

*Практическая значимость* работы заключается в том, что обоснование метода редукции позволит корректно применять его при исследовании стационарных состояний стохастических процессов и систем марковского типа: системы массового обслуживания с длинными очередями, стохастические нейронные сети, процессы диффузии.

**Литература:** 1. *Сарымсаков Т.А.* Основы теории цепей Маркова. М.: Гостехиздат, 1954. 208 с. 2. *Баруча Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 511 с. 3. *Зейфман А.И.* Об асимптотическом поведении решений прямой системы Колмогорова // Украинский математический журнал. 1983. № 5. С. 621-624. 4. *Валеев К.Г., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1974. 415 с. 5. *Герасин С.Н.* Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем. Харьков: ХТУРЭ, 1999. 212 с. 6. *Зейфман А.И.* О равномерной

квазиэргодичности и устойчивости неоднородных марковских цепей с непрерывным временем // Проблемы устойчивости стохастических моделей: Труды семинара ВНИИ системных исследований. 1989. С. 45-47. 7. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.

Поступила в редколлегию 03.06.2008

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Шабанов-Кушнарченко С.Ю.

**Герасин Сергей Николаевич**, д-р техн. наук, профессор кафедры ВМ ХНУРЭ. Научные интересы: теория стохастических процессов. Хобби: исторический туризм, театр. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел 702-13-72.

**Михайлов Евгений Алексеевич**, преподаватель кафедры высшей математики Харьковского университета воздушных сил. Научные интересы: теория стохастических процессов. Хобби: горный туризм. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Сумская, 77/79, дом.тел. 714-60-59.

УДК519.63:519.85:533:532.542

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО УЧАСТКУ ТРУБОПРОВОДА

*ТЕВЯШЕВ А.Д., СМЕРНОВА В.С.*

Формулируется математическая модель нестационарного неизотермического движения реального газа по участку трубопровода, построенная на основе базовых в газовой динамике фундаментальных законов сохранения массы, импульса и энергии, с использованием общих положений термодинамики без упрощающих предположений и ограничений. Описываются численные решения стационарной и нестационарной краевых задач для дозвуковых режимов течения газа, при типичных условиях работы газотранспортных систем.

### 1. Введение

Математическому моделированию и численному анализу нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа по участкам трубопроводов посвящено большое количество работ, в которых используются различные модели, полученные при тех или иных допущениях и предположениях (см., например, литературу в [1-8]). Однако комплекс задач, связанных с течением газа в трубопроводных системах, еще не получил окончательного решения. В ряде публикаций используются упрощенные недостаточно обоснованные модели, которые дают грубое описание газодинамических режимов транспортирования природного газа и имеют ограниченную область применения.

*Цель* данной работы – сформулировать математическую модель нестационарного неизотермического движения однокомпонентного реального газа по участку трубопровода на основе фундаментальных законов газовой динамики, с использованием общих положений

термодинамики без упрощающих предположений и ограничений. Задачи исследования – разработать алгоритмы численного решения математической модели и апробировать их при решении стационарной и нестационарной задачи транспорта природного газа в одноразовом газопроводе при типичных условиях работы газотранспортных систем.

### 2. Построение математической модели

Основные дифференциальные уравнения, описывающие неустановившееся движение газа в трубопроводе, получим из общих теорем газовой динамики: интегральных законов сохранения массы, количества движения и энергии. Выделим в газе произвольный неподвижный объем  $\Omega$ , ограниченный поверхностью  $\omega$  с заданным на ней единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Тогда в случае отсутствия внутренних источников притока массы, согласно [4], законы сохранения можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \int_{\omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} d\Omega + \int_{\omega} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega = \\ = - \int_{\omega} \rho \mathbf{p} \mathbf{n} d\omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} d\Omega + \int_{\omega} \mathbf{f} d\omega, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega + \int_{\omega} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega = - \int_{\omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\omega + \\ + \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} d\Omega + \int_{\omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\omega + \int_{\Omega} Q d\Omega - \int_{\omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность газа;  $p$  – давление;  $\mathbf{v}$  – векторное поле скоростей;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{f}$  – векторы плотности массовых и поверхностных сил соответственно;  $u$  – удельная (отнесенная к единице массы) внутренняя энергия газа;  $Q$  – отнесенная к единице объема мощность внешних по отношению к газу источников тепла;  $\mathbf{q}$  – вектор плотности потока тепла, переносимого посред-

ством теплопроводности. Символ  $(\bullet)$  означает скалярное произведение величин. Все физические величины в уравнениях (1)–(3) являются, вообще говоря, функциями трех пространственных координат и времени  $t$ . Для этих функций оператор дифференцирования по времени определяется соотношением [4]:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \quad (4)$$

и называется полной производной (иногда субстанциональной).

Как это принято в газо- и гидродинамике [1-8], в правой части уравнения (2) записан явно интеграл сил давления, а в правой части уравнения (3) записана явно работа сил давления, действующих по поверхности  $\omega$ .

В трубопроводах газотранспортных систем длина труб много больше характерных размеров их поперечных сечений, что позволяет использовать одномерное пространственное описание течения газа [1-5, 7, 8]. При этом описании предполагается, что движение газа можно считать в каждом месте трубопровода однородным по его поперечному сечению, а вектор скорости в данном сечении направлен вдоль оси трубы. За пространственную координату  $x$  примем расстояние вдоль средней линии (оси) трубы, отсчитанное от некоторого начального сечения. Примем, что в каждый момент времени все физические величины в каждом поперечном сечении трубы постоянны по всему сечению, но изменяются от сечения к сечению и являются непрерывно дифференцируемыми функциями координаты  $x$ . Закон изменения площади поперечного сечения  $S(x)$  вдоль оси трубы будем считать заданным. Далее будем учитывать из массовых сил только силу тяжести, из поверхностных сил – силы трения на внутренней поверхности трубопровода, а из процессов переноса тепла посредством теплопроводности – теплообмен транспортируемого газа с окружающей трубопровод средой.

При сделанных предположениях из уравнений (1)–(3) с помощью известных стандартных преобразований получаем законы сохранения в дифференциальной форме в виде дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарное неизотермическое течение газа в недеформируемом трубопроводе переменного сечения [1, 2, 4, 5, 7, 8]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v S) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho v S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 S)}{\partial x} = -S \left( \frac{\partial p}{\partial x} + g \rho \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \tau_0 l_S, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho S \left( u + \frac{v^2}{2} + gh \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho v S \left( u + \frac{v^2}{2} + gh \right) \right] + \\ + \frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} - q l_S = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $v$  – проекция скорости газа на ось трубопровода;  $g$  – модуль ускорения свободного падения;  $x$  – координата вдоль оси трубопровода;  $h(x)$  – высота оси трубопровода, отсчитываемая от произвольной горизонтальной плоскости вертикально вверх (для магистральных трубопроводов – по радиусу Земли [7, 8]);  $l_S(x)$  – длина периметра сечения  $S(x)$  трубопровода;  $q(x, t)$  – поток тепла, проходящий через единицу площади поверхности трубопровода в единицу времени, вследствие теплообмена транспортируемого газа с окружающей трубопровод средой;  $\pi$  – число Пифагора;  $\tau_0(x, t)$  – касательное напряжение на стенке трубопровода (сила трения, отнесенная к единице площади внутренней поверхности трубопровода), которое, например, в соответствии с формулами Дарси-Вейсбаха и Мизеса может быть представлено в виде [1, 2, 5, 7, 8]:

$$\tau_0 = \frac{\lambda \rho |v| v}{8}, \quad (8)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления: безразмерный параметр, который зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости внутренней поверхности трубопровода.

Отметим, что (7) по форме записи можно назвать уравнением сохранения полной энергии, которая включает внутреннюю энергию, кинетическую энергию макроскопического движения и потенциальную энергию газа в поле тяжести. Дифференциальные уравнения (5)–(7) независимы между собой, поэтому их можно рассматривать совместно как систему уравнений относительно неизвестных функций: скорости течения газа  $v(x, t)$  и термодинамических параметров газа  $p(x, t)$ ,  $\rho(x, t)$ ,  $u(x, t)$  ( $x$  и  $t$  являются независимыми переменными). Эта система уравнений является базой, на которой построено большое число конкретных (частных) математических моделей, описывающих транспорт газа и сжимаемой жидкости [1-8]. Система дифференциальных уравнений (5)–(7) может быть преобразована к различным эквивалентным формам. Цель этого раздела состоит в получении в явном виде системы уравнений, замкнутой относительно трех неизвестных функций: одной динамической величины и двух термодинамических параметров – давления и температуры. Для этого следует привлечь дополнительные термодинамические соотношения и задать поток тепла  $q$  [1-8].

Далее мы будем рассматривать случай трубопровода постоянного сечения и считать  $S(x) = \text{const}(x)$ . Преобразуем уравнение (7) к другой, важной для дальнейшего форме, используя уравнения (5), (6) и известное термодинамическое соотношение [9, 10]

$$du = T ds - p dV,$$

где  $T$  – абсолютная температура;  $s$  – удельная (отнесенная к единице массы) энтропия;  $V = 1/\rho$  – удельный объем. В результате получаем:

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right) = v \tau_0 \frac{1_S}{S} + q \frac{1_S}{S}. \quad (9)$$

Выражение (9) можно назвать уравнением теплового баланса. Согласно (4) в его левой части стоит величина

на  $\rho T \frac{ds}{dt}$  – количество тепла, получаемого единицей объема газа в единицу времени [11].

Для дальнейших преобразований используем так называемое термическое уравнение состояния газа, которое в общей форме можно записать в виде

$$\Psi(p, \rho, T) = 0, \quad (10)$$

где  $\Psi$  – некоторая функция переменных  $p, \rho, T$ . С помощью (10) одна из этих величин может быть определена в зависимости от двух других величин, которые следует считать независимыми термодинамическими переменными. Разрешив формально уравнение (10) относительно  $\rho$ , будем считать, что  $\rho = \rho(p, T)$ . Используя известные термодинамические соотношения [9, 10]

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_V = \frac{C_V}{T}, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{C_p}{T}, \quad \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p,$$

где  $C_p$  и  $C_V$  – удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно [Дж/(кг•К)], и уравнение непрерывности (5), уравнение (9) можно привести к виду

$$\rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{vT}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \frac{\partial p}{\partial x} = v \tau_0 \frac{1_S}{S} + q \frac{1_S}{S}. \quad (11)$$

Таким образом, при  $S(x) = \text{const}(x)$  исходная система уравнений (5)–(7) приводится к эквивалентной системе уравнений (5), (6) и (11).

Введем (вместо  $v$ ) в качестве новой динамической переменной  $W = \rho v$  – массовый расход, отнесенный к единице площади поперечного сечения трубопровода [кг/(м<sup>2</sup>•с)]. Тогда система уравнений (5), (6) и (11) преобразуется к виду

$$\left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W^2}{\partial x} - \frac{W^2}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial x} + \left[ 1 - \frac{W^2}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_T \right] \frac{\partial p}{\partial x} = -\tau_0 \frac{1_S}{S} - g\rho \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (13)$$

$$\rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} + C_p W \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{vT}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \frac{\partial p}{\partial x} = v \tau_0 \frac{1_S}{S} + q \frac{1_S}{S}. \quad (14)$$

При этом  $C_p$  и  $C_V$  связаны термодинамическим соотношением [9, 10]

$$C_p - C_V = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial(1/\rho)}{\partial T} \right)_p. \quad (15)$$

Все частные производные в формулах (12)–(14) и (15) могут быть вычислены по термическому уравнению состояния  $\rho = \rho(p, T)$ . Из (14) и (15) вытекает, что для замыкания системы уравнений (12)–(14) относительно неизвестных функций  $W, p$  и  $T$  вместе с термическим уравнением состояния  $\rho = \rho(p, T)$  в качестве второго термодинамического соотношения достаточно задать функцию  $C_p = C_p(p, T)$ . При этом функции  $\rho(p, T)$  и  $C_p(p, T)$  не являются независимыми. Они должны удовлетворять термодинамическому уравнению совместности [9, 10]

$$\left( \frac{\partial C_p}{\partial p} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_p = -T \left( \frac{\partial^2(1/\rho)}{\partial T^2} \right)_p. \quad (16)$$

Мы предполагаем, что правые части уравнений (13) и (14) зависят лишь от  $W, p$  и  $T$ . Это условие выполняется, например, если для  $\tau_0$  использовать выражение (8) с постоянным параметром  $\lambda$ , а тепловой поток задать функцией  $q = q(T, T_n)$ , где  $T_n$  – температура окружающей среды. В частности, для описания теплового потока  $q$  в простых моделях часто используется широко известный, так называемый закон Ньютона [5]:

$$q = -k \cdot (T - T_n), \quad (17)$$

где  $k$  – коэффициент теплопередачи [Вт/(м<sup>2</sup>•К)].

Во многих задачах транспорта природных газов термическое уравнение состояния  $\rho = \rho(p, T)$  без ограничения общности принято писать в следующей форме [2, 5]:

$$p = z(p, T)RT\rho, \quad (18)$$

где  $R$  – газовая постоянная [Дж/(кг•К)],  $z(p, T)$  – так называемый коэффициент сжимаемости. Вычислим с помощью (18) частные производные в уравнениях (12)–(14). В результате, например, для трубопровода круглого сечения с внутренним диаметром  $D$  с использованием формул (8) и (17) система уравнений (12)–(14) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{z_2 p}{z_1 T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Rz^2 T}{z_1} \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left[ 1 - \frac{z_1 RTW^2}{p^2} \right] \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2zRTW}{p} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z_2 RW^2}{p} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\lambda zRTW |W|}{2Dp} - \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p zRTW}{C_V p} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{z_2 (zRT)^2}{z_1 C_V p} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{zz_2}{C_V} \left( \frac{RT}{p} \right)^2 W \frac{\partial p}{\partial x} =$$

$$= \frac{\lambda |W|^3}{2DC_V} \left( \frac{zRT}{p} \right)^3 - \frac{4kzRT}{C_V Dp} (T - T_H). \quad (21)$$

Здесь

$$z_1 = z - p \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)_T, \quad (22)$$

$$z_2 = z + T \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p. \quad (23)$$

Соотношение (15) можно записать в форме

$$C_V = C_p - \frac{z_2^2}{z_1} R, \quad (24)$$

а уравнение совместности (16) принимает вид

$$\left( \frac{\partial C_p}{\partial p} \right)_T = - \frac{RT}{p} \left( \frac{\partial z_2}{\partial T} \right)_p. \quad (25)$$

Будем считать параметры  $\lambda$  и  $k$  феноменологически константами. Тогда система дифференциальных уравнений в частных производных (19)–(21) вместе с соотношениями (18),  $C_p = C_p(p, T)$  и (22)–(25) является замкнутой относительно давления  $p$ , удельного массового расхода  $W$  и температуры  $T$ , и полностью описывает нестационарное неизотермическое течение газа в недеформируемом трубопроводе постоянного сечения. Подчеркнем, что системы уравнений (12)–(14) и (19)–(21) являются следствием системы уравнений (5)–(7) и обладают достаточной общностью, поскольку при их получении были использованы только общие положения термодинамики без упрощающих предположений.

Система уравнений (19)–(21) также может быть использована при моделировании стационарных режимов участка трубопровода, когда параметры движущегося газа в пространстве не зависят от времени. В этом случае система уравнений (19)–(21) принимает вид:

$$W = \text{const}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z_1 RTW^2}{p^2}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{z_2 RW^2}{p} \frac{\partial T}{\partial x} = \\ = - \frac{\lambda z RTW |W|}{2Dp} - \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{z_2 RT}{C_p p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda W |W|}{2DC_p} \left( \frac{zRT}{p} \right)^2 - \frac{4k}{C_p DW} (T - T_H). \quad (28)$$

Таким образом, стационарное течение газа описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений (27) и (28) для определения двух неизвестных функций  $p(x)$  и  $T(x)$ . Система уравнений (27) и (28) замыкается соотношениями (18),  $C_p = C_p(p, T)$  и (22)–(26), она обладает достаточной общностью и описывает широкий класс стационарных режимов течения газа в трубопроводе.

### 3. Постановка краевых задач при стационарном и нестационарном течении газа по участку трубопровода

Систему уравнений (27) и (28) можно привести к каноническому виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\lambda z RTW |W|}{2Dp} + \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{z_2 RW^2}{p} \left( \frac{\lambda W |W|}{2DC_p} \left( \frac{zRT}{p} \right)^2 - \frac{4k}{C_p DW} (T - T_H) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left(1 - \frac{z_1 RTW^2}{p^2}\right) \left( \frac{\lambda W |W|}{2DC_p} \left( \frac{zRT}{p} \right)^2 - \frac{4k}{C_p DW} (T - T_H) \right) - \right. \\ \left. - \frac{z_2 RW^2}{p} \left( \frac{\lambda z RTW |W|}{2Dp} + \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\Delta = \left(1 - \frac{z_1 RTC_V W^2}{p^2 C_p}\right). \quad (31)$$

Заметим, что соотношение (31) можно преобразовать к виду

$$\Delta = \left(1 - \frac{v^2}{c_s^2}\right), \quad (32)$$

где

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{z^2 RTC_p}{z_1 C_V} \quad (33)$$

– местная скорость звука при изоэнтропическом процессе. Дозвуковому режиму течения газа соответствует  $\Delta > 0$ , а сверхзвуковому –  $\Delta < 0$ .

В нашей модели формальная постановка задачи о стационарном течении газа в однониточном трубопроводе может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти решение системы уравнений (29)–(30) (или эквивалентной системы (27)–(28)) в области  $0 \leq x \leq L$ . Для дозвуковых режимов течения, которые являются типичными режимами для газотранспортных систем, при  $W > 0$  должно быть задано два граничных условия на левой границе при  $x=0$ :

$$p(0) = P_0, \quad T(0) = T_0. \quad (34)$$

При  $W < 0$  граничные условия задаются на правой границе при  $x=L$ :

$$p(L) = P_L, \quad T(L) = T_L. \quad (35)$$

Известно, что система уравнений (5)–(7) при обычных ограничениях, накладываемых на вид уравнений состояния реальных газов и жидкостей, для нестационарных режимов течения является полностью гиперболической [2, 4, 5]. Следовательно, в нашей модели формальная постановка задачи о нестационарном те-

чении газа в одноразовом трубопроводе может быть сформулирована следующим образом [2, 4, 5]. Требуется найти решение системы уравнений (19)–(21) в области  $0 \leq x \leq L$ ,  $t \geq 0$ . При  $t=0$  на интервале  $(0, L)$  необходимо задать три начальных условия:

$$\begin{aligned} p(x,0) &= p^0(x), \quad T(x,0) = T^0(x), \\ W(x,0) &= W^0(x). \end{aligned} \quad (36)$$

Для дозвуковых режимов течения, которые являются типичными режимами для газотранспортных систем, при  $W > 0$  должно быть задано два граничных условия при  $x=0$  и одно при  $x=L$ ; при  $W < 0$  на левой границе задается одно условие, а на правой – два. В практических расчетах при  $x=0$  может быть задана любая пара из следующих функций:  $p=p(t)$ ,  $T=T(t)$ ,  $W=W(t)$ .

Для реальных безаварийных стационарных режимов течений скорость газа не превышает 40 м/с, что много меньше скорости звука. В этом случае система уравнений (27)–(28) может быть упрощена.

Рассмотрим подробнее выражение  $\frac{z_1 RTW^2}{p^2}$ . Ис-

пользуя  $W = \rho v = \frac{\rho v}{zRT}$ , получаем:

$$\frac{z_1 RTW^2}{p^2} = \frac{z_1 RT}{p^2} \left( \frac{\rho v}{zRT} \right)^2 = \frac{z_1 v^2}{z^2 RT} = \frac{v^2}{c_T^2},$$

где  $c_T = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T} = z \sqrt{\frac{RT}{z_1}}$  – местная изотермическая скорость звука.

Таким образом, в реальных режимах при  $v < 40$  м/с будет выполнено неравенство

$$\frac{z_1 RTW^2}{p^2} \ll 1. \quad (37)$$

Следовательно, в уравнении (27) можно пренебречь

членом  $\phi_1 = -\frac{z_1 RTW^2}{p^2} \frac{\partial p}{\partial x}$ , и следует также опустить

член  $\phi_2 = \frac{z_2 RW^2}{p} \frac{\partial T}{\partial x}$ , который, как будет показано ниже, имеет такой же порядок малости.

В результате уравнение (27) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda z RTW |W|}{2Dp} - \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (38)$$

и стационарное течение газа может быть описано системой уравнений (28) и (38). Используя (38) и (23), можно записать уравнение (28) в другой эквивалентной форме. После преобразований система уравнений (28) и (38) приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda z RTW |W|}{2Dp} - \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_{JT} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4k}{C_p DW} (T - T_H) - \frac{gp}{zRT} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (39)$$

где  $\mu_{JT} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{RT^2}{pC_p} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p$  – коэффициент Джоуля-Томсона, который в общем случае зависит от давления и температуры. Уравнение (39) имеет более простой вид, чем уравнение (28), однако подчеркнем, что система уравнений (38)–(39) эквивалентна системе уравнений (28) и (38).

#### 4. Численное моделирование

Численное моделирование стационарного и нестационарного дозвуковых режимов течения сжимаемого однокомпонентного природного газа (метана) проводилось для горизонтального ( $h(x)=\text{const}$ ) участка одноразового газопровода с внутренним диаметром  $D=1.4$  м и длиной  $L=112000$  м. Для расчетов приняты следующие значения параметров:  $\lambda=0.0089$ ,  $k=1.628$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $T_H=283$  К,  $R=518$  Дж/(кг·К),  $C_p=2746.34$  Дж/(кг·К). В качестве термического уравнения состояния использовалось уравнение типа Берглю [2,4]:

$$z = [1 + 0,07(p/p_c)(T_c/T)(1 - 6T_c^2/T^2)],$$

где  $p_c=4.6 \cdot 10^6$  Па – критическое давление;  $T_c=190$  К – критическая температура. В этом случае  $z_1=1$ ,  $z_2 = 1 + 0.84(T_c^3/T^3)(p/p_c)$ .

Проводилось численное решение точной системы уравнений (26)–(28) и приближенной системы уравнений (26), (38)–(39) при значениях удельного массового расхода газа  $W=435, 554, 680, 794$  кг/(м<sup>2</sup>·с). В качестве граничных условий (34) на левой границе задавались давление  $p(0)=8.3 \cdot 10^6$  Па и температура  $T(0)=313$  К.

Расчет проводился методом конечных элементов при дискретизации пространственной области на 120 одномерных лагранжевых элементов пятого порядка.

На рис. 1 и 2 представлены полученные распределения давления и температуры газа по длине трубы при различных значениях  $W$ .

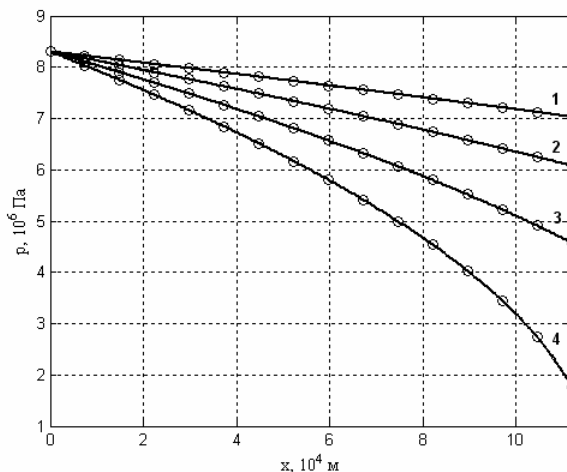


Рис. 1. Зависимость  $p(x)$  при различных значениях  $W$ : 1 – 435; 2 – 554; 3 – 680; 4 – 794 кг/(м<sup>2</sup>·с).

Сплошная линия – решение системы (26)-(28), О – решение приближенной системы (26), (38)-(39)

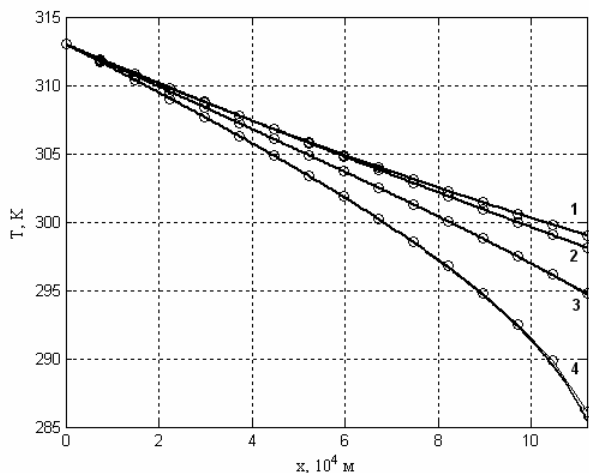


Рис. 2. Зависимость  $T(x)$  при различных значениях  $W$ :  
1 – 435; 2 – 554; 3 – 680; 4 – 794 кг/(м<sup>2</sup>•с)

Сплошная линия – решение системы (26)-(28), О – решение приближенной системы (26), (38)-(39).

На рис. 3 и 4 представлена относительная погрешность решения приближенной системы (38)-(39), рассчитанная по формулам

$$\Delta_p = \left| \frac{p_1(x) - p_2(x)}{p_1(x)} \right|, \quad \Delta_T = \left| \frac{T_1(x) - T_2(x)}{T_1(x)} \right|,$$

где  $p_1(x)$ ,  $T_1(x)$  – решение точной системы (26)-(28);  $p_2(x)$ ,  $T_2(x)$  – решение приближенной системы (26), (38)-(39).

Видно, что относительная погрешность решения приближенной системы (38)-(39) при  $W \leq 790$  кг/(м<sup>2</sup>•с) не превышает  $10^{-3}$ , если  $L \leq 10^5$  м. Максимальная относительная погрешность при  $W = 790$  кг/(м<sup>2</sup>•с) в точке  $x=L=112000$  м составила не более 0.3% по давлению и не более 0.2% по температуре. Однако при этих условиях  $v(L) \approx 64$  м/с. Таким образом, решения системы (38)-(39) имеют приемлемую точность для практических расчетов реальных безаварийных стационарных режимов течений газа.

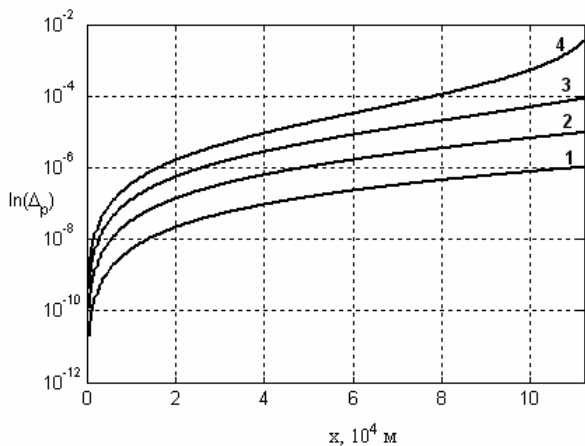


Рис. 3. Относительная погрешность по давлению решения системы (38)-(39) при различных значениях  $W$ :  
1 –  $W = 435$  кг/(м<sup>2</sup>•с); 2 –  $W = 554$  кг/(м<sup>2</sup>•с); 3 –  $W = 680$  кг/(м<sup>2</sup>•с); 4 –  $W = 794$  кг/(м<sup>2</sup>•с).

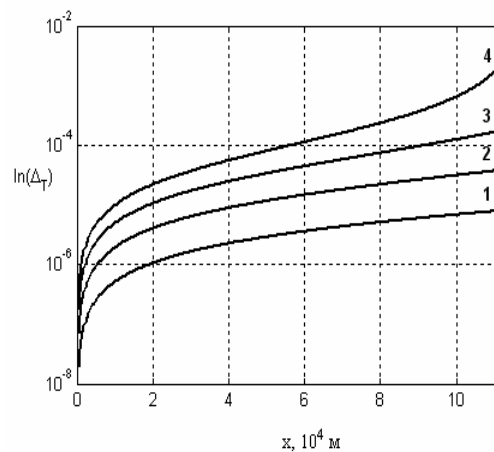


Рис. 4. Относительная погрешность по температуре решения системы (38)-(39) при различных значениях  $W$ :  
1 –  $W = 435$  кг/(м<sup>2</sup>•с); 2 –  $W = 554$  кг/(м<sup>2</sup>•с); 3 –  $W = 680$  кг/(м<sup>2</sup>•с); 4 –  $W = 794$  кг/(м<sup>2</sup>•с)

На рис. 5 представлена зависимость величины  $|\phi_1 / \phi_2|$  от координаты вдоль оси трубы.

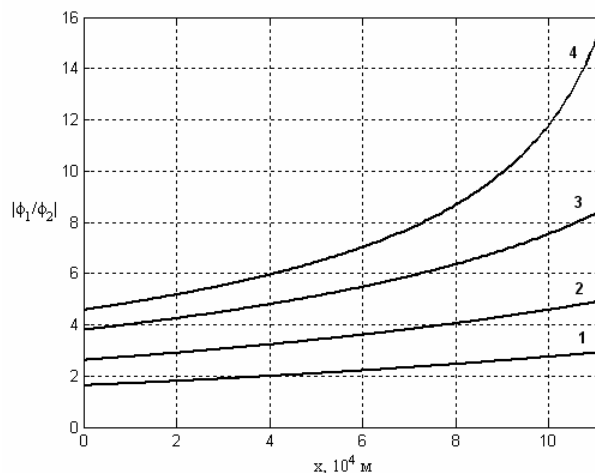


Рис. 5. Зависимость величины  $|\phi_1 / \phi_2|$  от координаты вдоль оси трубы при различных значениях  $W$

Из рис. 5 видно, что члены  $\phi_1$  и  $\phi_2$  имеют один порядок малости и  $|\phi_2| < \phi_1$ . Отсюда вытекает, что при выполнении условия (31) для упрощения уравнения (27) следует одновременно исключать члены  $\phi_1$  и  $\phi_2$ .

Расчет нестационарного режима работы участка газопровода проводился для системы уравнений (19)-(21). В качестве начальных условий (36) принимались распределения удельного массового расхода, давления и температуры, полученные в результате решения стационарной задачи с граничными условиями (34):  $p(0)=8.3 \cdot 10^6$  Па,  $T(0)=313$  К,  $W=556$  кг/(м<sup>2</sup>•с).

В качестве граничных условий на левой границе трубы задавались давление  $p(0,t)=8.3 \cdot 10^6$  Па и температура газа  $T(0,t)=313$  К. На правой границе задавался удельный массовый расход газа  $W(L,t) = W_1(t)$ , где  $W_1(t)$  – функция, имеющая вид импульса треугольной формы:

$$W_1(t) = \begin{cases} 556, & 0 \leq t \leq 100 \\ \frac{1123}{2} - \frac{11}{200}t, & 100 < t \leq 7300 \\ -\frac{323}{3} + \frac{11}{300}t, & 7300 < t \leq 18100 \\ 556, & 18100 < t \leq 40000 \end{cases}$$

График функции  $W_1(t)$  показан на рис. 6.

Решение проводилось методом конечных элементов. Для больших времен расчет осуществлялся при дискретизации пространственной области на 120 одномерных лагранжевых элементов пятого порядка, шаг по времени составлял  $\Delta t = 50$  с (рис. 6, 7).

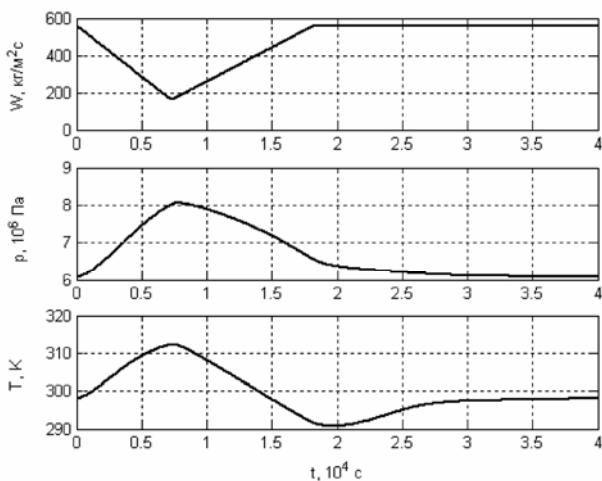


Рис. 6. Изменение удельного массового расхода, давления и температуры газа на границе  $x = L$

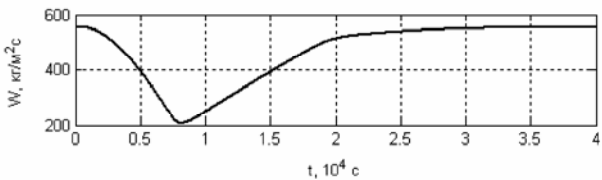


Рис. 7. Изменение удельного массового расхода газа на границе  $x = 0$

## 5. Выводы

Сформулирована математическая модель нестационарного неизотермического движения однокомпонентного реального газа по участку трубопровода, построенная на основе базовых в газовой динамике фундаментальных законов сохранения массы, импульса и энергии, с использованием общих положений термодинамики без упрощающих предположений и ограничений. Научная новизна состоит в том, что

получена в явном виде система уравнений, замкнутая относительно давления  $p$ , удельного массового расхода  $W$  и температуры  $T$ , которая полностью описывает нестационарное неизотермическое течение газа в недеформируемом трубопроводе постоянного сечения. Получены численные решения стационарной и нестационарной краевых задач для дозвуковых режимов течения газа, при типичных условиях работы газотранспортных систем.

*Практическая значимость* полученных результатов состоит в том, что на основе предложенной математической модели может быть построен комплекс адекватных стандартизированных моделей нестационарного неизотермического режима транспорта природного газа, которые корректно учитывают все значимые физические эффекты, оказывающие влияние на физические параметры транспортируемого газа.

**Литература:** 1. Чарный И.А. Основы газовой динамики. М.: Гостоптехиздат, 1961. 200 с. 2. *Неизотермическое течение газа в трубах* / Васильев О.Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболоцкий М.А. Новосибирск: Наука, 1978. 128 с. 3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с. 4. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с. 5. *Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа* / Бондарев Э.А., Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф. и др. Новосибирск: Наука, 1988. 272 с. 6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. СПб.: Лань, 2004. 7. *Основы численного моделирования магистральных трубопроводов* / Под ред. В.Е. Селезнева. М.: Ком Книга, 2005. 496 с. 8. *Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте: математические методы моделирования и практическое применение* / Под ред. В.Е. Селезнева. М.: МАКС Пресс, 2007. 200 с. 9. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир, 1970. 304 с. 10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. V. Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1976. 584 с. 11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с. 12. *Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения* / Н.Н. Новицкий, Е.В. Сеннова, М.Г. Сухарев и др. Новосибирск: Наука, 2000. 273 с.

Поступила в редколлегию 14.05.2008

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф Колосов А.И.

**Тевяшев Андрей Дмитриевич**, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой ПМ ХНУРЭ. Научные интересы: системный анализ и теория оптимального стохастического управления. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 702-14-36.

**Смирнова Виктория Сергеевна**, аспирантка кафедры ПМ ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование физических процессов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 702-14-36.