Дифференциальный алгоритм относится к итерационным методам и состоит в том, что на k-м шаге изменяется только одна из независимых переменных:

Значение $\Delta x_r^{(k)}$ выбирается из анализа условий Куна-Такера. Нарушение этих условий в точке $x^{(k)}$ может произойти по двум причинам:

1) если $(\delta y/\delta x_r)^{(k)} > 0$, то

$$\Delta x_r^{(k)} = \max\{-x_r; -(\delta y/\delta x_r)^{(k)}/(\delta^2 y/\delta x_r^2)^{(k)}\};$$

2) если $(\delta y/\delta x_r)^{(k)} < 0$, то

$$\Delta x_r^{(k)} = \min\{x_q; -(\delta y/\delta x_r)^{(k)}/(\delta^2 y/\delta x_r^2)^{(k)}\}.$$

Вычисляем новые значения независимой и зависимой переменных:

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)},$$
$$x_q^{(k+1)} = x_q^{(k)} - \Delta x_r^{(k)}.$$

Если значение $x_r^{(k)}$ выбиралось из соображений обращения независимой переменной x_r или условной производной по ней в нуль, система зависимых и независимых переменных остаётся прежней, в противном случае независимая переменная x_r и зависимая x_q меняются ролями. После этого переходим к (k+1) итерации. Алгоритм завершается, если условия Куна-Такера выполнены либо после некоторого наперёд заданного числа итераций (в [2] приведены примеры, когда применение данного алгоритма приводит к последовательности точек $x^{(k)}$, приближающейся к оптимальному решению x^*, но не достигающей его). Как правило, условия Куна-Такера оказываются выполненными через конечное число шагов. Достоинством метода является и то, что все точки последовательности $x^{(k)}$ принадлежат области допустимых решений.

2. Наблюдения фрагментов в различные моменты времени

Пусть имеются наблюдения фрагментов в различные моменты времени:

$$P^{I_1}(t_1), P^{I_2}(t_2), \ldots, P^{I_m}(t_m).$$

Для нахождения синтезируемой матрицы в момент времени t, близкий к рассматриваемым, можно воспользоваться решением задачи минимизации (как для устранения ошибок измерения). Сформулируем эту задачу так, чтобы вес каждого фрагмента был тем больше, чем ближе момент его измерения t_k к моменту прогнозирования t. Для этого в задачу минимизации введем коэффициент $a(t-t_i)$:

$$y(x,\beta) = \sum_{i\in B_k}\sum_{j\in I_i}\left(x_j - a(t-t_i)\beta_i p_j^{I_i}\right)^2 \to \min_{x,\beta},$$

где $\sum_{i\in B_k} a(t-t_i) = 1$, a(s) – четная неотрицательная функция, достигающая максимума при s = 0 и монотонно убывающая на интервале $(0, \infty)$.

Это позволяет учесть те ситуации, когда t совпадает с одним из моментов $t_1, t_2, \ldots t_m$. Более того, можно говорить об оценке синтезируемой матрицы на отрезке времени $[t_{min}, t_{max}]$, где $t_{min} = \min\{t_1, \ldots t_m\}$, $t_{max} = \max\{t_1, \ldots t_m\}$. Такой подход допускает наличие ошибок измерений и не требует на этот случай никакой модификации.

Литература: 1. *Басманов А.Е., Дикарев В.А.* Синтез стохастической матрицы по системе её фрагментов. 1997. 8с. Деп. в УкрИНТЭИ 23.01.97, № 76-Уі 97. 2. *Евдокимов А.Г.* Минимизация функций и её приложения к задачам автоматизированного управления инженерными сетями. Х.: Вища шк., 1985. 288 с. 3. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Фёдоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 382 с.

Поступила в редколлегию 25.03.98

Басманов Алексей Евгеньевич, аспирант кафедры ПМ ХТУРЭ. Научные интересы: вычислительная математика. Адрес: 310166, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (0572) 40-93-36, (0572) 97-23-77.

УДК 519.21

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

РОДЗИНСКИЙ А.А.

Изучены условия, которым должна удовлетворять матрица согласования при "стыковке" марковских процессов с различным числом состояний. Сформулированы и решены задачи о фокусировке таких процессов. Полученные результаты могут быть использованы в радиоэлектронике, экономике, экологии и медицине.

1. Неоднородный марковский процесс

При рассмотрении многих прикладных задач часто приходится иметь дело с такими системами, эволюция которых может быть описана с помощью соответствующим образом подобранного марковского процесса с изменяющимся числом состояний. В работе изучаются такие процессы. Для понимания сущности этого вопроса обсудим сначала теорему из [1], которая будет использоваться в данной работе. Рассмотрим неоднородный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний. Предположим, что инфинитезимальная матрица $\Lambda(s)$ процесса непрерывна в некоторой левой полуокрестности W точки t_0.

Теорема. Пусть $\Lambda(s)$ удовлетворяет условиям:

а) существует такой её столбец j_0, что все элементы удовлетворяют условию

(1)

и порядки роста всех элементов j_0-го столбца одинаковы. Последнее означает, что для всех i, j==1, 2, ... существуют пределы и

такие числа 0<a<Г, что a< a_{ik} <b;

б) собственный вектор ρ (s)=(, ...)

матрицы Λ^{τ} (s) (транспонированной к Λ(s)), отвечающий её нулевому собственному значению, имеет при s$\to t_0$-0 предел такой, что p_i^*>0, i=1,2,... .

Тогда для любого начального распределения вероятностей { $p_i(s_0)$ }, заданного в произвольной точке $s_0 \in W$,

(2)

В этой ситуации t_0 называют точкой фокусировки [1]. Если интегралы из (1) сходятся, но достаточно велики, то независимо от начального распределения вероятностей

(3)

Пусть σ>0 – нижняя грань σ^* по всем начальным распределениям. Чем больше интегралы из (1), тем меньше σ. В случае (3) t_0 называют точкой s-фокусировки [1].

2. Процессы с изменяющимся числом состояний

При рассмотрении таких процессов прежде всего возникает задача об их согласовании (стыковке). Она состоит в следующем. Пусть на временных промежутках [s_0, s_1-d], [$s_1+\delta, s_2$], δ>0 заданы инфинитезимальные матрицы $\Lambda_1(s)$, $\Lambda_2(s)$, определяющие на них процессы Π_1, Π_2 с числом состояний n_1 и n_2 соответственно. Пусть, для определенности, $n_2 - n_1$=1. Предположим, что каждому состоянию процесса Π_1 поставлено в соответствие определённое состояние процесса Π_2. Тогда процесс Π_2 содержит "лишнее" состояние E_0 – ему не соответствует ни одно состояние процесса Π_1. При рассмотрении конкретных процессов (физических, экономических, биологических и др.), которые можно описать с помощью марковских процессов с переменным числом состояний, указанное соответствие обычно естественно определяется эволюцией процесса. Спрашивается, как следует определить инфинитезимальную матрицу Λ_{12} (матрицу согласования), непрерывную на [$s_1-\delta, s_2+\delta$], удовлетворяющую условиям

$$\Lambda_1(s_1-\delta)=\Lambda_{12}(s_1-\delta),\ \Lambda_2(s_1+\delta)=\Lambda_{12}(s_1+\delta) \quad (4)$$

так, чтобы возникающий при этом на [s_0, s_2] процесс являлся в каком-то смысле оптимальным (естественным) продолжением процесса [Π_1] на временной промежуток [$s_1+\delta, s_2$]? При рассмотрении физических процессов матрица Λ_{12} обычно является решением некоторой вариационной задачи. При рассмотрении экономических процессов эту матрицу часто ищут, исходя из ограничений, позволяющих минимизировать суммарные затраты на капиталовложения, максимизировать прибыль или обеспечить преимущественное развитие выделенных групп предприятий и пр.

Рассмотрим несколько случаев построения согласующей матрицы Λ_{12}. Наряду с матрицей Λ_1 (s) будем рассматривать на [-d] матрицу $\widetilde{\Lambda}_1(s)$ порядка , которая получается из Λ_1 (s) добавлением к ней нижней строки и правого столбца, все элементы которых равны нулю.

1. Пусть распределение вероятностей { } процесса Π_1, определяемое начальным распределением вероятностей { } (заданным при t=s_0) является по каким-то причинам предпочтительным по сравнению с остальными. Значит, в этом случае матрицу Λ_{12} следует строить так, чтобы с её помощью "преимущественно" пропускалось распределение { }. Аналогично ставится задача отыскания Λ_{12} (s), если речь идёт о преимущественном пропускании распределений { }, отвечающих некоторому множеству начальных распределений вероятностей { }.

При рассмотрении физических задач эволюция матрицы Λ_{12} (s) обычно определяется процессом поглощения (или выделения) энергии. Мерой таких энергозатрат является некоторый функционал (часто квадратичный), зависящий от Λ_{12}. Если, например, этот функционал имеет вид (Λ_{12}f, f) (символ(...) означает скалярное произведение), отыскание Λ_{12} сводится к решению следующей вариационной задачи. Требуется найти матрицу Λ_{12} порядка , удовлетворяющую условиям (4) и условию

Здесь минимум находится по всем инфинитезимальным матрицам (n_1+1)×(n_1+1).

2. Пусть решение вопроса о том, какое из начальных распределений $\left\{\widetilde{p}_j(s_0)\right\}$ или $\left\{\bar{p}_j(s_0)\right\}$ предпочтительнее, зависит от направления векторов с компонентами $\widetilde{p}_j(s_0)$ и $\bar{p}_j(s_0)$. Чтобы решить, какое направление предпочтительнее, на поверхности S n-мерного координатного пространства (n – число состояний), определяемой уравнением следует задать функцию

Если, скажем, , то направление предпочтительнее, чем . В этом случае отыскание матрицы согласования сводится к решению вариационной задачи

3. Матрица Λ_2 может (помимо времени) зависеть от случайного параметра. Этим параметром может быть, например, начальное распределение вероятностей {}. В этом случае построение матрицы Λ_{12} является по сравнению с пунктом 2, вообще говоря, более трудной задачей.

4. Матрица Λ_2 может быть не задана. Её требуется построить так, чтобы матрица Λ_{12} удовлетворяла на [] некоторым минимаксным условиям и условию . В точке на матрицу Λ_{12} какие-либо условия не накладываюся. Это аналог задачи со свободным правым концом [3].

Перечисленные задачи не исчерпывают, разумеется, всех возможных случаев построения матрицы Λ_{12}. Из них, однако, видно, что её отыскание является отдельной, достаточно трудоёмкой задачей. Далее будем считать, что процесс с изменяющимся числом состояний задан полностью, т.е. что на всех временных промежутках, соединяющих фрагменты процесса с разным числом состояний, матрицы согласования, отвечающие этим промежуткам, известны.

3. Фокусировка процессов с изменяющимся числом состояний

1. Рассмотрим при $t \geq 0$ процесс П(t) с изменяющимся числом состояний такой, что на каждом из непересекающихся отрезков

число состояний процесса постоянно. Считаем, что процесс Π_k, совпадающий с П(t) на (k=0,1,...), является частью однородного процесса, имеющего стационарное распределение . Пусть $\Lambda_{k,k+1}(t)$ – матрицы согласования процессов . Из упомянутой теоремы следует, что матрицы $\Lambda_{k,k+1}$ можно возмутить так, чтобы каждая из возмущенных матриц фокусировала процесс П(t) (при изменении t на) на распределение .

Рассмотрим процесс $\vec{\Pi}(t)$, получающийся из П(t) заменой в нем согласующих матриц на матрицы . Процесс $\vec{\Pi}(t)$ обладает следующим свойством: каким бы ни было начальное распределение процесса вероятностей , распределение вероятностей процесса $\vec{\Pi}(t)$ на промежутках (k=1,2,...) будет совпадать с соответствующим этому промежутку стационарным распределением . Полученный в результате таких возмущений процесс обозначим через . Вероятности состояний этого процесса при удовлетворяют условиям

независимо от начального распределения .

2. Изменим постановку рассмотренной выше задачи. Пусть теперь последовательность отрезков (k=1,2,...) сгущается (при) к точке . Остальные предположения предыдущего пункта об исследуемом на процессе П(t), а также введенные там обозначения остаются прежними. В этом случае основные выводы пунктов 1, 3 о фокусировках и σ-фокусировках на стационарные распределения остаются в силе. Это следует из результатов, изложенных в пункте 1.

Литература: 1. *Дикарев В. А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. 1995. 11 с. Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, № 526-Ук 95. 2. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989. 320 с. 3. *Гельфанд Н. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 220 с.

Поступила в редколлегию 23.03.98

Родзинский Анатолий Александрович, аспирант каф. прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: случайный анализ и его приложения. Увлечения: компьютер, английский язык. Адрес: 310726, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-36.