

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПАР СКОБОЧНЫХ ТЕРМОВ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ С МИНИМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ОБЩИХ ЧЛЕНОВ

В. С. Блудов

Харьков

В работе автора [1] рассмотрен алгоритм сравнения двух скобочных термов функции алгебры логики

$$f_a = (Vx_{i_1})(Vx_{i_2}) \cdots (Vx_{i_k}); \quad (1)$$

$$i_1 \in I_{a1} \quad i_2 \in I_{a2} \quad i_k \in I_{ak}$$

$$f_b = (Vx_{i_1})(Vx_{i_2}) \cdots (Vx_{i_k}) \quad (1')$$

$$i_1 \in I_{b1} \quad i_2 \in I_{b2} \quad i_k \in I_{bk}$$

где $\{x_i\}$ — множество n переменных алгебры логики; $I_{a1}, \dots, I_{ak}, I_{b1}, \dots, I_{bk}$ — подмножества множества I индексов переменных.

Этот алгоритм дает возможность без перебора производить их сравнение при преобразовании функций алгебры логики к виду, удобному для реализации в виде схемы. Часто при преобразовании определенных функций алгебры логики, применяемых для синтеза релейных электронных схем, необходимо таким образом сгруппировать переменные, чтобы число элементарных конъюнкций, объединяемых скобочным термом, было наибольшим, а число одинаковых элементарных конъюнкций, входящих в два различных терма, — наименьшим.

Только при выполнении этих условий можно представить заданную функцию в виде дизъюнкции нескольких скобочных термов с минимальным числом повторений переменных. Определение скобочных термов является основной задачей минимального представления функций алгебры логики.

Задачу определения скобочных термов с наименьшим числом обоих конъюнкций можно сформулировать следующим образом. По заданному множеству переменных $\{x_i\}$ необходимо построить пару скобочных термов (1) и (1'), обладающих свойствами:

- а) число элементарных конъюнкций, получаемых при раскрытии скобок в любом из этих термов, должно быть наибольшим;
- б) число элементарных конъюнкций, одинаковых для обоих термов, должно быть наименьшим.

Предлагаемый в настоящей статье алгоритм позволяет строить пары скобочных термов (1) и (1') для большого числа переменных (до 200 и более) без больших затрат времени.

Решение сформулированной выше задачи представляет собой алгоритм разбиения множества исходных переменных $\{x_i\}$ на группы, из

которых затем составляются элементарные дизъюнкции, входящие в скобочные термы.

Рассмотрим — какому условию должно удовлетворять разбиение множества $\{x_i\}$ на группы $\{x_{i_1}\}, \dots, \{x_{i_k}\}$, если дизъюнкции, составленные из этих групп, обладают свойством а).

Пусть все n переменных разделены на k групп, из которых k_1 группа имеет $m+m_1$ переменных, а $k-k_1$ группа — по m переменных. Образует из переменных каждой группы элементарные дизъюнкции, произведение которых дает скобочный терм (1).

Очевидно, что число элементарных конъюнкций, получаемых при раскрытии скобок,

$$N = (m + m_1)^{k_1} m^{k-k_1}. \quad (2)$$

Числа m , m_1 , k и k_1 связаны следующим соотношением:

$$(m + m_1)k_1 + m(k - k_1) = n, \quad (3)$$

откуда определим значение N , подставив k_1 из (3) в (2),

$$N(m_1) = m^k \left(1 + \frac{m_1}{m} \right)^{\frac{n-mk}{m_1}}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $N(m_1)$ является убывающей при возрастании аргумента m_1 , т. е. для этой функции всегда выполняется неравенство

$$N(m_1) \leq m^k, \quad m_1 \geq 0.$$

Следовательно, наибольшее число элементарных конъюнкций в скобочной терме

$$N_{\max} = m^k \text{ при } m_1 = 0. \quad (4)$$

Такое разбиение осуществимо, если число переменных n кратно k , т. е. отношение $\frac{n}{k}$ является целым числом. Если это отношение не является целым числом, то всегда можно выбрать ближайшее к нулю целое значение $m_1 = 1$. Тогда значение m и k_1 необходимо выбирать по соотношениям

$$m = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor; \quad k_1 = n - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor k, \quad (5)$$

а число элементарных конъюнкций в этом случае равно

$$N_{\max} = (m + 1)^{k_1} m^{k-k_1}. \quad (6)$$

Теперь перейдем к определению двух разбиений множества переменных $\{x_i\}$: R_a и R_b , которые удовлетворяют условию б).

Число элементарных конъюнкций, являющихся общими для первого и второго термов, определяется значением перманента матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (7)$$

чисел переменных, входящих в пересечения

$$a[(Vx_i) \cap (Vx_j)] = a_{ij}$$

элементарных дизъюнкций первого и второго термов [1]. Матрица чисел (7) обладает следующими свойствами:

1. Если $\frac{n}{k}$ целое число, то сумма чисел a_{ij} , стоящих в любой строке или столбце, равна

$$\sum_{j=1}^{i-k} a_{ij} = m; \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{i-k} a_{ij} = m; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

2. Если $\frac{n}{k}$ не есть целое число, то всегда можно определить числа m и k_1 по формулам (5); при этом сумма чисел a_{ij} , расположенных в k_1 строке или k_1 столбце, равна

$$\sum_{j=1}^{i-k} a_{ij} = m + 1; \quad j = 1, 2, \dots, k_1; \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{i-k} a_{ij} = m + 1; \quad i = 1, 2, \dots, k_1;$$

а сумма чисел, расположенных в $k - k_1$ строке или $k - k_1$ столбце, равна

$$\sum_{i=1}^{i-k} a_{ij} = m; \quad i = k_1 + 1, \dots, k; \quad (9')$$

$$\sum_{j=1}^{i-k} a_{ij} = m; \quad i = k_1 + 1, \dots, k.$$

Число элементарных конъюнкций, общих для пары скобочных термов, также определяется значением перманента матрицы (7), как и в предыдущем случае. Следовательно, выполнение условия б) сводится к определению такой структуры распределения всех переменных по элементарным дизъюнкциям каждого терма, которая обеспечивает минимум перманента матрицы (7).

Определение минимума перманента матрицы (7) при условии, что она обладает свойствами (8) или (9), (9'), в общем виде является задачей, по-видимому, не решенной [2], но можно дать частное решение, необходимое для построения рассматриваемого алгоритма. Это решение дается теоремой 1.

Теорема 1. Если все числа a_{ij} составляющие матрицу (7), отличны от нуля $a_{ij} \neq 0$; $i, j = 1, 2, \dots, k$ и выполняются условия (8), то значение перманента этой матрицы будет иметь минимум в том только случае, когда все числа a_{ij} равны между собой

$$a^i_j = a; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, k$$

$$\min \text{per } \|a\| = a^k \cdot k!$$

Доказательство теоремы дано в Приложении 1.

Теорема 1 дает возможность построить пару термов с минимальным количеством общих элементарных конъюнкций только для значений числа переменных, равных

$$n = ak^2, \quad (10)$$

где a и k целые числа.

Построение пары термов производится следующим образом. Все переменные $\{x_i\}$ разбиваются на k^2 групп по a переменных. Затем в произвольном порядке группы вписываются в матрицу пересечений на места символов пересечений дизъюнкций. Для образования элементарных дизъюнкций первого терма достаточно включить в первую дизъюнкцию все переменные, стоящие в первой строке матрицы, во вторую — все переменные второй строки, и так далее до k -й строки. Чтобы построить элементарные дизъюнкции второго терма, достаточно включить в первую элементарную дизъюнкцию все переменные, которые входят в первый столбец матрицы, вторую — из всех переменных второго столбца, и так далее до k -го столбца. Это построение основано на неизменяемости перманента матрицы (7) при ее транспортировании.

Данный алгоритм иллюстрируем простым примером. Предположим, что задано множество, состоящее из 16 переменных, и необходимо построить два терма, которые удовлетворяли бы требованиям а) и б) поставленной выше задачи. При записи этого примера не выписываем полные обозначения переменных, а пишем только их индексы. Пусть $k=4$ и $a=1$, тогда матрица пересечений имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, элементарные дизъюнкции первого терма состоят из следующих переменных:

1 — (1, 2, 3, 4); 2 — (5, 6, 7, 8); 3 — (9, 10, 11, 12); 4 — (13, 14, 15, 16),
элементарные дизъюнкции второго терма —

1 — (1, 5, 9, 13); 2 — (2, 6, 10, 14); 3 — (3, 7, 11, 15); 4 — (4, 8, 12, 16).

Если a — не является целым числом, то здесь возможны следующие два случая:

1. $\frac{n}{k} = m$ — целое число, а $\frac{m}{k}$ — не целое число;
2. $\frac{n}{k}$ — не целое число.

Рассмотрим детально первый случай. Здесь можно подобрать два числа a и $a+1$, которые определяются по формулам, аналогичным (5).

$$a = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor, \quad l = m - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor k. \quad (11)$$

По этим числам строится матрица, аналогичная матрице (7), но отличающаяся тем, что в каждую строку ее входит l чисел $a+1$ и $k-l$ чисел a .

Теорема 2. Пусть в каждой строке квадратной матрицы порядка k имеется l чисел $a+1$ и $k-l$ чисел a . Образует семейство подобных матриц путем перестановки всеми возможными способами чисел $a+1$ и чисел a в каждой строке таким образом, чтобы выполнялись условия (9), (9'). Построенное семейство матриц будет содержать и все возможные матрицы с минимальным значением перманента, которые отличаются друг от друга только порядком строк и столбцов. Если вычислить перманенты всех матриц семейства, то наименьшее значение перманента получим только у матриц (12), все остальные матрицы имеют большие значения перманентов.

Доказательство этой теоремы мы не приводим из-за его громоздкости. Однако в приложении даем пример, подтверждающий справедливость данной теоремы.

Пользуясь ее результатом, можно представить матрицу, определяющую разбиение переменных, в виде

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+1 \dots a+1 \dots a \\ a & a+1 \dots a \dots a \\ a & a \dots a+1 \dots a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a \dots a \dots a+1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Построение матрицы пересечений по матрице (12) производится аналогично построению для матрицы (7).

Рассмотрим второй случай. Предположим, что либо m делится на k , либо $m+1$ делится на k .

Если m делится на k , то всегда можно написать соотношение

$$m = ak; \quad m+1 = (a+1) + (k-1)a \quad (13)$$

а матрицу, определяющую разбиение переменных, представить в виде

$$\begin{matrix} k_1 \\ \vdots \\ k-k_1 \end{matrix} \left\{ \begin{pmatrix} a+1 & a & \dots & a & a \dots a \\ a & a+1 \dots a & & & a \dots a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \dots & a+1 & a \dots a \\ a & a & \dots & a & a \dots a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & \dots & a & a \dots a \end{pmatrix} \right. \quad (14)$$

Если $m+1$ делится на k , то полагая

$$m+1 = ak; \quad m = (a-1) + (k-1)a, \quad (15)$$

построим следующую матрицу:

$$\begin{matrix} k_1 \\ \vdots \\ k-k_1 \end{matrix} \left\{ \begin{pmatrix} a \dots a & a & a \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a \dots a & a & a \dots a \\ a \dots a & a-1 & a \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a \dots a & a & a \dots a-1 \end{pmatrix} \right. \quad (16)$$

Если ни одно из чисел m или $m+1$ не делится на k , то определим число a по формуле

$$a = \left[\frac{m}{k} \right]; \quad l = m - \left[\frac{m}{k} \right] k, \quad (17)$$

а числа m и $m+1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} m &= (a+1)l + a(k-l); \\ m+1 &= (a+1)(l+1) + a(k-l-1). \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица, определяющая разбиение переменных в данном случае, имеет структуру

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} k_1 \\ \vdots \\ k-k_1 \end{array} \left(\begin{array}{c} \overbrace{a+1 \ a+1 \dots a+1}^{l+1} \ a \quad a \quad \dots a \\ a \quad \overbrace{a+1 \dots a+1}^{l+1} \ a+1 \ a \quad \dots a \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a \quad a \quad \dots \overbrace{a+1}^{l+1} \ a+1 \ a+1 \dots a \\ \hline a \quad a \quad \dots a \quad \overbrace{a+1 \ a+1 \dots a}^{l+1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \overbrace{a+1 \ a+1 \dots a+1}^{l+1} \ a \quad a \quad a+1 \end{array} \right) \quad (19)
 \end{array}$$

Для иллюстрации структуры этой матрицы в Приложении приведен следующий пример:

$$k = 9, \quad k_1 = 3, \quad l = 3.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Доказательство теоремы 1. Предположим, что теорема справедлива для всех матриц порядка k меньше; докажем, что эта теорема справедлива для произвольного k . Возьмем матрицу порядка k и построим окаймляющую ее матрицу порядка $k+1$, добавив $k+1$ -ую строку и $k+1$ -ый столбец. Так как матрица порядка k по условию доказательства имеет минимальный перманент, то можно написать для элементов $k+1$ строки и $k+1$ столбца следующие соотношения:

$$a_{k+1,1} + \dots + a_{k+1,k+1} = m;$$

$$ak + a_{i,k+1} = m; \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Учитывая, что эти соотношения могут быть выполнены для всех $i = 1, 2, \dots, k$, упростим их

$$ak + a_1 = m;$$

$$a_1 k + a_2 = m,$$

где

$$a_1 = a_{i,k+1}; \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad a_2 = a_{k+1,k+1}.$$

Разложим значение перманента расширенной матрицы по $k+1$ строке

$$\text{per} \|a_{ij}\| = ka_1 \cdot \text{per} A_{k+1,1} + a_2 a^k k!$$

Дополнение $A_{k+1,1}$ представляет собой матрицу, у которой $k-1$ столбец состоит из чисел a , а последний столбец — из чисел a_1 . Разлагая перманент этой матрицы по последнему столбцу, найдем, что

$$\text{per} A_{k+1,1} = a_1 a^{k-1} k!$$

Подставляя это значение в выражение для перманента расширенной матрицы, получим

$$\text{per} \|a_{ij}\| = a_1^2 a^{k-1} k k! + a_2 a^k k!$$

Выражая значения a_1 и a_2 через a

$$a_1 = m - ak;$$

$$a_2 = ak^2 - m(k-1);$$

и подставляя их в предыдущее соотношение, получим

$$\text{per} \|a_{ij}\| = \{k^2(k+1)a^{k+1} - m(2k^2 + k - 1)a^k + m^2ka^{k-1}\}k!$$

Нетрудно установить, что минимум этого выражения получается при значении

$$a = \frac{m}{k+1},$$

что полностью доказывает теорему.

2. Для доказательства второй теоремы рассмотрим значение перманента двух матриц четвертого порядка. Первая матрица равна

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & a & a \end{vmatrix}$$

вторая матрица

$$\begin{vmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Перманент первой матрицы имеет значение

$$P_1 = 4a^4 + 16a^2 + 4.$$

Перманент второй матрицы равен

$$P_2 = 2a^4 + 8a^3 + 4a^2 + 8a + 2.$$

Разность этих значений всегда положительна

$$P_1 - P_2 = 2(a-1)^4,$$

и выполняется неравенство

$$P_1 > P_2 \text{ при } a > 1.$$

Полученное неравенство полностью доказывает справедливость теоремы 2 для приведенных матриц.

3. Пример матрицы типа (19) для значений $k=9$, $k_1=3$, $l=3$

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & a+1 & a+1 & a & a & a & a & a \\ a & a+1 & a+1 & a+1 & a+1 & a & a & a & a \\ a & a & a+1 & a+1 & a+1 & a+1 & a & a & a \\ a & a & a & a+1 & a+1 & a+1 & a & a & a \\ a & a & a & a & a+1 & a+1 & a+1 & a & a \\ a & a & a & a & a & a+1 & a+1 & a+1 & a \\ a & a & a & a & a & a & a+1 & a+1 & a+1 \\ a+1 & a & a & a & a & a & a & a+1 & a+1 \\ a+1 & a+1 & a & a & a & a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Блудов. Алгоритм сравнения скобочных форм функций алгебры логики. Сб. «Приборы и системы автоматизации», вып. 6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
2. Г. Дж. Райзер. Комбинаторная математика. Изд-во «Мир», 1966.