УДК 510.62

*М. Ф. БОНДАРЕНКО*, д-р техн. наук,
*С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, И. В. ШУЛЬГИН*, канд. техн. наук

# ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ СУБЪЕКТИВНОЙ МЕТРИКИ

Настоящая статья является развитием ранее опубликованной работы[1]. Одним из основных средств психофизических измерений является сравнение «субъективного расстояния» между двумя парами точек. Имеется в виду следующее. Пусть ($x_1$, $y_1$) — одна и ($x_2$, $y_2$) — другая пара точек евклидова пространства. В эксперименте требуется ответить на вопрос, представляется ли расстояние между точками $x_2$, $y_2$ или нет. Обозначим через $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$ предикат, принимающий значение 1 в случае положительного ответа и значение 0 — в случае отрицательного. Предположим, что предикат $\Phi$ представим в виде

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = D(\rho(\theta(x_1), \theta(x_2)), \rho(\theta(x_2) \theta(y_2))), \tag{1}$$

где $D$ — предикат равенства, $\theta$ — гомеоморфизм евклидова пространства на себя, $\rho(u, v)$ — евклидово расстояние между точками $u$ и $v$. Это значит, что расстояние $x_2$, $y_1$ представляется таким же, как расстояние между точками $x_2$, $y_2$, тогда и только тогда, когда после преобразования координат $\theta$ совпадает евклидово расстояние $\rho$ между парами образов точек. Величина

$$r(x, y) = \rho(\theta(x), \theta(x)) = \|\theta(x) - \theta(Y)\| \tag{2}$$

играет роль субъективной метрики.

Вопрос о существовании субъективного расстояния тесно связан с вопросом о существовании субъективного равноделения. Предположим, что имеет место формула (1). Для любых точек $x$, $y$ положим

$$x \circ Y = \theta^{-1}\left(\frac{1}{2}(\theta(x) + \theta(y))\right). \tag{3}$$

Точка $x \circ y$ может быть интерпретирована как субъективно средняя между точками $x$, $y$, а экспериментальная процедура нахождения этой точки — как субъективное равноделение.

Нашей целью будет нахождение необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять предикат $\Phi$ для того, чтобы он был представим в виде (1). При этом вначале будут установлены условия, гарантирующие существование субъективного равноделения, а затем эти условия будут дополнены до условий, обеспечивающих существование субъективной метрики.

[1] *Майстровская Л. М., Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об условиях существования многомерной психофизической шкалы равноделения//Кибернетика. 1976. № 3. С. 146—147.

Итак, пусть в $R^n$ задана бинарная операция ($\bigcirc$). Будем говорить, что ($\bigcirc$) — операция равноделения, если существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства на себя такое, что для всех $x, y \in R^n$

$$f(x \circ y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)). \tag{4}$$

**Лемма 1.** *Для того чтобы операция* ($\bigcirc$) *была операцией равноделения, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям* 1) $x \circ x = x$; 2) *при любых* $a$, $b$ *уравнение* $a \circ x = b$ *однозначно разрешимо*; 3) *операция* ($\circ$) *непрерывна*; 4) *для всех* $x$, $y$, $u$, $v$ $(x \circ y) \circ (u \circ v) = (y \circ v) \circ (x \circ u)$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Обозначим при произвольных $a$, $b \in R^n$ через $h(a, b)$ решение уравнения $a \bigcirc x = b$. Зафиксируем произвольный элемент $e \in R^n$ и рассмотрим отображение $\varphi : R^n \to R^n$, определенное равенством $\varphi(x) = h(e, x)$. Это отображение сюръективно. Действительно, пусть $Y$ — произвольный элемент $R^n$. Положим $x = e \bigcirc y$. Тогда $Y = h(e, x)$, т. е. $\varphi(x) = y$. Отображение $\varphi$ инъективно: если $\varphi(x) = y$, то $x = e \bigcirc y$. Итак, $\varphi$ — биекция, причем $\varphi^{-1}(y) = e \bigcirc y$ **(5)**.

Положим $x * y = \varphi(x \bigcirc y)$ и покажем, что $(R^n, *)$ — топологическое пространство $R_n$ с бинарной операцией $(*)$ — является непрерывной коммутативной группой.

Отметим, прежде всего, что ($\bigcirc$) — коммутативная операция. Действительно, из условия (4) вытекает равенство $(x \circ y) \circ (x \circ y) = (y \circ y) \circ (x \circ x)$, откуда на основании **1)** получаем $(x \circ y) = (y \circ x)$. Но тогда и $(*)$ — коммутативная операция. Из равенства (5) следует, что для любого $x : e \circ \varphi(x) = (x)$ **(6)**.

Полагая в 4) $x = u = e$, $y(x) = \varphi(x)$, $v(y) = \varphi(y)$, запишем $(e \circ \varphi(x)) \circ (e \circ \varphi(y)) = (\varphi(x) \circ \varphi(y)) \circ (e \circ e)$. В силу условия (1) коммутативности операции ($\circ$) и формулы (6) последнее равенство можно переписать в виде $x \circ y = e \circ (\varphi(x) \circ \varphi(y))$. С другой стороны, из (6) следует, что $e \circ \varphi(x \circ y) = x \circ y$. Комбинируя два последних равенства, получаем $e \circ \varphi(x \circ y) = e \circ (\varphi(x) \circ \varphi(y))$. Тогда из условия 2) вытекает, что $\varphi(x \circ y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$.

Далее, имеем $e * x = \varphi(e \circ x)$. Вместе с (5) это дает $e * x = x$. Значит, $e$ — нейтральный элемент. Равенство (6) позволяет переписать условие 4) в виде $\varphi(x \circ y) \circ \varphi(u \circ v) = \varphi(y \circ v) \circ \circ \varphi(x \circ v)$, т. е. $(x * y) \circ (u \circ v) = (y * v) \circ (x * u)$. Тодга $\varphi(x * y) \circ \circ (u * v) = \varphi((y * v) \circ (x * u))$. Это значит, что $(x * y) * * (u * v) = (y * v) * (x * u)$. Полагая в этом соотношении $u = e$, получаем $(x * y) * v = (y * v) * x$. Поскольку операция $(*)$ коммутативна, то из последнего равенства следует, что она ассоциативна.

Согласно равенству (6): $e \bigcirc \varphi(e) = e$ **(7)**.

Однако в силу 1) $e \bigcirc e = e$. Поскольку уравнение однозначно разрешимо, то из двух последних равенств имеем $\varphi(e) = e$ **(8)**.

Рассмотрим уравнение $a * x = e$ **(9)**, т. е. уравнение $\varphi(a \bigcirc x) = e$. Равенство (8) позволяет переписать его в виде $\varphi(a \bigcirc x) = \varphi(e)$. Поскольку $\varphi$ — биекция, то это уравнение эквивалентно уравнению $a \bigcirc x = e$. Поэтому из условия 2) вытекает, что уравнение (9) однозначно разрешимо, причем $h(a, e)$ — обратный элемент к $a$ относительно операции $(*)$. Итак, $(R^n, *)$ — абелева группа.

Рассмотрим отображение $g: R^n \times R^n \to R^n \times R^n$, определенное равенством $g(x, y) = (x, x \bigcirc y)$. Отображение $g$ биективно. Действительно, пусть $a, b \in R^n$. Уравнение $g(x, y) = (u, v)$ эквивалентно системе уравнений: $x = a$, $x \bigcirc y = b$. Эта система имеет единственное решение: $x = a$, $y = h(a, b)$. Поскольку $g$ — непрерывная биекция, то по теореме Брауэра об инвариантности области $g^{-1}$ — также непрерывное отображение. Поскольку $g^{-1}(a, b) = (a, h(a, b))$, то и $h(a, b)$ — непрерывное отображение. Следовательно, $\varphi$ — гомеоморфизм и (*) — непрерывная операция. Кроме того, решение уравнения (9) непрерывно зависит от $a$.

Таким образом, $(R^n, *)$ — непрерывная абелева группа, гомеоморфная $R^n$, и тогда, согласно теореме Понтрегина, $(R^n, *)$ изоморфна аддитивной группе $R^n$. Пусть $f$ — соответствующий изоморфизм: $f(x * y) = f(x) + f(y)$. Поскольку $x * x = \varphi(x)$, то $f(x) = \frac{1}{2} f(\varphi(x))$. Отсюда имеем

$$f(x \circ y) = f(\varphi^{-1}(x * y)) = \frac{1}{2} f(x * y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Лемма 1 доказана.

Отображение $f$, фигурирующее в (4), позволяет ввести на $R^n$, рассматриваемом лишь как множество, структуру $n$-мерного линейного пространства, отличную, вообще говоря, от исходной, переносом исходной структуры: А именно: для любых $x, y \in R^n$ суммой этих элементов будем называть элементы $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$ и для любых $x \in R^n$ и числа $\lambda$, а их произведением — элемент $f^{-1}(\lambda f(x))$. Легко видеть, что выполняются все аксиомы $n$-мерного линейного пространства, если в качестве нуля пространства взять элемент $f^{-1}(0)$. Обозначим полученное линейное пространство через $\hat{R}^n$. Отображение $f: R^n \to \hat{R}^n$ является изоморфизмом линейных пространств. Для простоты обозначений будем использовать для операций сложения и умножения в $\hat{R}^n$ обычные обозначения $(+)$ и $(\cdot)$ и нуль пространства $\hat{R}^n$ обозначать через $O$. В тех случаях, когда может возникнуть недоразумение в связи с тем, что линейные операции в пространстве $R^n$ и $\hat{R}^n$, которые как множества совпадают, обозначаются одинаковыми символами, мы будем специально указывать, о каком из пространств идет речь.

Поскольку мы намерены воспользоваться гильбертовой аксиоматизацией евклидова пространства, будем использовать терминологию и обозначения, принятые у Гильберта. Линейная структура пространства $\hat{R}^n$ позволяет конструктивным образом ввести все понятия и отношения, вводимые у Гильберта аксиоматически, за исключением тех, которые используют аксиомы конгруэнтности. Так, прямыми и плоскостями в $\hat{R}^n$ будем называть соответственно одномерные и двумерные линейные многообразия. Естественным образом можно ввести отношения «лежать между», «лежать в плоскости по заданную сторону от прямой» и т. д. Будем обозначать точки пространства $\hat{R}^n$ прописными латинскими буквами, прямые и лучи — строчными латинскими, плоскости — строчными греческими. Заметим, что, как это принято у Гильберта, под отрезком понимается отрезок «без концов» $A$ *и* $B$: $AB=\{x|tA+(1-t)B|0<t<1\}$ аналогично под лучом будем понимать луч «без начала». Луч $h$ определяет единственную прямую $\bar{h}$ такую, что $h\subset\bar{h}$. Если луч $h$ лежит в плоскости $\alpha$, то прямая $\bar{h}$ делит плоскость $\alpha$ на две области. Будем для краткости говорить, что данные точки плоскости $\alpha$ или данные лучи в плоскости $\alpha$ лежат по заданную сторону от луча $h$, если они лежат по заданную сторону от прямой $\bar{h}$. Систему двух лучей $h$ и $k$, исходящих из одной и той же точки $O$ и принадлежащих различным прямым, будем называть углом и обозначать $<hOk$. Пусть лучи $h$ и $k$ с общим началом $O$ лежат в плоскости $\alpha$. Тогда они делят ее на две области. Одну область составляют точки, которые лежат от $k$ по одну сторону с $h$ и от $h$ по одну сторону с $k$. Их будем называть внутренними точками угла $hOk$.

Пусть $\Phi(A, B, A', B')$ — предикат $(A, B, A', B'\in R^n)$, удовлетворяющий следующим условиям: 5) для произвольных точек $A$, $B$, $A'$ и произвольной прямой $a'$ таких, что $A'\in a'$, существует точка $B'$, лежащая по заданную от точки $A'$ сторону $a'$, для которой $\Phi(A, B, A', B')=1$; 6) если $\Phi(A', B', A, B)=1$, $\Phi(A'', B'', A, B)=1$, то $\Phi(A', B', A'', B'')=1$. Из условий 5) и 6) следует, что отношение между отрезками $AB$ и $A'B'$, состоящее в выполнении равенства $\Phi(A, B, A', B')=1$, является рефлексивным, симметричным и транзитивным (Гильб., 6.67). Будем называть это отношение конгруэнтностью и обозначать $AB\sim A'B'$.

Предположим, что выполняются такие условия: 7) если $AB$, $BC$ — два отрезка прямой, не имеющие общих точек, $A'B'$, $B'C'$ — два отрезка той же или другой прямой, не имеющих общих точек, и $AB \sim A'B'$, $BC \sim B'C'$, то $AC \sim A'C'$; 8) пусть $\angle hOk$ и $\angle h'O'k'$—два угла $A$, $B \in h$, $C$, $D \in k$, $A'$, $B' \in h'$, $C'D' \in k$. Если $OA \sim O'A'$, $OB \sim O'B'$, $OC \sim O'C'$, $OD \sim O'D'$, $AC \sim \sim A'C'$, то $BD \sim B'D'$; 9) пусть $h$ — луч в плоскости $\alpha$ с началом в точке $D$, точки $O'$, $T'$, $S'$ не лежат на одной прямой. Тогда существуют единственная точка $S \in h$ и единственная точка $T$, лежащая в плоскости $\alpha$ по заданную сторону от луча $h$, такие, что $OS \sim O'S'$, $OT \sim O'T'$, $ST \sim S'T'$. Два угла $\angle hOk$ и $\angle h'O'k$ назовем конгруэнтными, если существуют такие точки $A \in h$, $A' \in h'$, $B \in k$, $B' \in k$, что $OA \sim O'A'$, $OB \sim O'B'$, $AB \sim A'B'$. Для записи конгруэнтности углом будем также использовать символ $(\sim)$.

Покажем, что в случае $n \leqslant 3$ для введенных объектов и отношений между ними в $\hat{R}^n$ выполняются все аксиомы Гильберта евклидовой геометрии, а при $n > 3$ эти аксиомы выполняются для любого трехмерного линейного многообразия в $\hat{R}^n$. Для аксиом соединения, порядка и параллельности это очевидно. Рассмотрим аксиомы конгруэнтности. Будем нумеровать их согласно Гильберту. Аксиомы $\mathrm{III}_1$, $\mathrm{III}_2$ и $\mathrm{III}_3$ совпадают с принятыми нами условиями 5), 6) и 7). Покажем, что для любых двух углов $\angle hOk$ и $\angle h'O'k'$ и любых точек $S \in h$, $T \in k$, $S' \in h$, $T' \in k'$ из соотношений $OT \sim O'T'$, $OS \sim O'S'$, $\angle hOk \sim \sim \angle h'O'k'$ (**10**) следует, что $ST \sim S'T'$ (**11**).

Действительно, согласно определению конгруэнтности углов существуют точки $A \in h$, $A_1 \in h_1$, $B \in k$, $B_1 \in k_1$ такие, что $OA \sim \sim O_1A_1$, $OB \sim O_1B_1$, $AB \sim A_1B_1$. Отсюда и из двух первых соотношений (10) на основании условия (8) заключаем, что $ST \sim \sim S'T'$.

Проверим выполнимость аксиомы $\mathrm{III}_4$. Она гласит следующее. Пусть $\angle h'O'k'$ — угол в плоскости $\alpha$, $h$ — луч в плоскости $\alpha$ с началом в точке $O$ такой, что $\angle hOk \sim \angle h'O'k$ и все внутренние точки угла $\angle hOk$ находятся в плоскости $\alpha$ по заданную сторону от луча $h$. Покажем, что выполнимость этой аксиомы обеспечивается условием 9). Пусть $S'$ и $T'$ — произвольные точки, лежащие на лучах $h'$ и $k'$ соответственно. Условие 9) гарантирует существование точки $S \in h$ и точки $T$, лежащей в плоскости $\alpha$ по заданную сторону от луча $h$ и таких, что

$$OS \sim O'S',\ OT \sim O'T',\ ST \sim S'T'.$$

Пусть $k$ — луч с началом в точке $O$, проходящей через точку $T$. Согласно определению конгруэнтности углов и соотношениями (12) $\angle hOk \sim \angle h'O'k'$. Легко видеть, что внутренние точки угла $\angle hOk$ лежат по заданную сторону от луча $h$. Допустим теперь, что, вопреки доказываемому, существует луч $\bar{k}$, отличный от $k$ и удовлетворяющий тому же условию. Имеем $\angle hOk \sim \sim hOk$. Выберем произвольные точки $A \in h$ и $B \in k$. Отложим на луче $k$ точку $B$ так, чтобы $OB \sim O\bar{B}$. Существование такой точки гарантируется условием 5). Имеем $OA \sim O\bar{A}$, $OB \sim O\bar{B}$, $\angle hOk = \angle \bar{h}\bar{O}\bar{k}$. Значит, выполняется условие (10). Тогда имеет место конгруэнтность (11): $AB \sim A\bar{B}$. Точки $B$ и $\bar{B}$ лежат в плоскости $\alpha$ по одну сторону от луча $h$, точки $O$, $A$, $B$ не лежат на одной прямой. В силу требований условия 9) о единственности $\hat{B} = \bar{B}$. Это противоречит тому, что $k$ и $\bar{k}$ — различные лучи с общим началом. Итак, аксиома $III_4$ выполняется.

Проверим аксиому $III_5$. Она гласит: если для двух треугольников $AB \sim A'B'$, $AC \sim A'C'$, $\angle BAC \sim \angle B'A'C'$ **(13)**, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Из доказанного выше факта о конгруэнтности треугольников следует, что $BC \sim B'C'$. Но тогда $\angle ABC \sim \angle A'B'C'$ согласно определению конгруэнтности углов.

Таким образом, аксиомы конгруэнтности выполняются. При выполнении аксиом групп I—IV аксиомы непрерывности эквивалентны аксиоме Дедепинда, которая выполняется в линейном пространстве.

Зафиксируем произвольный отрезок в качестве единицы масштаба для измерения длины. Аксиомы конгруэнтности и непрерывности позволяют с помощью стандартной процедуры поставить в соответствие каждому отрезку положительное число. При этом конгруэнтным отрезкам ставятся в соответствие одинаковые числа. Далее, так же, как это делается в аксиоматическом курсе евклидовой геометрии, введем значение угла. Это позволит определить скалярное произведение векторов в $\hat{R}^n$ равенством $(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\widehat{u, v})$, где $\cos(\widehat{u, v})$ — длина вектора $u$. В случае $n \leqslant 3$, как известно, при этом будут выполняться аксиомы скалярного произведения. Эти аксиомы будут выполняться и при $n > 3$. Это следует, из того, что в каждой из аксиом фигурирует не более трех векторов. Линейная оболочка этих векторов является подпространством размерности не больше трех, а по доказанному выше в таких подпространствах выполняются все аксиомы Гильберта. Поэтому случай $n > 3$ сводится к уже рассмотренному случаю $n \leqslant 3$.

Итак, пространство $\hat{R}^n$ является евклидовым. Следовательно, оно изоморфно как евклидово пространство пространству $\hat{R}^n$. Пусть $\theta: \hat{R}^n \to R^n$ — соответствующий изоморфизм. Если отрезки $AB$ и $A'B'$ конгруэнтны, то их $\hat{R}_n$-длины совпадают, следовательно, совпадают и $R^n$-длины отрезков $\theta(A)\theta(B)$ и $\theta(A')\theta(B')$. Обратно, если совпадают $R^n$-длины отрезков $\theta(A)\theta(B)$ и $\theta(A')\theta(B')$, то совпадают $R^n$-длины отрезков $AB$ и $A'B'$, и, значит, эти отрезки конгруэнтны. Таким образом, справедлива формула (1).

Обратно, если для предиката $\Phi$ справедлива формула (1), а $(\bigcirc)$ — бинарная операция, определенная равенством (3), то, как легко проверить, выполняются все условия 1)—9). Таким образом, доказана теорема 1.

**Теорема 1.** *Пусть* $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)(x_1, y_1, x_2, y_2 \in R^n)$ *— предикат,* $(\bigcirc)$ *— бинарная операция в* $R^n$, *удовлетворяющая условиям 1) — 9). Тогда для предиката* $\Phi$ *справедлива формула (1). Обратно, если для предиката* $\Phi$ *выполняется формула (1), а бинарная операция* $(\bigcirc)$ *определена равенством (3), то выполняются условия 1) — 9).*

*Поступила в редколлегию 06.07.87*