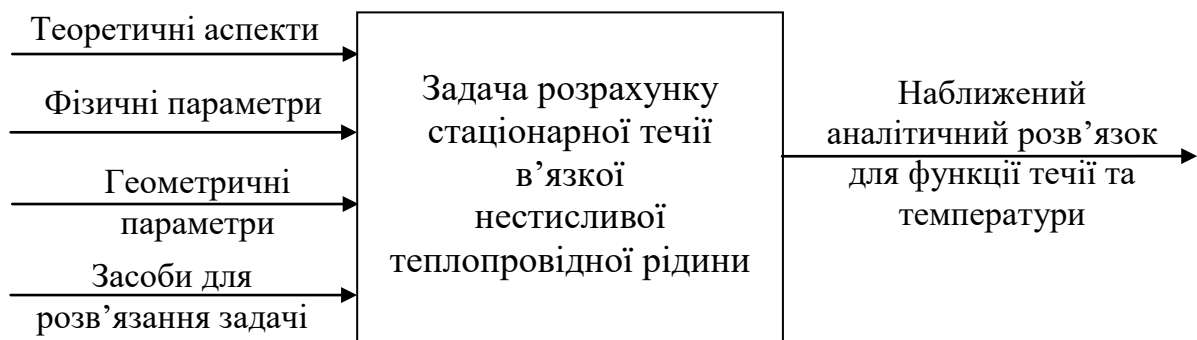


Рисунок 1.2 – Модель типу «чорний ящик»

У моделі типу «білий ящик» (рисунок 1.3) описано «склад системи», вказані взаємозв'язки між елементами системи.

Дана система А складається з двох підсистем: А1 та А2:

а) А1 – апарат управління, що складається з:

1) А11 дослідника;

2) А12 засобів управління: пульт управління та дисплей зворотного зв'язку;

б) А2 – теоретична та обчислювальна база, що складається з:

1) А21 засобів виконання задачі: структури розв'язку та розрахункових формул;

2) А22 обслуговування: ЕОМ.

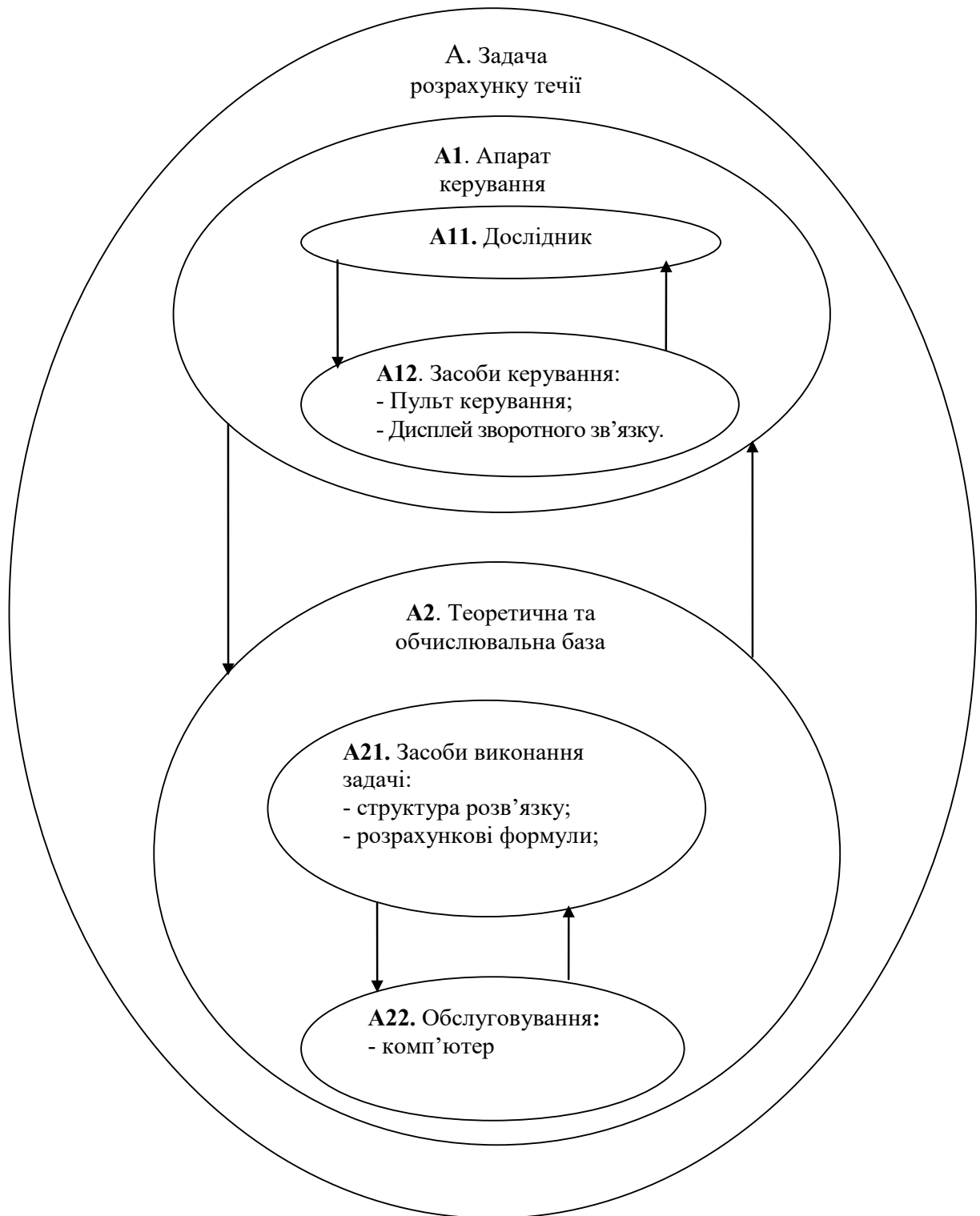


Рисунок 1.3 – Модель типу «білий ящик»

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини

Об'єктом дослідження є проблемовмісна система (ПС-система) на основі

моделі «Розв’язання задачі розрахунку стаціонарних течій теплопровідної рідини».

На просторі об’єктів, що розглядаються, виявимо ряд компонентів, які, на нашу думку, впливають на отримання необхідного результату. Ці незадоволеності розбиваються на три групи.

а) небажані властивості:

- 1) складні математичні вирази, що виникають при описі області за допомогою R -функцій;
- 2) неправильний вибір системи координат;
- 3) високі витрати ресурсів ЕОМ;

б) критичні властивості:

- 1) недостатня точність вибраного методу;
- 2) високі часові витрати на обчислення кожного наближення;
- 3) повільна збіжність наближень до розв’язку задачі;

в) бажані властивості:

- 1) отримання наближеного розв’язку в аналітичному вигляді із заданою точністю;
- 2) можливість подальшого використання одержаного розв’язку для розв’язання нелінійної задачі;
- 3) універсальність методу.

Проведемо аналіз незадоволеностей шляхом побудови ієрархічної моделі:

- перший рівень (фокус моделі) – незадоволеності;
- другий рівень – класифікація незадоволеностей;
- третій рівень – характеристики компонентів, які впливають на розв’язок поставленої задачі.

Ієрархічна модель процесу аналізу незадоволеностей наведена на рисунку 1.4.

Аналіз вектора пріоритетів першого рівня показав, що найбільш значимі виявилися бажані якості ($W_1 = 0,674$), наступні критичні ($W_2 = 0,226$), потім небажані ($W_3 = 0,101$). На рисунку 1.5 наведено діаграму пріоритетів.

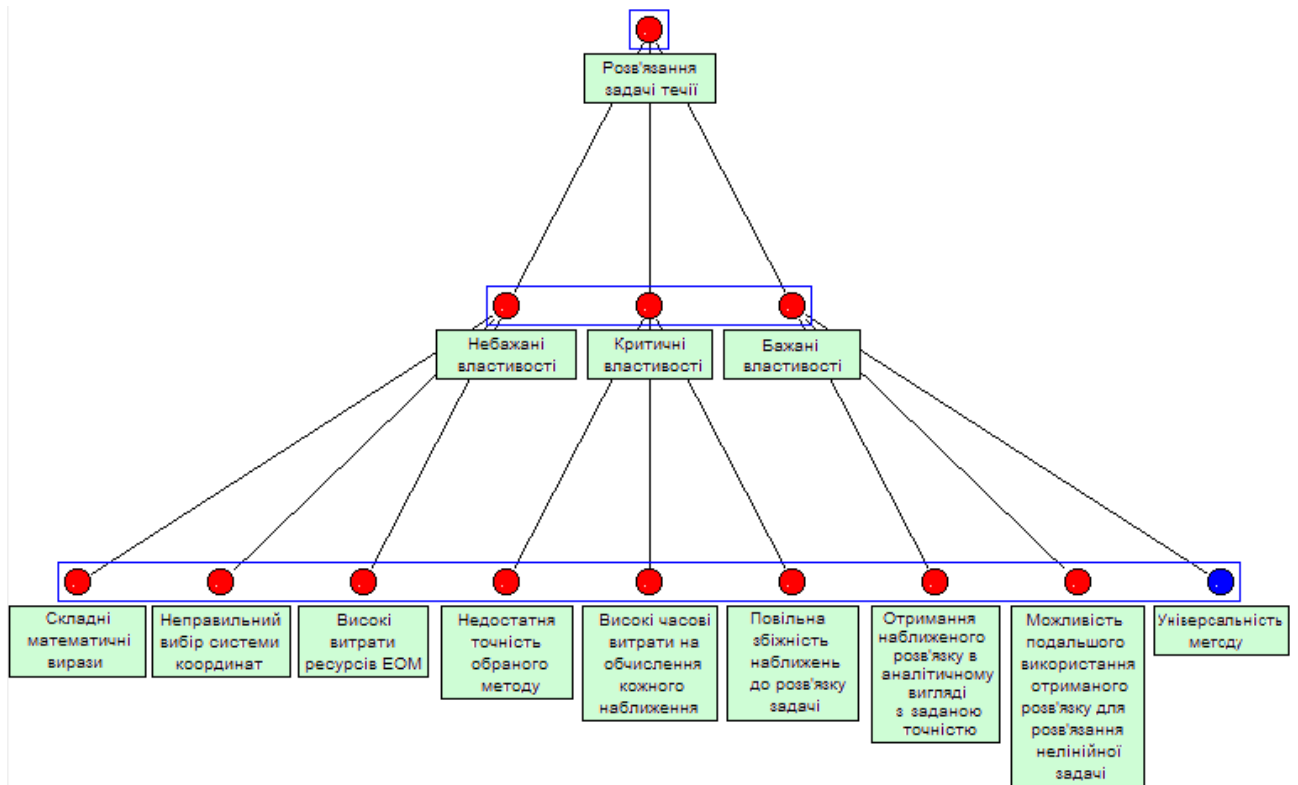


Рисунок 1.4 – Ієрархічна модель процесу аналізу незадоволень

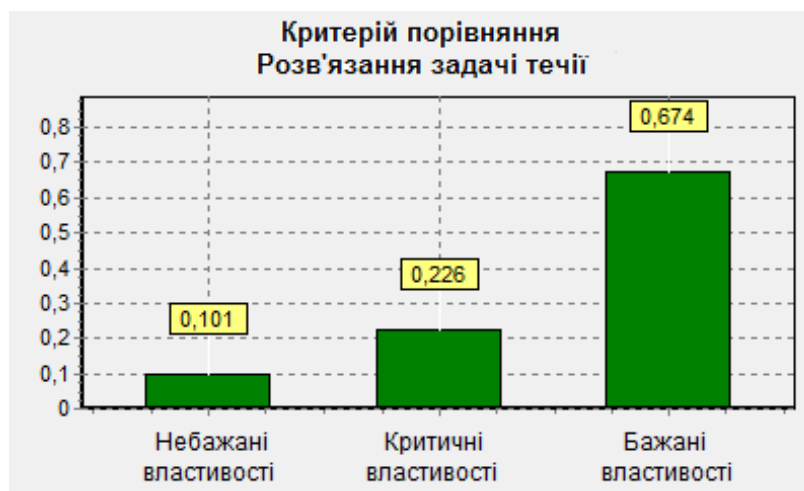


Рисунок 1.5 – Діаграма пріоритетів за критерієм порівняння «незадоволеності»

Найбільше власне значення матриці суджень дорівнює $\lambda_{\max} = 3,09$. Індекс узгодженості дорівнює $IU = 0,04$ та відношення узгодженості $OУ = 0,08 < 0,1$.

Здійснимо синтез локальних пріоритетів, тобто оцінку узагальнених пріоритетів. Для цього слід отримати вектор глобальних пріоритетів незадоволеностей відносно мети верхнього рівня.

В результаті одержуємо наступну діаграму (рисунок 1.6).

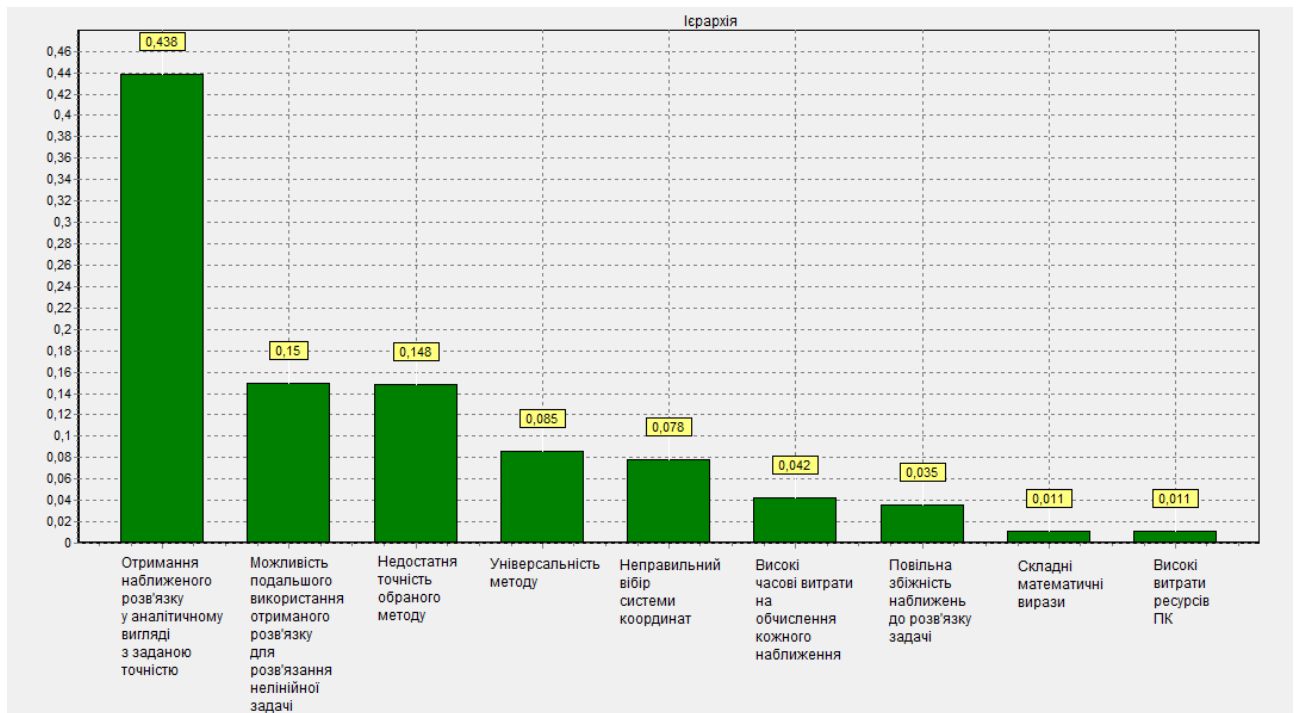


Рисунок 1.6 – Діаграма глобальних пріоритетів

Скористаємося принципом Парето зниження розмірності. Тому виберемо з діаграми всі незадоволеності, сума яких дорівнює 0,9. В результаті виділяємо найзначніші з них, вказавши важливість:

- одержання наближеного розв'язку в аналітичному вигляді із заданою точністю – 0,438;
- можливість подальшого використання отриманого розв'язку для розв'язання нелінійної задачі – 0,15;
- недостатня точність обраного методу – 0,148;
- універсальність методу – 0,085;
- неправильний вибір системи координат – 0,078;
- високі часові витрати на обчислення кожного наближення – 0,042.

З проведеного нами аналізу незадоволеностей робимо висновок, що при вирішенні зазначеної проблеми зусилля спрямовані на досягнення бажаної мети, сформульованої термінами наближення до якогось ідеалу, тобто до створення ПС-системи нових бажаних властивостей. Таке вирішення проблеми, яке називається

вається перспективним, зменшить ймовірність прорахунку у можливих наслідках.

Грунтуючись на проведених аналізах незадоволеностей, можна сформулювати кілька можливих логічних результатів (контрастних сценаріїв) розв'язання задачі розрахунку в'язкої течії:

а) сценарій «Точні аналітичні методи» (СЦ-1) характеризує отримання точного розв'язку в аналітичному вигляді за допомогою теорії математичної фізики;

б) сценарій «Наближені аналітичні методи» (СЦ-2): згідно з цим сценарієм розв'язок отримаємо у аналітичному вигляді із застосуванням чисельних методів;

в) сценарій «Сіткові методи» (СЦ-3): при цьому сценарії буде отримано наближений розв'язок у вигляді таблиці чисел.

Побудуємо калібрувальну таблицю, в якій за психометричною школою Т. Сааті для кожного сценарію експертним шляхом визначено збільшення аналізованих показників (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1 – Калібрувальний варіант показників

Показники стану системи	СЦ1 (0,403)	СЦ2 (0,444)	СЦ3 (0,153)	Узагальнений сценарій
Вид результатів	+3	+5	-1	+3,276
Час обчислення	+4	+2	+3	+2,959
Точність розв'язку	+5	+4	+2	+4,097
Універсальність методу	-1	+3	+5	+1,694

Для вирішення задачі розрахунку стаціонарних течій теплопровідної рідини необхідно вибрати метод розв'язання задачі знаходження функції течії та температури серед точних аналітичних, чисельних та аналітично-чисельних методів. Кожна група має свої переваги і недоліки, наприклад, у точних аналітичних методах (метод Фур'є, метод інтегральних перетворень та інших) геометрична

інформація враховується вдалим вибором системи координат; у методі конформних відображень – побудовою відповідної відображаючої функції. Однак такі підходи далеко не завжди можливі. У кожному випадку процес побудови розв’язку необхідно здійснювати наново для областей різної геометрії. Серед наближених методів розв’язання крайових задач найбільш розроблено сіткові та проєкційні (варіаційні) методи. Ці методи мають універсальний характер і можуть бути застосовані для різних диференціальних операторів, різних областей та типів крайових умов. Однак у сіткових методах вся вихідна інформація наводиться до цифрового вигляду і в результаті розв’язання задачі отримуємо числові масиви.

Після розробки моделей контрастних сценаріїв агрегується ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми.

У цій моделі розглядаються такі елементи за рівнями:

- нульовий рівень (фокус моделі): розв’язання задачі розрахунку течії;
- перший рівень (чинники): вид результатів, час обчислення, ресурси ЕОМ, точність розв’язку, універсальність методу;
- другий рівень (цілі акторів): одержання рішення, отримання програмного продукту, підвищення точності, можливість моделювання;
- третій рівень (контрастні сценарії): точні аналітичні методи, наближені аналітичні методи, сіткові методи.

За цією моделлю за допомогою експертних оцінок розрахуємо локальні пріоритети елементів кожного рівня моделі по відношенню до кожного зв’язаного елемента верхнього рівня, а потім оцінимо вектор глобального пріоритету елементів третього рівня.

Змістовна ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми представлена на рисунку 1.7.

Починаємо перший етап, що полягає у аналізі впливу чинників першого рівня ієрархії на мету аналізу – нульовий рівень. Шкала пріоритетів представлена на рисунку 1.8.

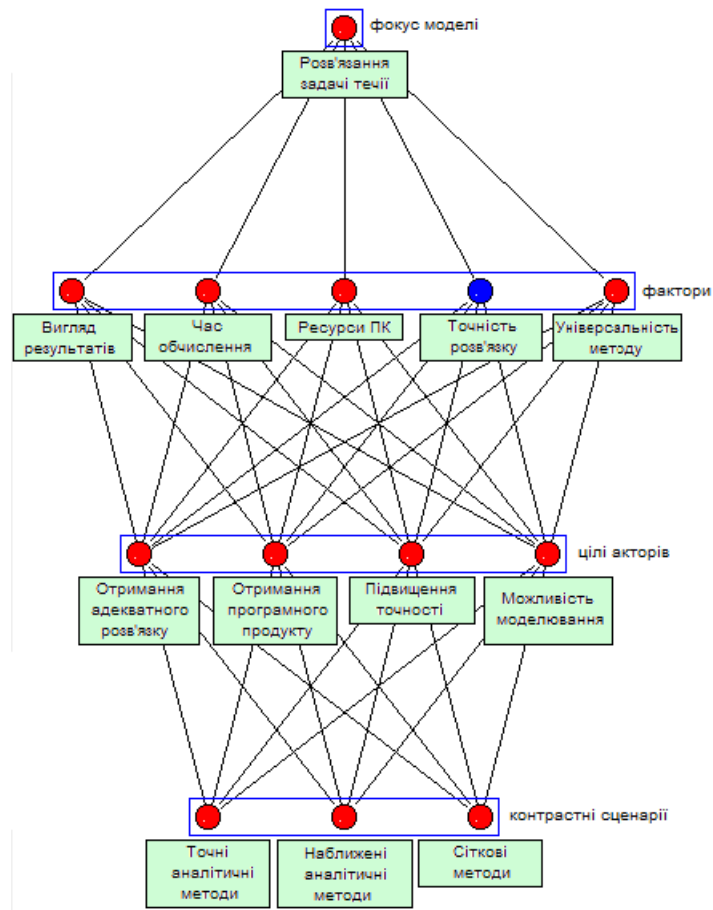


Рисунок 1.7 – Змістовна ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми

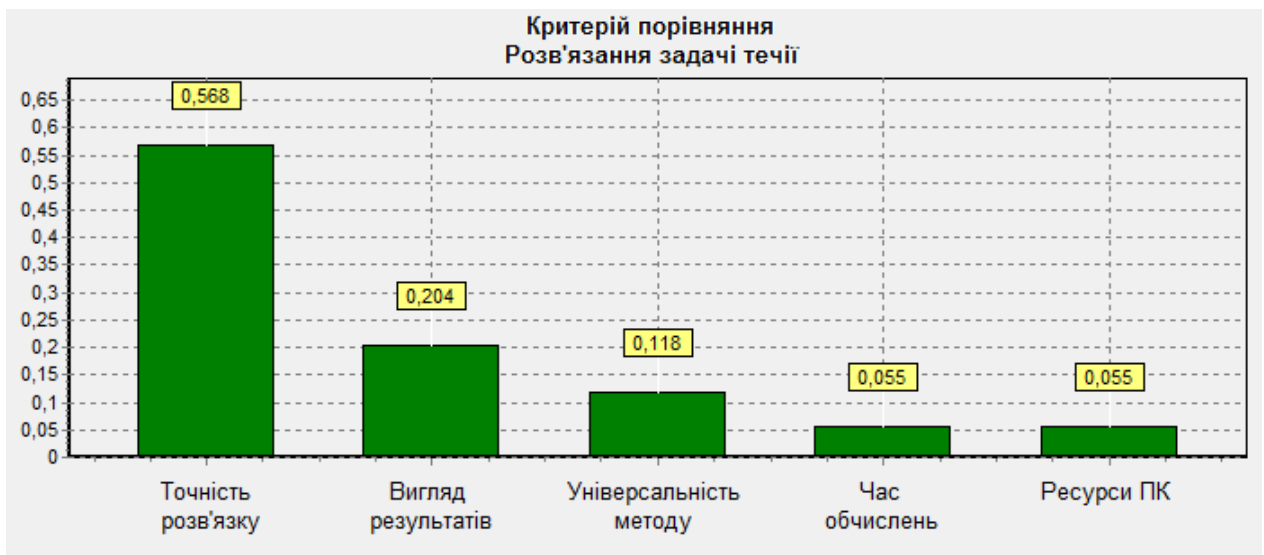


Рисунок 1.8 – Діаграма пріоритетів для нульового рівня

Коротко прокоментуємо: аналіз вектора пріоритетів показує, що найбільшим виявився фактор «точність розв'язку» ($W=0,568$).

На наступному етапі розглянемо вплив цілей акторів другого рівня на фактори першого рівня, а саме до аналізу переваги кожної з цілей, по відношенню до кожного фактора першого рівня.

Отримано такі значимості цілей. Для фактора «вид результату» найпріоритетнішим є отримання адекватного розв'язку ($W = 0,475$). Для фактора «час обчислення» найбільш пріоритетним є підвищення точності ($W = 0,487$). Для фактора «ресурси ЕОМ» найпріоритетнішим є отримання програмного продукту ($W = 0,648$). З погляду точності розв'язку найпріоритетнішою виявилася ціль «точність розв'язку». Для фактора «універсальність методу» найпріоритетнішим є можливість моделювання.

Переходимо до аналізу сценаріїв третього рівня стосовно кожної з цілей акторів другого рівня.

В результаті отримуємо узагальнений вектор пріоритетів сценаріїв по відношенню до кінцевої мети – розв'язання задачі розрахунку в'язкої течії (див. табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Узагальнений вектор пріоритетів сценаріїв

Сценарії	Вектор пріоритетів
«Точні аналітичні методи»	0,403
«Наближені аналітичні методи»	0,444
«Сіткові методи»	0,153

Після оцінки можливих логічних сценаріїв стану ПС-системи починаємо розробляти моделі бажаних сценаріїв.

Для вибору одного зі сформованих бажаних сценаріїв агрегуємо дві змістовні моделі (рисунки 1.7 та 1.8), за якими експертним шляхом оцінимо їх коефіцієнти значущості (компоненти вектора глобальних пріоритетів) за критеріями «вигода» та «збитки». Результати аналізу внесено до таблиці 1.3.

Розглянуті бажані сценарії ранжуємо в порядку зростання відношення V/U та для подальшого розгляду вибираємо сценарій з максимальним значен-

ням величини V/U ; у нашому випадку це Сценарій №2 – «Наближені аналітичні методи».

Таблиця 1.3 – Результати за критеріями вигоди та збитків

Критерії \ Сценарії	«Точні аналітичні методи»	«Наближені аналітичні методи»	«Сіткові методи»
Критерій «вигода» V	0,2006	0,5437	0,2560
Критерій «збитки» U	0,4166	0,3997	0,3837
Відношення «вигода/збитки» V/U	0,4800	1,3600	0,6672

В результаті проведеного аналізу ми розглянули шляхи вирішення проблеми розрахунку стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини. Аналіз показав, що пріоритетним є сценарій «Наближені аналітичні методи».

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглядається лінійна задача розрахунку стаціонарної течії в'язкої теплопровідної нестисливої рідини. Нехай Ω – плоска однозв'язна обмежена область із кусково-гладкою межею $\partial\Omega$.

Лінеаризована система рівнянь, що описує таку течію, складається з [4, 5]:

а) рівняння руху для швидкості $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ та нормалізованого на густину тиску p

$$\text{grad } p - \nu \text{ div grad } \mathbf{v} - \beta \epsilon \theta = 0; \quad (1.1)$$

б) рівняння нерозривності

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1.2)$$

в) рівняння, що описує перенесення тепла теплопровідністю та конвекцією

$$-\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} \theta) = 0. \quad (1.3)$$

Тут $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – поле швидкостей, p – тиск, ν – кінематична в'язкість, β визначає об'ємне розширення, $\mathbf{e} = (0, 1)$ – вектор, що задає напрямок виштовхуючої сили, $\theta = \theta(x, y)$ – відхилення температури від рівноважної, κ – коефіцієнт теплопровідності. Припустимо, що об'ємні сили відсутні.

Для досить повільної (повзучої) течії відношення порядку конвективних сил інерції до порядку сил в'язкості є малим і тому нелінійними членами у вихідній системі рівнянь Нав'є-Стокса можна знехтувати. При цьому ми й отримаємо лінеаризовані за Стоксом рівняння в'язкої теплопровідної рідини (1.1) – (1.3).

Досить широкий клас течій може бути зведений до двовимірних течій. Далі розглядатимемо плоскопаралельні течії, коли область, в якій вивчається перебіг, є циліндричною, а крайові та початкові дані не залежать від координати осі циліндра.

Аналіз плоскопаралельних течій зручно проводити за допомогою функції течії $\psi(x, y)$, що вводиться співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.4)$$

(рівняння нерозривності при цьому перетворюється на тотожність).

Після підстановки співвідношення (1.4) для функції течії у (1.1) і виключення тиску за допомогою диференціювання вихідне рівняння для вектора

швидкості \mathbf{v} зводиться до рівняння для функції течії вигляду

$$\nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0.$$

Початкові та крайові умови для функції течії можуть бути отримані з умов, що накладаються на вектор \mathbf{v} . Так, якщо рідина примикає до нерухомої стінки, то в цих точках швидкість рідини перетворюється на нуль. Це означає, що в нуль перетворюється нормальна і тангенціальна складова швидкості (умова прилипання). Якщо ж рідина примикає до рухомої твердої стінки, то в таких точках швидкість рідини має за величиною і напрямком співпадати зі швидкістю відповідної точки стінки. Виходячи з цього на межі $\partial\Omega$ області Ω можна задати значення функції течії ψ та її нормальної похідної $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$, де \mathbf{n} – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Отже, для функції течії $\psi(x, y)$ та температури $\theta = \theta(x, y)$ можна поставити крайову задачу

$$\nu \Delta^2 \psi - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, (x, y) \in \Omega, \quad (1.5)$$

$$-\kappa \Delta \theta = 0, (x, y) \in \Omega, \quad (1.6)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (1.7)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = h_0(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (1.8)$$

де $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – деякі розподіли нормальної і дотичної складової швидкості потоку

відповідно;

h_0 – заданий розподіл температури на межі $\partial\Omega$;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа;

$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бігармонічний оператор.

Методика задання функцій $f_0(s)$ та $g_0(s)$ розглянута в [10].

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного системного аналізу задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини та сценаріїв вирішення відповідної проблеми, можна зробити висновок, що перспективним є дослідження стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини з використанням структурного методу (методу R -функцій).

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язання задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини (лінеаризована за Стоксом задача).

Для досягнення поставленої мети, необхідно:

- розглянути основні теоретичні відомості із застосування структурного методу (методу R -функцій) у обчислювальній гідродинаміці;
- застосувати структурний метод (метод R -функцій) до розв'язання задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини (лінеаризована за Стоксом задача);
- розробити чисельний алгоритм розв'язання зазначеної задачі;
- реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи можливості системи комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica 12.3;
- провести обчислювальний експеримент для тестових задач та здійснити аналіз його результатів.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Структурний метод (метод R-функцій) в обчислювальній гідродинаміці

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії. Нехай у \mathbb{R}^2 заданий геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ і потрібно побудувати функцію $\omega(x, y)$, додатну всередині Ω , від'ємну поза Ω і рівну нулю на $\partial\Omega$. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ в неявній формі визначатиме геометричне місце точок, що дає межу $\partial\Omega$ області Ω . Надалі, дотримуючись робіт академіка В.Л. Рвачова, будемо використовувати термін локус, під яким необхідно розуміти множини точок \mathbb{R}^2 , для яких за допомогою деякої системи елементарних функцій і констант $a \in \mathbb{R}$ шляхом утворення їх суперпозицій можна написати рівняння виду $\omega(x, y) = 0$. Причому функція $\omega(x, y)$ буде елементарною функцією і матиме вигляд єдиного аналітичного виразу. Функція $\omega(x, y)$ може бути досить легко побудована за допомогою методу R-функцій для областей довільної форми [6, 7].

Введемо у розгляд характеристичну функцію області Ω

$$\chi(\omega(x, y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x, y) < 0, \\ 1, & \omega(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Маючи в своєму розпорядженні деяку систему характеристичних функцій $\chi_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) і булеву функцію $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$, можна побудувати предикат

$$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = F((\omega_1 \geq 0), (\omega_2 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)),$$

який визначає область Ω , сконструйовану з допоміжних областей

$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ за логічними правилами, що визначаються булевою функцією F , за допомогою наступних логічних операцій над множинами: « \cap » – перетину, « \cup » – об'єднання та « \neg » – доповнення. Формально це можна записати у вигляді

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (2.1)$$

Вважаємо, що вихідні або, точніше, опорні області $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ мають простішу форму, ніж Ω , і для кожної з них відомо рівняння її межі $\omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Метод R -функцій дозволяє на основі теоретико-множинного опису області Ω отримати в аналітичному вигляді рівняння її межі $\omega(x, y) = 0$.

Означення 2.1. R -функцією (функцією В.Л. Рвачова), що відповідає розбиттю числової осі на інтервали $(-\infty, 0)$ і $[0, +\infty)$ називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів.

При цьому одночасно з R -функцією виявляється заданою деяка супроводжуюча функція двозначної логіки з тим же числом аргументів. Тому можна дати також таке еквівалентне визначення R -функції [6, 7].

Означення 2.2. Функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$, де двозначний предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Кожній R -функції відповідає єдина супроводжуюча булева функція. Зворотне неправильно, і одній і тій же булевій функції відповідає множина (гілка) R -функцій. Множина R -функцій замкнена, тобто суперпозиція R -функцій також є R -функцією.

Означення 2.3. Система функцій H , складена з R -функцій, називається достатньо повною, якщо множина усіх суперпозицій елементів H (множина H -реалізованих функцій), має непустий перетин з кожною гілкою множини R -функцій.

Достатньою умовою повноти системи H є повнота системи H^* відповідних булевих функцій. Однією з найбільш уживаних повних систем у множині булевих функцій є система $H^* = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$.

Перехід від предикатного задання області Ω вигляду (2.1) до її задання за допомогою нерівності $\Omega = (\omega(x, y) \geq 0)$ може бути здійснено за допомогою однієї з повних систем R -функцій. Наприклад, найчастіше використовується система \mathfrak{R}_α :

$$\begin{aligned} x \wedge_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ x \vee_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ \bar{x} &\equiv -x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$, $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y)$.

Перехід від предикатної форми задання області (2.1) до звичайного, прийнятого в аналітичній геометрії, рівняння для межі області здійснюється за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$, ($i=1, 2, \dots, m$), а символів $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R -операцій $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg\}$ відповідно. Отримаємо в результаті аналітичний вираз, що визначає у елементарних функціях необхідне рівняння межі $\omega(x, y) = 0$. При цьому для внутрішніх точок області $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх $\omega(x, y) < 0$.

З системи (2.2) при $\alpha \equiv 0$ отримуємо систему \mathfrak{R}_0 , яку найчастіше використовують на практиці

$$x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{x} \equiv -x.$$

Дамо поняття нормалізованого до n -го порядку рівняння межі області [6, 7].

Означення 2.4. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ локусу $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$ до n -го порядку, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 1, \quad \frac{\partial^l\omega}{\partial\mathbf{n}^l}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (l = 2, 3, \dots, n), \quad (2.3)$$

де \mathbf{n} – вектор внутрішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Умови (2.3) означають, що вздовж нормалі до $\partial\Omega$ функція $\omega(x, y)$ поводитья приблизно як функція відстані r точок цієї нормалі від межі $\partial\Omega$. Наприклад, нормалізоване до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ можна отримати з рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ наступним чином. Якщо $\omega_1(x, y) \in C^k(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умови $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$ і $\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} > 0$, то функція $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\nabla\omega_1|^2}} \in C^{k-1}(\mathbb{R}^2)$, де

$$|\nabla\omega_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)^2} \quad \text{задовольняє умови } \omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 1 \text{ у всіх регулярних точках межі } \partial\Omega.$$

Якщо $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ локусу Ω можна скористатися простішою формулою $\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}$ [6, 7].

Для таких простих областей, як напівплощина, смуга, шар, коло, сфера та багато інших, нормалізовані рівняння отримують шляхом введення простих нормувальних множників. Виявляється, що застосування деяких досить повних систем R -функцій дозволяє перенести цю їх властивість нормалізованості і на випадок складних локусів, для яких згадані прості області є опорними.

Нехай є деяка система областей $\{\Omega_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), рівняння $\omega_i(x, y) = 0$ меж яких нормалізовані до порядку, тобто $\frac{\partial\omega_i}{\partial\mathbf{n}_i} = 1$ на $\partial\Omega_i$.

Тоді при використанні систем R -функцій \mathfrak{R}_α і деяких інших для побудови функцій $\omega = f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ отримаємо $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 1$ на $\partial \Omega$, де \mathbf{n} – нормаль до $\partial \Omega$, спрямована в область Ω . Отже, якщо рівняння $\omega_i(x, y) = 0$ опорних областей нормалізовані до першого порядку, то автоматично виявляється нормалізованим (в усіх регулярних точках) і рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі складної області Ω .

Розглянемо деякі приклади нормалізованих рівнянь у \mathbb{R}^2 :

а) для напівплощини $c + ax + by \geq 0$

$$\omega(x, y) \equiv \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0;$$

б) для кола $r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 \geq 0$ радіусу r з центром у точці (a, b)

$$\omega(x, y) \equiv \frac{1}{2r} (r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2) = 0;$$

в) для смуги $(-c - ax - by)(d + ax + by) \geq 0$ між паралельними прямими

$$\omega(x, y) \equiv -\frac{1}{2|c - d|\sqrt{a^2 + b^2}} (c + ax + by)(d + ax + by) = 0.$$

Розглянемо тепер застосування методу R -функцій до розв'язання крайових задач математичної фізики.

Нехай Ω є деяка відкрита область у просторі \mathbb{R}^2 , $\partial \Omega$ – її межа, $\partial \Omega_i$ – покриття межі $\partial \Omega$, таке, що $\partial \Omega = \bigcup_{i=1}^m \partial \Omega_i$. Ділянки $\partial \Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) межі $\partial \Omega$ не обов'язково всі різні і можуть збігатися з усією межею $\partial \Omega$. Нехай, далі, f і φ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) є деякими відображеннями області Ω та ділянок $\partial \Omega_i$

($i=1, 2, \dots, m$) відповідно у деякі множини F і Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$), u – відображення замкненої області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ у деяку множину U , а A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) – відображення множини U у множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно.

Вимагаємо виконання умов

$$Au = f, \quad (2.4)$$

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i \text{ (} i=1, 2, \dots, m \text{)}. \quad (2.5)$$

У цьому випадку кажуть, що поставлена крайова задача. До крайових задач такого виду зводяться більшість задач, що виникають у теорії пружності та пластичності, теорії потенціалу, електростатики та електродинаміки, теорії коливань, теорії пластин та оболонок, теплофізики, теорії фільтрації, аеро- та гідродинаміки та в інших областях фізики та техніки.

Вигляд відображень u , f та φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що входять до постановки задачі, визначається конкретними фізичними умовами задачі. Вони можуть бути скалярами, векторами, тензорами. Зазвичай відображення A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) є диференціальними, інтегральними чи інтегродиференціальними операторами.

Відображення A , L_i , u , f , φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що беруть участь у постановці крайової задачі, є аналітичними компонентами крайової задачі, а область Ω , межа $\partial\Omega$ та її ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) – геометричними компонентами. Залежно від того, які компоненти задані, а які є шуканими, говорять про пряму та обернену крайові задачі. Крайова задача називається прямою, якщо шуканою є компонента u , а решта – заданими. У інших випадках крайові задачі називаються оберненими. Будемо вважати, що задачі є правильно поставленими, тобто всі задані (2.4), (2.5) відображення забезпечують існування та єдиність її розв'язку.

Характерною особливістю крайових задач є залежність поля від геометричних форм, які у реальних об'єктах мають дуже складну конфігурацію. Це може бути форма області Ω , ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$), межі $\partial\Omega$, ліній або поверхонь розриву аналітичних компонентів та ін. Більше того, у разі крайових задач для кусково-однорідних середовищ, самі оператори A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть мати зовсім різний вигляд у різних підобластях $\Omega_j \subset \Omega$ та на ділянках $\partial\Omega_i \subset \Omega$ ($i=1, 2, \dots, m$). Таким чином, побудова ефективних чисельних методів розв'язання крайових задач можлива лише з урахуванням усіх видів вхідної інформації, як аналітичної, так і геометричної. Значить, необхідно не тільки враховувати вид формул, що входять до постановки задачі, але і приводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, що дозволяє включати її в розв'язувальний алгоритм. Здійснити цю процедуру дозволяє метод R -функцій, званий часто структурним. Цей метод вказує шляхи врахування геометричної інформації на аналітичному рівні без будь-якої її апроксимації. Для досягнення цієї мети буде використаний конструктивний апарат, який описаний на початку пункті. Розглянемо основні поняття методу R -функцій стосовно розв'язування крайових задач, що є математичними моделями фізико-механічних полів, зокрема гідродинамічних процесів [6, 7].

Нехай $D_A(\Omega) \subseteq U$ – область визначення оператора A , що входить в рівняння (2.4), а

$$L_{i_k} u = \varphi_{i_k} \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad (2.6)$$

де $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ – деяка підмножина індексів $\{1, 2, \dots, m\}$.

Означення 2.5. Формула $u = B(\varphi)$, де φ – елемент деякої множини \mathfrak{M} , а $B: \mathfrak{M} \rightarrow D_A(\Omega)$, називається структурою розв'язку, що враховує умови (2.6) і визначеною на \mathfrak{M} , якщо для всіх $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$L_{i_k} B(\Phi) = \varphi_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Зазначимо, що оператор B залежить від геометрії області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) її межі, а також операторів крайових умов.

Структура, яка враховує всі крайові умови (2.5), називається загальною структурою, і якщо задовольняється лише частина умов (2.5), то структура називається частковою. Зауважимо, що задоволення умов (2.6) може розумітися також у тому чи іншому узагальненому сенсі, наприклад, по нормі, що збігається до нуля, або метриці деякого простору. У цьому випадку говоритимемо про узагальнені структури.

Отже, структура розв'язку, що враховує ті чи інші крайові умови, визначає жмуток функцій, що задовольняють ці умови.

Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, визначає деяку множину $D_B \subset D_A$, $D_B = \{u : u = B(\Phi) \ \forall \Phi \in \mathfrak{M}\}$. Однак може виявитися, що розв'язок u_0 крайової задачі не міститься в D_B . У цьому випадку структуру $u = B(\Phi)$ називатимемо неповною. Якщо $u_0 \in D_B$, то структура $u = B(\Phi)$ називається повною (у класичному значенні). У багатьох випадках немає класичного розв'язку крайової задачі, і якщо він й існує, то невідомі чи важко реалізовані методи його отримання.

Означення 2.6. Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, називається повною у значенні метрики $\rho(u, v)$ (чи по нормі $\|\cdot\|$), якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Phi_\varepsilon \in \mathfrak{M}$, $\rho[u_0, B(\Phi_\varepsilon)] < \varepsilon$ (чи $\|u_0 - B(\Phi_\varepsilon)\| < \varepsilon$), де u_0 – класичний (чи узагальнений) розв'язок задачі.

Після того, як повна або повна в деякому сенсі структура побудована, виникає питання про відшукання елемента $\Phi \in \mathfrak{M}$. Природно, що чим ширше ця множина, тим, взагалі кажучи, складнішим є задача пошуку. Тому при побудові структур необхідно прагнути до того, щоб множина \mathfrak{M} була по можливості вужчою.

Нехай $u = B_i(\Phi_i)$, $\Phi \in \mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2$) – повні чи повні у деякому сенсі стру-

ктури, що враховують деяку систему умов. Тоді якщо $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, то структуру $u = B_1(\Phi_1)$ будемо називати структурою кращої якості, ніж $u = B_2(\Phi_2)$. Чим краща якість структури, тим вужча множина \mathfrak{M} , у якій слід шукати невизначену Φ , відповідну точному розв'язку задачі чи досить хорошому наближенню.

Найчастіше доводиться мати справу з крайовими умовами вигляду

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n} \partial \tau}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \tau^k}, x, y\right)\Big|_{\partial \Omega} = \Phi_0\Big|_{\partial \Omega}, \quad (2.7)$$

де F – деяка найчастіше лінійна щодо своїх аргументів u , $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$, \dots , $\frac{\partial^k u}{\partial \tau^k}$ функція;

\mathbf{n} та τ – напрями нормалі та дотичної до межі $\partial \Omega$.

Похідні по нормалі та дотичній, що входять до формули (2.7), мають сенс лише на межі області. У той самий час структура, що задовольняє умову (2.7), мусить мати сенс всюди у області Ω .

Розглянемо диференціальні оператори, за допомогою яких можна продовжити крайові умови всередину області Ω :

$$D_n = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n-i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^i \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

$$T_n = \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^{n-i} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

де $\omega(x, y)$ – функція, що задовольняє умови:

а) $\omega(x, y) > 0$ усередині Ω ;

б) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial \Omega$;

в) $\omega(x, y) < 0$ поза Ω ; (2.8)

г) $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 1$ на $\partial \Omega$.

Для будь-якої функції $u \in C^n$ мають місце співвідношення

$$D_n u|_{\partial \Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \mathbf{n}^n}, \quad T_n u|_{\partial \Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \tau^n}, \quad D_k T_{n-k} u|_{\partial \Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \mathbf{n}^k \partial \tau^{n-k}}.$$

Зокрема, для $k=1$ через умови б), г) з (2.8) для $\omega(x, y)$ та добутку $\omega(x, y)\Phi$, де Φ – обмежена диференційовна функція, отримуємо

$$D_1 \omega = 1 + O(\omega), \quad T_1 \omega = O(\omega),$$

$$D_1(\omega\Phi) = (D_1\omega)\Phi + \omega D_1\Phi = \Phi + O(\omega), \quad T_1(\omega\Phi) = O(\omega).$$

Нехай функція φ_0 задана так:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi_1, & (x, y) \in \partial \Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_m, & (x, y) \in \partial \Omega_m, \end{cases}$$

причому $\{\partial \Omega_i\}_{i=1}^m$ утворюють розбиття $\partial \Omega$, і нехай φ – функція, визначена всередині Ω і така, що $\varphi|_{\partial \Omega} = \varphi_0$. Побудову такої функції можна здійснити за допомогою процедури «склеювання» граничних значень [6, 7].

Позначимо $\partial \Omega_i^0 = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \partial \Omega_j$, а $\omega_i^0(x, y) = 0$ – рівняння межі $\partial \Omega_i^0$ і $\omega_i^0(x, y) > 0$

поза $\partial \Omega_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Тоді функція

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \omega_1^0 + \dots + \varphi_m \omega_m^0}{\omega_1^0 + \dots + \omega_m^0} \quad (2.9)$$

має сенс скрізь у Ω за винятком, можливо, кінцевих точок елементів $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$), і задовольняє умову $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$. Тут під кінцевими точками розуміються точки елемента $\partial\Omega_i$, які можуть належати і деяким іншим елементам $\partial\Omega_j, j \neq i$.

Іноді «склеюючу» функцію φ зручно будувати у вигляді

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \tau_1 + \dots + \varphi_m \tau_m}{\tau_1 + \dots + \tau_m}, \quad (2.10)$$

де $\tau_i = \omega_i^{-1}$, $\partial\Omega_i = (\omega_i = 0)$, $\omega_i > 0$ поза $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$). У цьому разі під час наближення до елемента $\partial\Omega_i$ функція $\tau_i \rightarrow \infty$ ($i=1, 2, \dots, m$) і граничні значення збігаються зі значеннями φ_i ($i=1, 2, \dots, m$).

Оператор «склеювання» граничних значень, який визначається будь-якою з формул (2.9), (2.10), будемо позначати надалі ЕС ($ЕС\varphi_i = \varphi$) [6, 7].

Після побудови структури розв'язку крайової задачі, що є математичною моделлю деякого фізико-механічного поля, постає проблема вибору невизначеної компоненти. Апроксимація невизначеної компоненти з метою задоволення основного рівняння задачі можна здійснити, наприклад, за допомогою проєкційних та варіаційних методів [8].

Метод R -функцій у задачах гідродинаміки ідеальної рідини застосовувався Колосовою С.В. (стаціонарні задачі обтікання тіл та вісесиметричні течії у трубах з перешкодами), а у задачах гідродинаміки в'язкої рідини застосовувався Сидоровим М.В. (стаціонарні плоскопаралельні течії), Артюхом А.В. (нестаціонарні плоскопаралельні течії), Ламтюговою С.М. (задачі обтікання тіл в'язкою рідиною) та іншими [9 – 12].

2.2 Застосування структурного методу (метода R -функцій) при аналізі течій в'язкої теплопровідної рідини

Для розв'язання крайової задачі (1.5) – (1.8) сумісно використовуємо методи R -функцій та Рітца.

Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω кусково-гладка і може бути описана елементарною функцією $\omega(x, y)$ згідно з методом R -функцій, причому функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови:

- 1) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
- 2) $\omega(x, y) > 0$ у Ω ;
- 3) $\frac{\partial\omega}{\partial n} = -1$ на $\partial\Omega$, тобто $\omega(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння $\partial\Omega$.

У роботі [10] було показано, що крайові умови (1.7) та (1.8) задовольняють жмутки функцій відповідно

$$\begin{aligned}\psi &= f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \\ \theta &= h + \omega \Upsilon,\end{aligned}$$

де $f = EC f_0$, $g = EC g_0$, $h = EC h_0$ – продовження функцій f_0 , g_0 , h_0 у Ω ,

$$D_1 v = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = (\nabla\omega, \nabla v),$$

$\Phi = \Phi(x, y)$, $\Upsilon = \Upsilon(x, y)$ – невизначені компоненти структур, які припустимо досить гладкими.

У задачі (1.5) – (1.8) зробимо заміну

$$\psi = \varphi + u, \tag{2.11}$$

$$\theta = h + v, \tag{2.12}$$

де $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$, u , v – нові невідомі функції. Тоді для функції u та v отримаємо початково-крайову задачу з однорідними крайовими умовами:

$$v\Delta^2 u - \beta \frac{\partial v}{\partial x} = F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.13)$$

$$\kappa(-\Delta v) = G, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.14)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.15)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.16)$$

де $F = -v\Delta^2 \varphi + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $G = \kappa \Delta \varphi$.

Для розв'язання задачі (2.13) – (2.16) застосуємо метод Рітца.

Із задачею (2.13) – (2.16) зв'яжемо два диференціальних оператори A та B , що діють у $L_2(\Omega)$ на областях визначення

$$D_A = \left\{ u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_B = \left\{ v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

за правилами

$$Au = \Delta^2 u, \quad Bv = -\Delta v.$$

Можна довести [10], що оператори A та B є додатно-визначеними.

Замкнувши D_A і D_B в метриках, породжених скалярними добутками $[u_1, u_2]_A$, $[v_1, v_2]_B$, отримаємо енергетичні простори H_A і H_B , причому

$$[u_1, u_2]_A = \iint_{\Omega} \Delta u_1 \Delta u_2 dx dy, \quad [v_1, v_2]_B = \iint_{\Omega} \nabla v_1 \nabla v_2 dx dy.$$

Тоді задача (2.13) – (2.16) еквівалентна послідовному знаходженню мінімумів двох функціоналів енергії:

$$v^* = \inf_{v \in H_B} F_2[v], \quad u^* = \inf_{u \in H_A} F_1[u], \quad (2.17)$$

де $F_2[v] = \kappa[v, v]_B - 2(v, G)$, $F_1[u] = \nu[u, u]_A - 2\left(u, \beta \frac{\partial v^*}{\partial x}\right) - 2(u, F)$.

Екстремальні задачі (2.17) розв'яжемо методом Рітца.

Нехай $\{\varphi_k\}$ – послідовність функцій, що задовольняє умови:

- а) $\varphi_k \in H_A$ для всіх $k \in \mathbb{N}$;
- б) за будь-якого n $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ лінійно незалежні;
- в) система $\{\varphi_k\}$ повна в H_A ;

а $\{\upsilon_k\}$ – послідовність функцій, що задовольняє умови:

- а) $\upsilon_k \in H_B$ для всіх $k \in \mathbb{N}$;
- б) за будь-якого n $\upsilon_1, \dots, \upsilon_n$ лінійно незалежні;
- в) система $\{\upsilon_k\}$ повна в H_B .

Оскільки структура розв'язку задачі (2.13) – (2.16) має вигляд

$$u = \omega^2 \Phi, \quad v = \omega \Upsilon,$$

то координатні функції φ_k , υ_k можна взяти у вигляді

$$\varphi_k = \omega^2 \tau_k, \quad \upsilon_k = \omega \tau_k,$$

де $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна $L_2(\Omega)$ система функцій.

Наближені розв'язки задач (2.17) шукатимемо у вигляді

$$v_n = \sum_{k=1}^n d_k v_k, \quad u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k.$$

Відповідно до методу Рітца d_1, \dots, d_n – розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\kappa \sum_{k=1}^n d_k [v_k, v_j]_B = (v_k, G)_{L_2(\Omega)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

а c_1, \dots, c_n – розв'язок системи алгебраїчних рівнянь

$$v \sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j]_A c_k = \left(\varphi_k, \beta \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + (\varphi_k, F)_{L_2(\Omega)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.19)$$

Тут

$$[v_1, v_2]_B = \iint_{\Omega} \nabla v_k \nabla v_j dx dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \frac{\partial v_j}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(v_k, G)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \kappa v_k \Delta h dx dy = \kappa \iint_{\Omega} v_k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) dx dy,$$

$$[\varphi_k, \varphi_j]_A = \iint_{\Omega} \Delta \varphi_k \Delta \varphi_j dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right) dx dy,$$

$$\left(\varphi_k, \beta \frac{\partial v_n}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \beta \varphi_k \frac{\partial v_n}{\partial x} dx dy = \beta \sum_{i=1}^n d_i \iint_{\Omega} \varphi_k \frac{\partial v_i}{\partial x} dx dy,$$

$$(\varphi_k, F)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \varphi_k F dx dy = \iint_{\Omega} \varphi_k \left(-v \Delta^2 \varphi + \beta \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dy.$$

Отже, розв'язавши СЛАР (2.18), (2.19) ми отримаємо наближений розв'язок задачі (2.13) – (2.16), а отже, і наближений розв'язок задачі (1.5) – (1.8).

Висновки за розділом 2

Було проведено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі комп'ютерного моделювання стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини (лінійна задача).

1. Розглянуто основні відомості з теорії методу R -функцій та її застосування для розв'язування оберненої задачі аналітичної геометрії та побудови структур розв'язку крайових задач математичної фізики, з'ясовано доцільність застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язування поставленої задачі теорії гідродинаміки в'язкої рідини.

2. Розглянуто застосування методів теорії R -функцій до побудови структури розв'язку задачі розрахунку стаціонарної течії в'язкої теплопровідної рідини (лінійна задача). Для апроксимації невизначеної компоненти структури описано застосування методу Рітца, що дозволяє отримати наближений розв'язок задачі комп'ютерного моделювання стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини у аналітичному вигляді.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3

Більшість математичних систем, що використовуються під час роботи з комп'ютерами, призначені для виконання чисельних розрахунків. Їх результат завжди конкретний: це чи цифра, чи потік цифр, наданих як таблиць, матриць чи точок графіка. Зазвичай, під час операцій із дійсними числами відбувається їх округлення, обумовлене важливим обмеженням розрядної сітки комп'ютера. Реалізація більшості чисельних методів, наприклад розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, також базується на свідомо наближених чисельних методах [13].

Довгий час обмежені можливості персональних комп'ютерів не дозволяли реалізувати на них серйозні системи символічної математики. Лише на початку 90-х років ситуація помітно покращилася. Найбільшу популярність здобули три класи систем символічної математики: створена на базі мови штучного інтелекту MuLisp, мала система Derive, одна з найпотужніших і досі привабливих систем Maple XVIII, і система Mathematica – одна з найбільших систем символічної математики. Пакет має широкі графічні можливості, представлення документів у формі Notebook, що поєднує програми і команди з даними, представленими у формульному, текстовому, табличному і графічному вигляді.

Система забезпечує динамічний зв'язок між комірками документів у стилі електронних таблиць при розв'язанні багатьох символічних задач, що принципово та вигідно відрізняє її від інших систем. З погляду мови програмування система Mathematica 13.3 належить до систем, що інтерпретують, тобто послідовно аналізує (інтерпретує) кожен вираз і відразу виконує його. Робота із системою відбувається у діалоговому режимі. Система містить достатній набір керуючих структур для створення умовних виразів, розгалужень у програмах, циклів тощо. Для виконання поставленої задачі, після аналізу можливостей різних середовищ програмування та математичних пакетів було обрано саме пакет

Mathematica 13.3, оскільки він, на наш погляд, є найбільш оптимальним для проведення теоретичного та чисельного аналізу, і, зокрема, для розв'язання задач гідродинаміки в'язкої рідини.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини

З огляду на викладене у п. 2.2 алгоритм розв'язання задачі (1.5) – (1.8) полягає в наступному:

- а) задаємо геометричні та фізичні параметри процесу;
- б) будуємо за допомогою R -функцій функцію ω , функції φ та h ;
- в) задаємо координатні послідовності $\{\varphi_k\}$ та $\{v_k\}$;
- г) складаємо та розв'язуємо системи Рітца (2.18), (2.19);
- д) будуємо наближені розв'язки v_n , u_n та $\theta_n = h + v_n$, $\psi_n = \varphi + u_n$;
- е) будуємо графічне подання розв'язків – поверхні та лінії рівня температури, функцію течії, завихрення, векторні поля швидкостей.

3.3 Опис програми

Програма виконана у математичному пакеті Mathematica 13.3, що дозволяє створювати програмні продукти у формі електронних документів.

У першому блоці програми описується геометрія області за допомогою методі теорії R -функцій і задається координатна система φ_k .

У другому блоці програми будується система Рітца для знаходження розподілу температур.

У третьому блоці програми знаходимо коефіцієнти c_k , за допомогою яких отримуємо наближений за Рітцем розв'язок для розподілу температур.

У четвертому блоці будуємо графіки поверхні температури та лінії рівня температури.

У п'ятому блоці будується система Рітца для функції течії.

У шостому блоці знаходимо коефіцієнти d_k , за допомогою яких отримуємо наближений за Рітцем розв'язок для функції течії.

У сьомому блоці будуємо графіки поверхні функції течії та лінії рівня функції течії.

У восьмому блоці за допомогою знайденого наближеного значення функції течії знаходимо завихореність і будуємо графіки його поверхні та лінії рівня.

У дев'ятому блоці за допомогою знайденого наближеного значення функції течії будуємо векторне поле швидкостей.

Лістинг програми наведено у додатку А.

Висновки за розділом 3

Для розв'язання поставленої задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини була обрана система Mathematica 13.3.

1. Описано особливості та переваги системи Mathematica 13.3, зокрема її переваги при розв'язуванні задач комп'ютерного моделювання течій в'язкої рідини.

2. Розроблено алгоритм розв'язування задачі математичного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини .

3. Описано розроблену за побудованим алгоритмом у системі Mathematica 13.3 програму комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент було проведено для прямокутної області $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Крайові умови для температури та функції течії мають вигляд

$$\theta|_{\partial\Omega} = \begin{cases} Ax(a-x), & y=0, \\ 0, & \partial\Omega \setminus \{y=0\}, \end{cases}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Тоді структура розв'язку крайової задачі (1.5) – (1.8) має вигляд

$$\psi = \omega^2\Phi, \quad \theta = h + \omega\Upsilon.$$

Тут функція $h(x, y)$ має вигляд

$$h(x, y) = \frac{Ax(a-x)\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y) + \omega_2(x, y)},$$

а функції $\omega(x, y)$, $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, побудовані за допомогою R -функцій, мають вигляд

$$\omega(x, y) = \frac{1}{a}x(a-x) \wedge_0 \frac{1}{b}y(b-y),$$

$$\omega_1(x, y) = y,$$

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{a}x(a-x) \wedge_0 (b-y).$$

Для розрахунків було обрано $a = 1$, $b = 1$, $A = 1$.

На рис. 4.1 – 4. 16 наведено поверхню температури, лінії рівня температури, поверхню функції течії, лінії рівня функції течії, поверхню завихореності, лінії рівня завихореності, векторне поле швидкостей та графік швидкості v_x у перерізі $x = 0,25$ при $Gr = 10, 20, 30, 40, 50$. Число Грасгофа Gr є безрозмірним комплексом, що визначається так:

$$Gr = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2},$$

де β – коефіцієнт теплової зміни густини;

g – прискорення вільного падіння;

L – характерна довжина;

ΔT – масштаб перепаду температур;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості.

Число Грасгофа використовується для явищ вільної конвекції, оскільки воно не містить масштабу швидкості, відсутнього в задачі вільної конвекції.

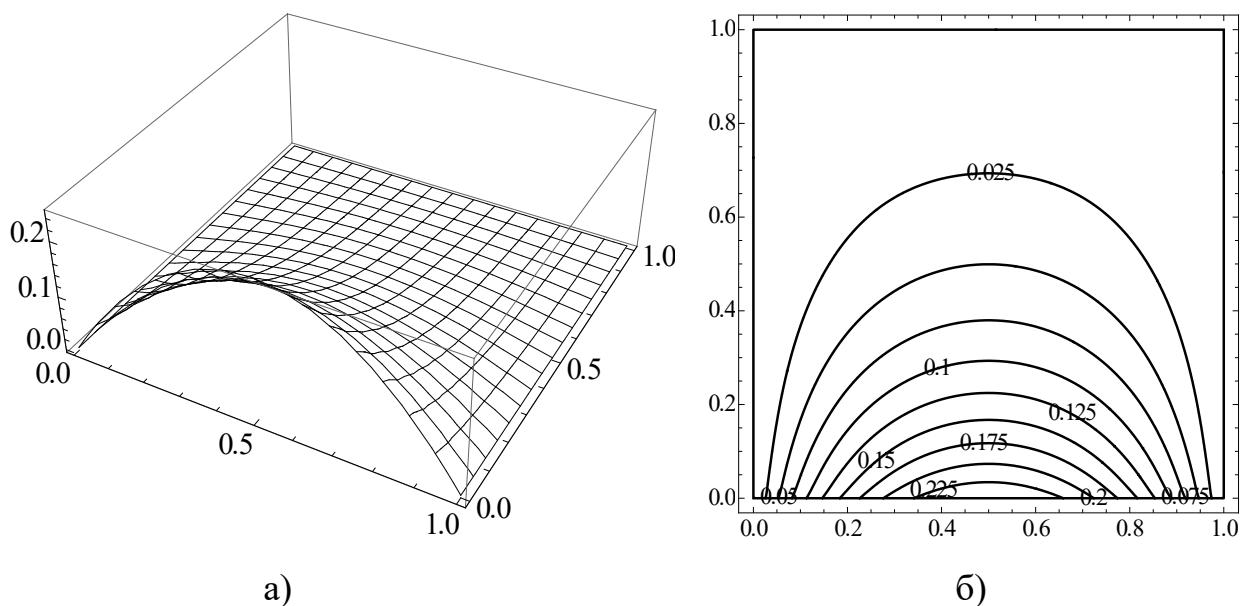
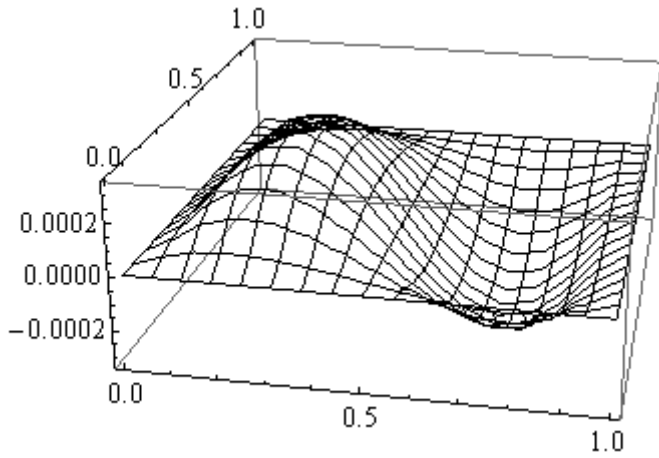
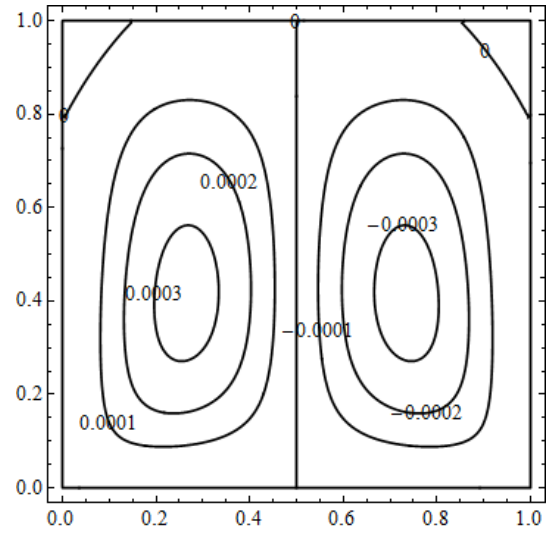


Рисунок 4.1 – Поверхня температури (а) та лінії рівня температури (б)

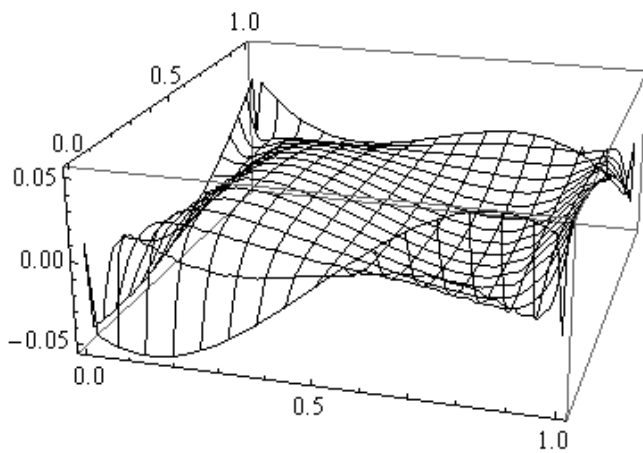


а)

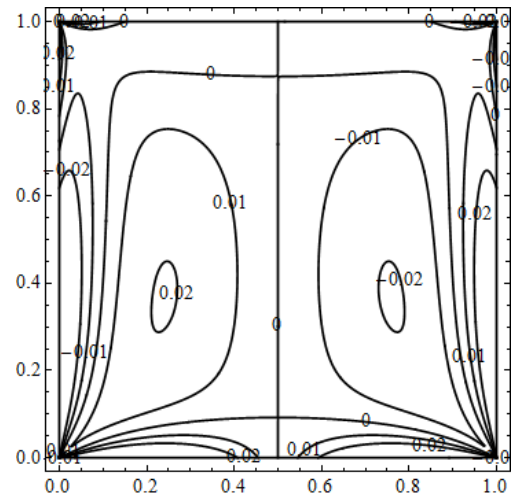


б)

Рисунок 4.2 – Поверхня функції течії (а) та лінії рівня функції течії (б)
при $Gr = 10$



а)



б)

Рисунок 4.3 – Поверхня завихореності (а) та лінії рівня завихореності (б)
при $Gr = 10$

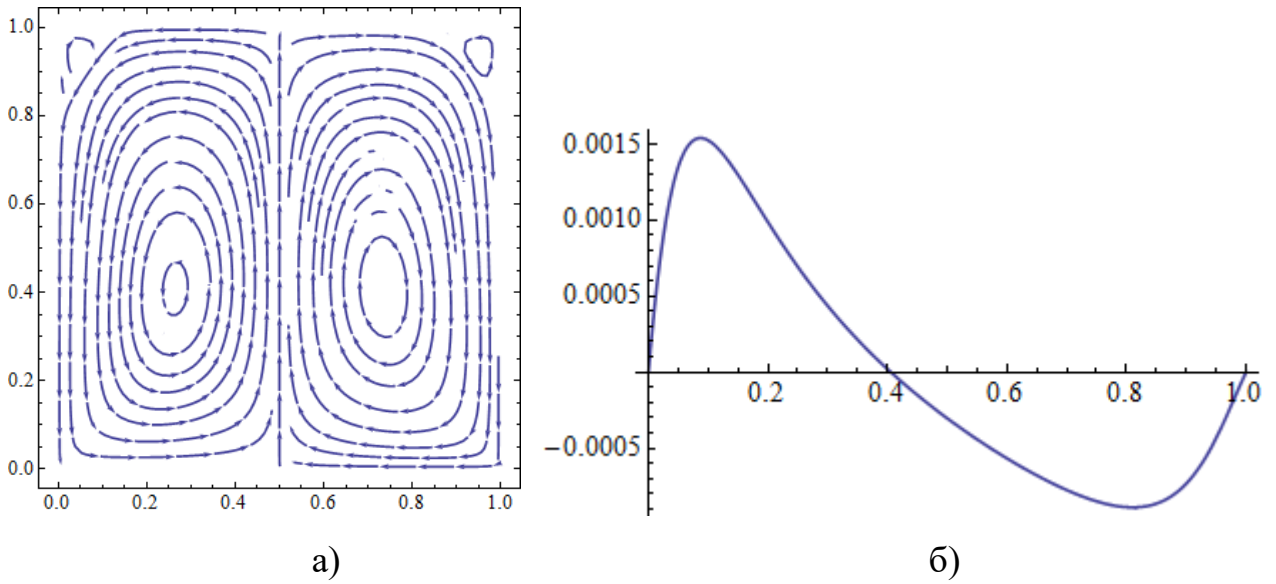


Рисунок 4.4 – Векторне поле швидкостей (а) та графік $v_x|_{x=0,25}$ (б)

при $Gr = 10$

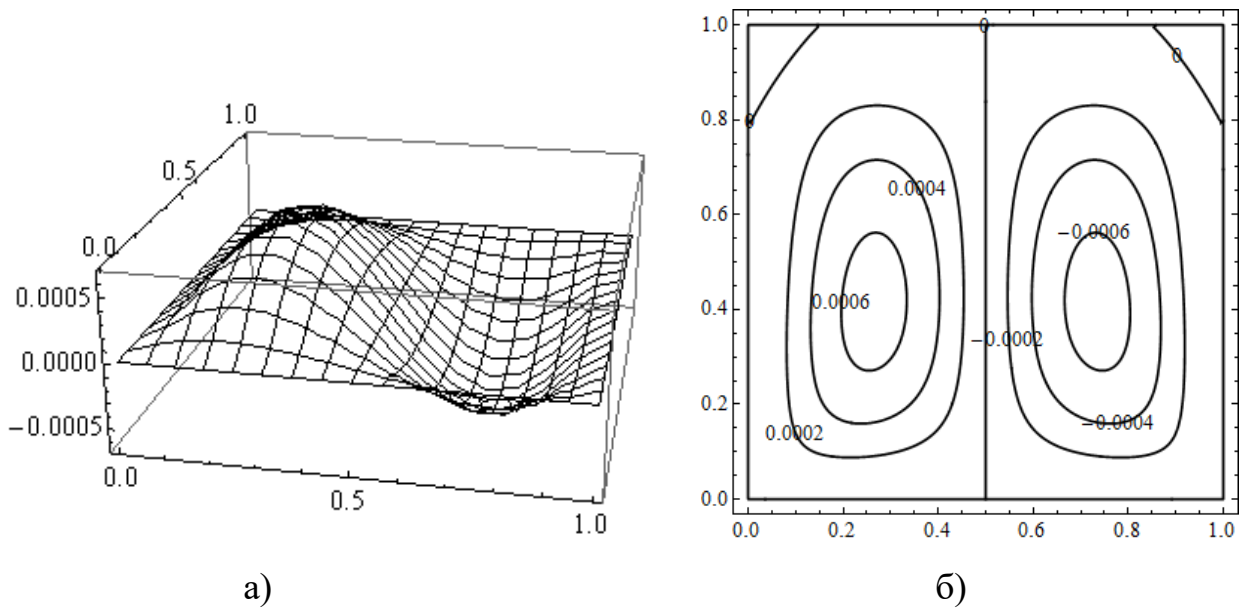
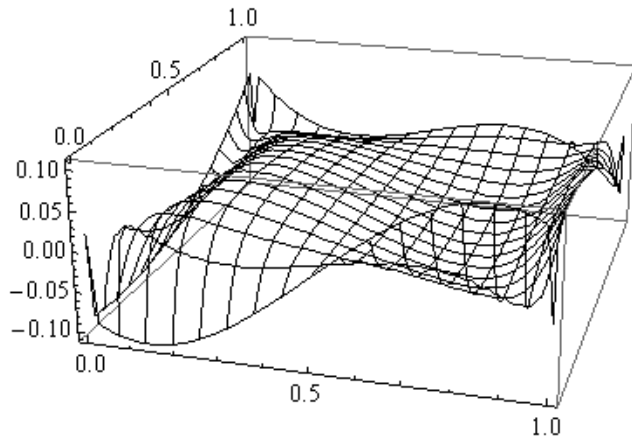
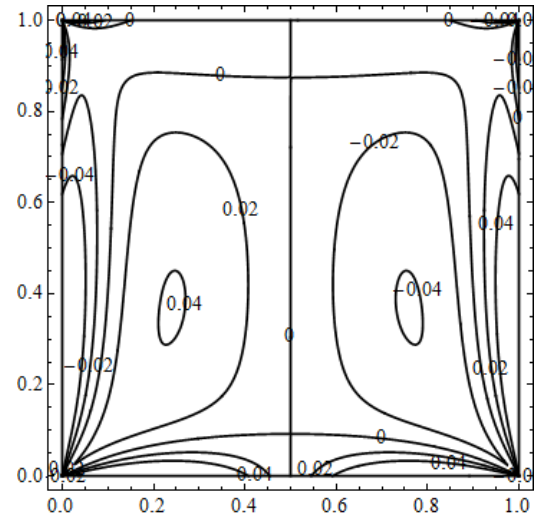


Рисунок 4.5 – Поверхня функції течії (а) та лінії рівня функції течії (б)

при $Gr = 20$

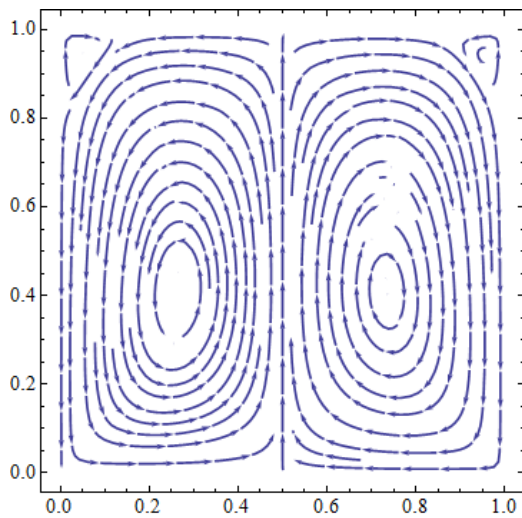


а)

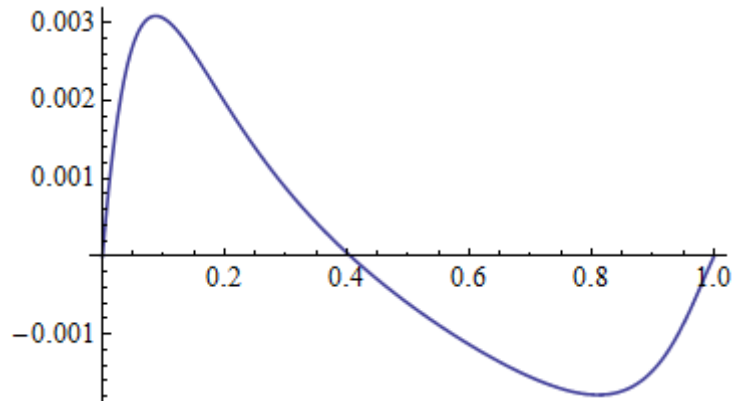


б)

Рисунок 4.6 – Поверхня завихореності (а) та лінії рівня завихореності (б)
при $Gr = 20$



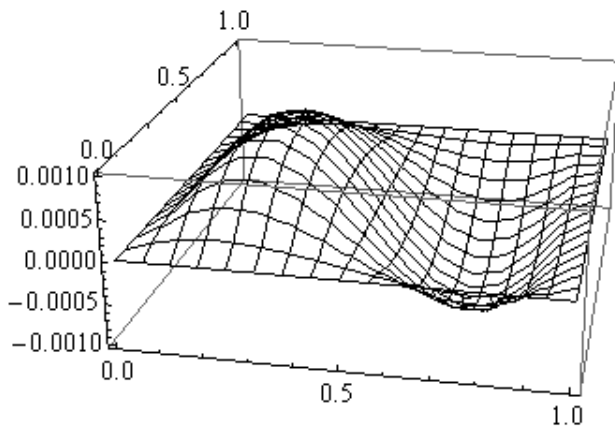
а)



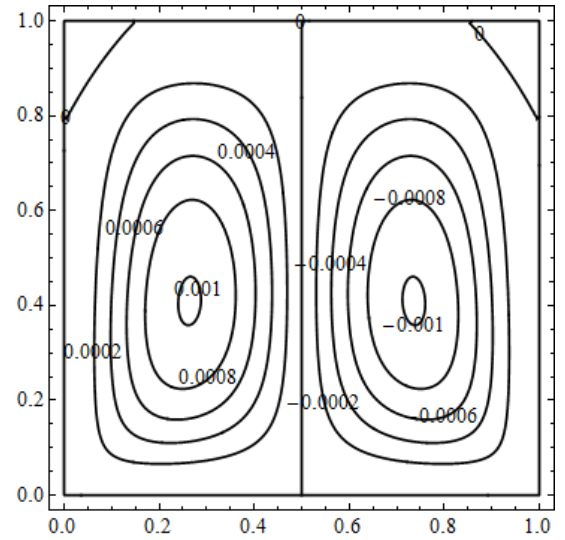
б)

Рисунок 4.7 – Векторне поле швидкостей (а) та графік $v_x|_{x=0,25}$ (б)

при $Gr = 20$

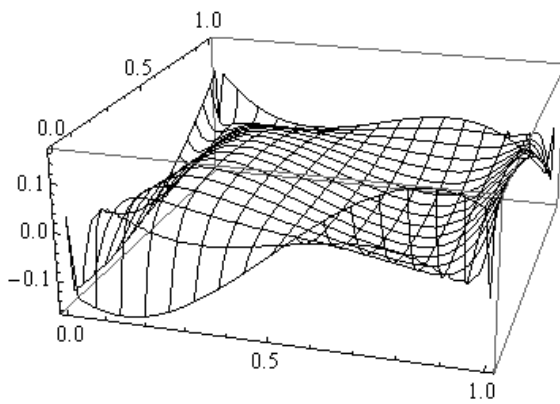


а)

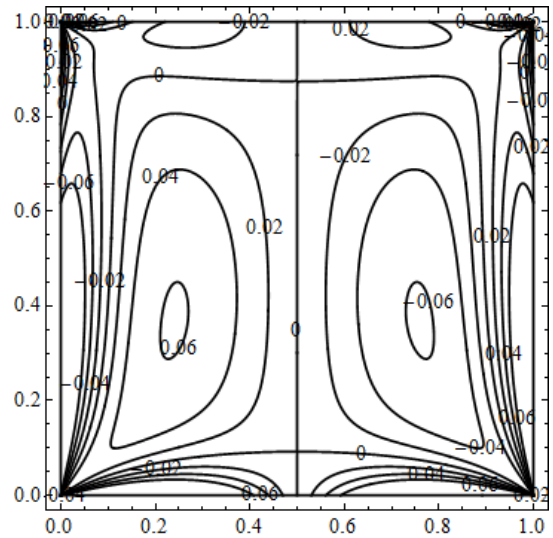


б)

Рисунок 4.8 – Поверхня функції течії (а) та лінії рівня функції течії (б)
при $Gr = 30$



а)



б)

Рисунок 4.9 – Поверхня завихореності (а) та лінії рівня завихореності (б)
при $Gr = 30$

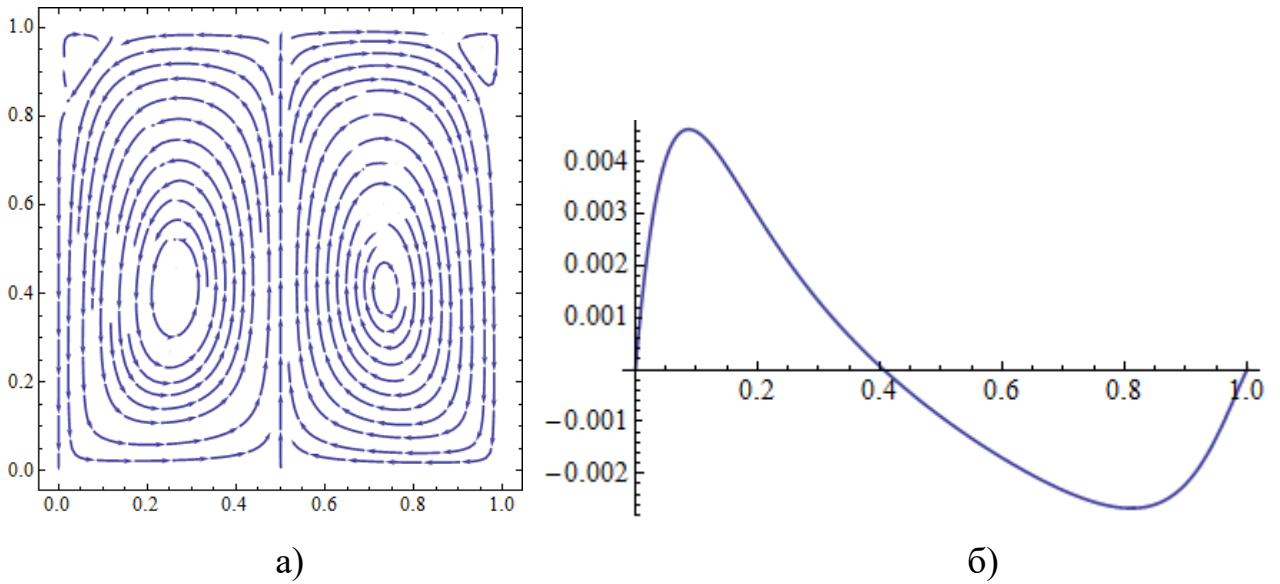


Рисунок 4.10 – Векторне поле швидкостей (а) та графік $v_x|_{x=0,25}$ (б)

при $Gr = 30$

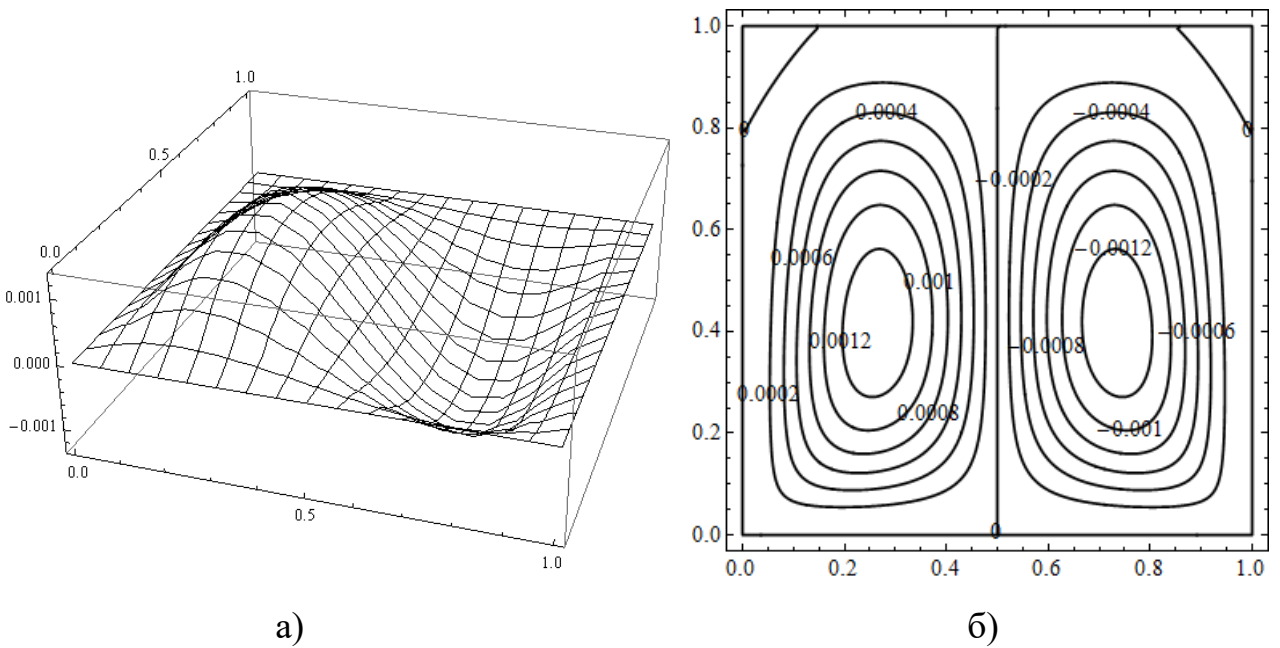


Рисунок 4.11 – Поверхня функції течії (а) та лінії рівня функції течії (б)

при $Gr = 40$

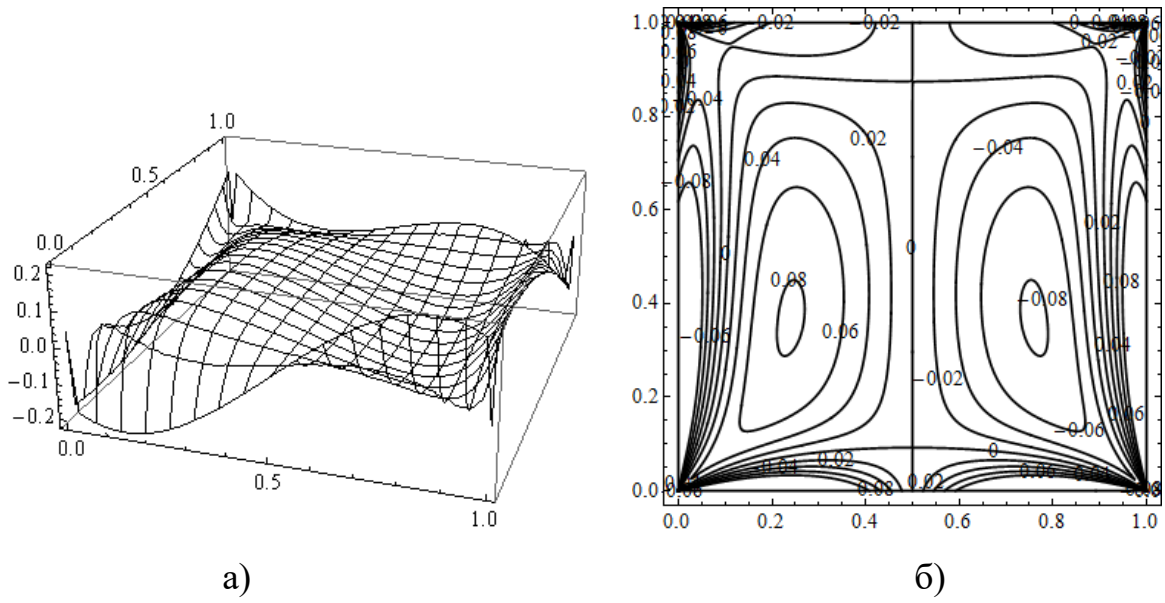


Рисунок 4.12 – Поверхня завихореності (а) та лінії рівня завихореності (б) при $Gr = 40$

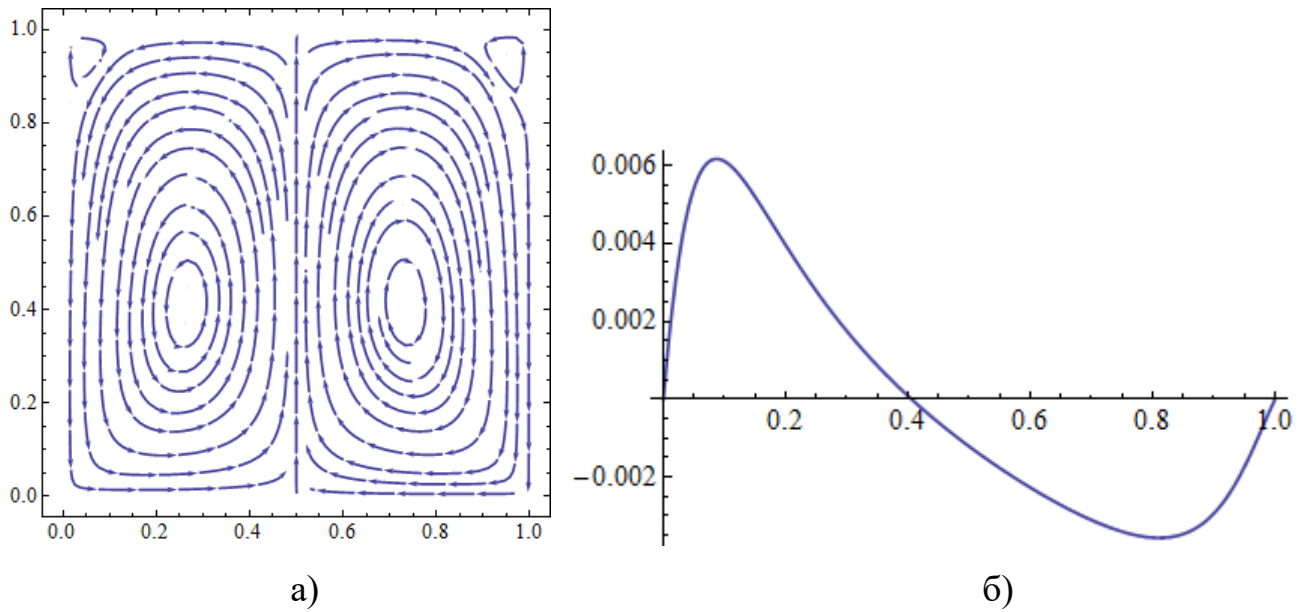
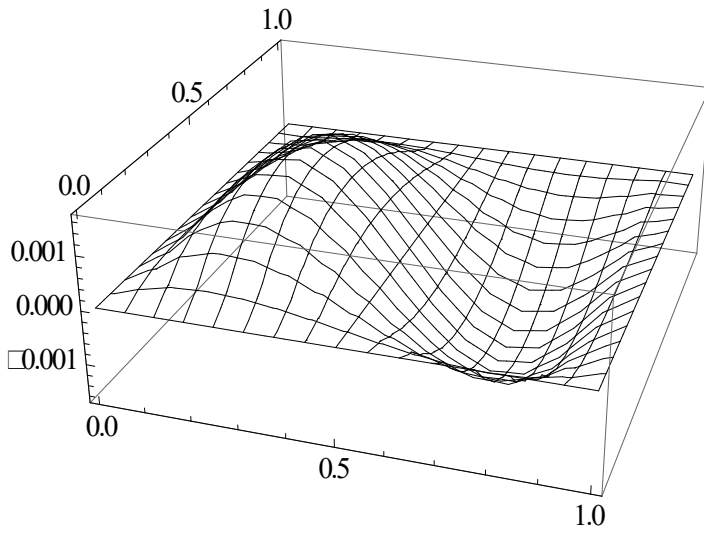
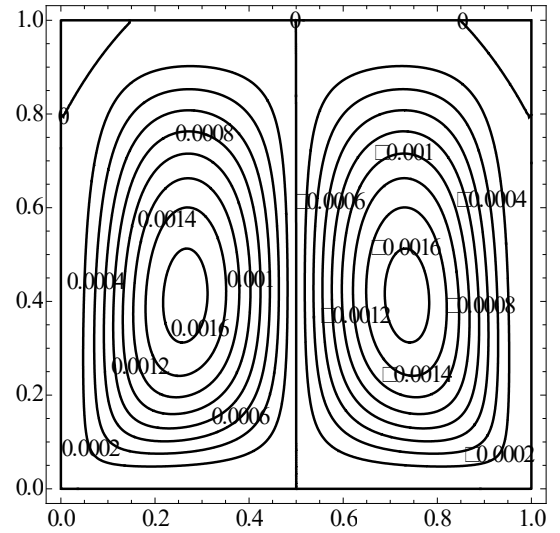


Рисунок 4.13 – Векторне поле швидкостей (а) та графік $v_x|_{x=0,25}$ (б) при $Gr = 40$

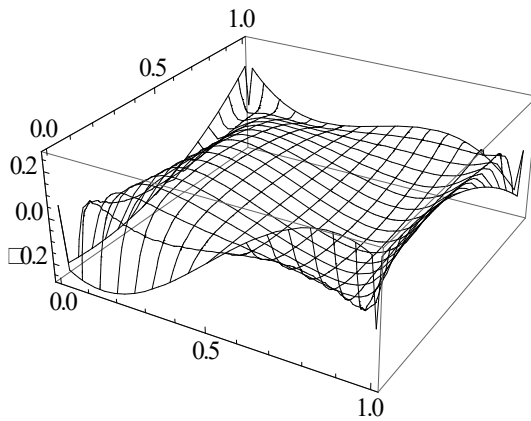


а)

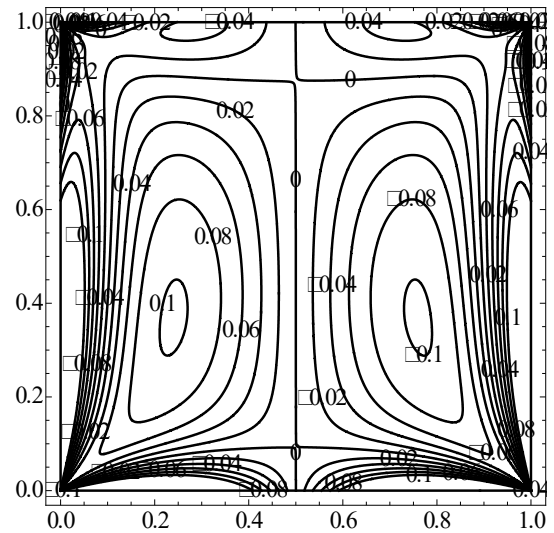


б)

Рисунок 4.14 – Поверхня функції течії (а) та лінії рівня функції течії (б)
при $Gr = 50$



а)



б)

Рисунок 4.15 – Поверхня завихореності (а) та лінії рівня завихореності (б)
при $Gr = 50$

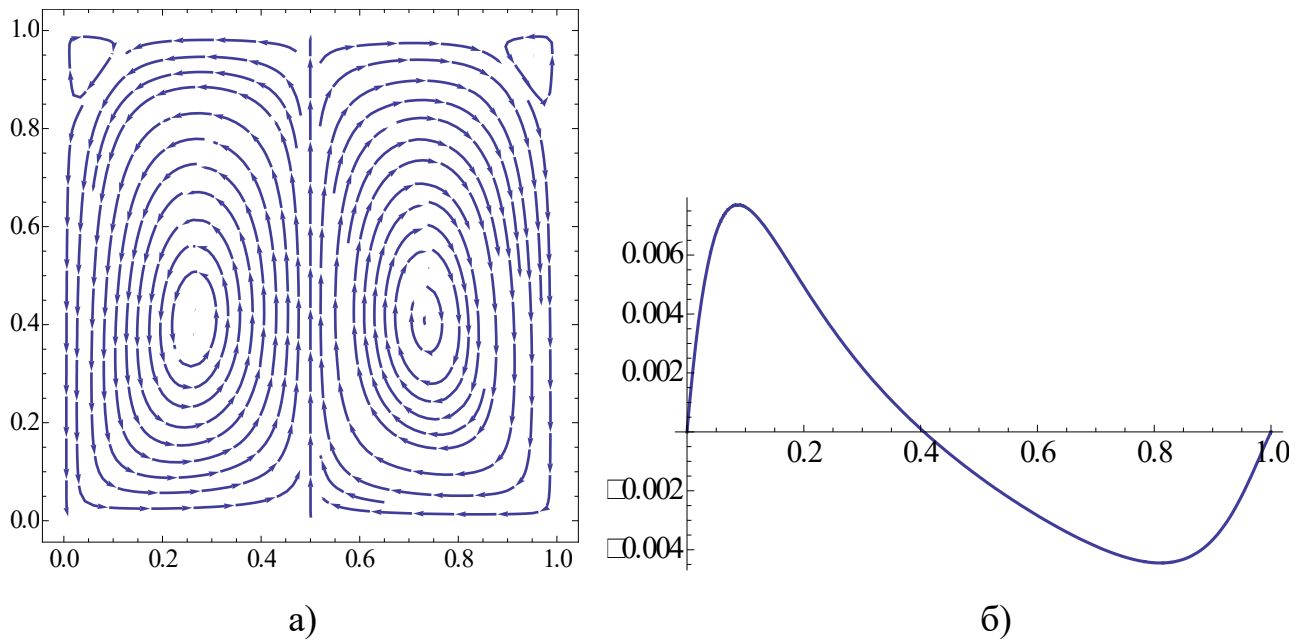


Рисунок 4. 16 – Векторне поле швидкостей (а) та графік $v_x|_{x=0,25}$ (б)

при $Gr = 50$

У таблиці 4.1 наведено координати вихрового центру та значення в ньому функції току та вихору для різних значень числа Грасгофа Gr .

Таблиця 4.1

Gr	$x_{v.c.}$	$y_{v.c.}$	$\Psi(x_{v.c.}, y_{v.c.})$	$\zeta(x_{v.c.}, y_{v.c.})$
10	0,263959	0,408728	0,00033806	0,020122
20	0,263959	0,408728	0,00067612	0,040245
30	0,263959	0,408728	0,00101417	0,060367
40	0,263959	0,408728	0,00135223	0,080489
50	0,263985	0,408665	0,00169042	0,100612

Як видно, зі зростанням числа Грасгофа збільшуються максимуми функції току і вихору, а вихровий центр зміщується вгору, що свідчить про інтенсивніший циркуляційний рух в області.

Висновки за розділом 4

Проведено обчислювальний експеримент для тестових задач розрахунку стаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини. Результати обчислювального експерименту представлені у табличній (характеристики течії) та графічній формах (лінія рівня функції течії, температури, завихореності, векторне поле скоростей тощо). Аналіз результатів показує, що застосування до розв'язування задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини структурного методу (методу R -функцій) дає хороші результати, які добре співвідносяться як з математичною постановкою задачі, так і з її фізичним змістом.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було застосовано структурний метод (метод R -функцій) у поєднанні з варіаційним методом Рітца до комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини.

1. Було проведено аналіз задачі комп'ютерного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини. Зроблено висновок про перспективність застосування до моделювання в'язких течій структурного методу академіка НАН України В.Л. Рвачова.

2. На основі сумісного застосування методів R -функцій та Рітца розроблено алгоритм чисельного аналізу математичної моделі, що описує стаціонарну течію в'язкої теплопровідної рідини (лінійне наближення).

3. Розроблений алгоритм програмно реалізовано у пакеті Mathematica 13.3 і за допомогою цієї програми проведено обчислювальний експеримент для тестової задачі для різних чисел Грасгофа, що підтвердило ефективність застосованого методу.

4. Дослідження течій в'язкої теплопровідної рідини може бути застосовано у різних технічних сферах, що стикаються з задачами гідродинаміки.

5. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для створення та аналізу комп'ютерних моделей, програм або алгоритмів, що зможуть вдосконалити та оптимізувати проведення математичного моделювання течій в'язкої теплопровідної рідини.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. Київ : Видавнича група ВНУ, 2007. 544 с.
2. Катренко А. В. Системний аналіз. Львів : “Новий світ – 2000”, 2011. 396 с.
3. Лямец В. И., Тевяшев А. Д. Системный анализ. Вводный курс. 2-е изд., перераб. и доп. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003. 840 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Москва : Наука, 1986. 736 с.
6. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физики. Киев : Наукова думка, 1974. 260 с.
7. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.
8. Колосова С. В. Вариационные методы приближенного решения краевых задач и интегральных уравнений. Киев : УМК ВО, 1990. 72 с.
9. Колосова С.В. Применение проекционных методов и метода R -функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... к.ф.-м.н.: 01.01.07 – вычислительная математика. – Харьков: ХИРЭ, 1972. 85 с.
10. Сидоров М. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз течій в'язкої рідини в однозв'язних і багатозв'язних областях методом R -функцій : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фізико-математичних наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. національний університет радіоелектроніки. Харків, 2008. 202 с.
11. Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R -функцій нестационарних течій в'язкої нестисливої рідини : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фізико-математичних наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. національний університет радіоеле-

лектроніки. Харків, 2015. 251 с.

12. Ламтюгова С. Н. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R-функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 273 с.

13. Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> (дата звернення: 19.12.2024).