УДК 681.513.6

АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПОЛЕЙ НАБЛЮДЕНИЙ

ПЛИСС И.П., ПОПОВ С.В.

Рассматривается задача адаптивной фильтрации двумерных полей наблюдений, эволюция которых в дискретные моменты времени описывается последовательностью соответствующих матриц состояний. Вводится матричный аналог марковского дискретного случайного процесса и оптимальный по быстродействию градиентный алгоритм оценивания его параметров. Решается задача экстраполяции на основе матричного аналога уравнения авторегрессии специального вида.

Существуют явления, эволюция которых характеризуется двумерными случайными полями. Наглядным примером такого двумерного поля является дискретное телевизионное изображение, совокупность яркости свечения x_{ij} ячеек которого и образует поле наблюдений. Без потери общности можно рассматривать лишь прямоугольные поля, поскольку поле любой другой конфигурации может быть погружено в прямоугольное поле, поэтому в качестве математического описания последовательности наблюдений будут рассматриваться матрицы состояний

$$X_n = (x_{ij,n}),\ i = 1,2,\Lambda,M,\ j = 1,2,\Lambda,N,$$

где M и N – число строк и столбцов матрицы X_n соответственно, $n = 0,1,2,\ldots$ – текущее время.

В качестве гипотезы о механизме генерирования последовательности X_n в [1] вводится операция линейного преобразования матрицы X в матрицу Z той же размерности вида

$$Z = A*X = \left(\sum_{j=1}^{N} A_{1j}X_j \ \vdots\ \sum_{j=1}^{N} A_{2j}X_j \ \vdots\ \Lambda\ \vdots\ \sum_{j=1}^{N} A_{Nj}X_j\right), \quad (1)$$

где X_j – j-й столбец матрицы X, A_{ij} – $(M\times M)$ – матрицы преобразования, в общем случае неизвестные.

Преобразование (1) с помощью операций циклической перестановки и трансплантации [1] либо векторизации и девекторизации [2] может быть приведено к стандартной векторно-матричной форме. Векторизуя матрицу X в виде $\overset{+}{X}{}^T = \left(X_1^T, X_2^T, \Lambda, X_N^T\right)$, вводя блочную матрицу преобразования

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \Lambda & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \Lambda & A_{2N} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ A_{N1} & A_{N2} & \Lambda & A_{NN} \end{pmatrix}$$

(здесь A_{ij} – $(M\times M)$ –матрицы преобразования в выражении (1)) и произведение

$$\left(A\overset{+}{X}\right)^T = \left(\left(\sum_{j=1}^{N} A_{1j}X_j\right)^T, \left(\sum_{j=1}^{N} A_{2j}X_j\right)^T, \Lambda, \left(\sum_{j=1}^{N} A_{Nj}X_j\right)^T\right),$$

в результате девекторизации получаем

$$Z = \underset{+}{\left(A\overset{+}{X}\right)} = A*X, \quad (2)$$

где $\overset{+}{(\bullet)}$ – символ операции векторизации, $\underset{+}{(\bullet)}$ – символ операции девекторизации.

Поскольку реальные поля наблюдений практически всегда искажены различного рода возмущениями, в [1] был введен матричный аналог марковской последовательности первого порядка вида

$$X_{n+1} = A*X_n + W_{n+1}$$

(здесь $W_n = (w_{ij,n})$ – дискретный матричный белый шум), который с учётом (2) может быть представлен в форме

$$X_{n+1} = \underset{+}{\left(A\overset{+}{X}_n\right)} + W_{n+1}. \quad (3)$$

В случае, если параметры преобразования A неизвестны, можно решить задачу их оценивания в реальном времени с помощью тех или иных адаптивных процедур идентификации. Так, ставя в соответствие (3) настраиваемый фильтр

$$\hat{X}_{n+1} = \underset{+}{\left(A_n\overset{+}{X}_n\right)}, \quad (4)$$

несложно записать адаптивный алгоритм Уидроу-Хоффа [3]:

$$A_{n+1} = A_n + \alpha\frac{\overset{+}{X}_{n+1} - A_n\overset{+}{X}_n}{\overset{+}{X}{}_n^T\overset{+}{X}_n}\overset{+}{X}{}_n^T, \quad (5)$$

где A_n – текущие оценки параметров преобразования A, $0<\alpha<2$ – скалярный параметр алгоритма.

Необходимо отметить, что в практических приложениях такой подход малоэффективен из-за большого числа неизвестных параметров. Так, в простейшем случае при $M=N=100$ необходимо оценивать в реальном времени $(MN)^2 = 10^8$ неизвестных параметров матрицы A, что весьма затруднительно даже при использовании нейрокомпьютеров. Это обстоятельство заставляет искать альтернативные подходы к решению задачи фильтрации полей наблюдений, для чего можно ввести в рассмотрение упрощённое преобразование

$$Z = A * X = \left(\sum_{j=1}^{N} b_{j1} AX_j \;\vdots\; \sum_{j=1}^{N} b_{j2} AX_j \;\vdots\; \Lambda \;\vdots\; \sum_{j=1}^{N} b_{jN} AX_j \right), \quad (6)$$

соответствующее описанию двумерного поля вида

$$X_{n+1} = AX_n B + W_{n+1}, \quad (7)$$

где A и B – (MґM) и (NґN) – матрицы преобразования. Описание (7) содержит $M^2 + N^2$ параметров и при $M>2$, $N>2$ очевидно, что $M^2 + N^2 < (MN)^2$, при этом выигрыш в количестве оцениваемых параметров тем больше, чем больше M и N. Так, для рассмотренного выше случая $M=N=100$ количество параметров преобразования (7) равно 20000, что существенно меньше, чем в модели (4), и при параллельной организации вычислений задача оценивания может быть успешно решена даже с помощью компьютера.

Модель (7) была введена в [4], однако алгоритм оценивания её параметров не был разработан. Алгоритм же (5) в силу специфичности структуры (7) не может быть использован в непосредственных расчетах и требует существенной модификации. В принципе, описание (7) может быть приведено к матрично-векторному виду

$$\overset{+}{X}_{n+1} = (B^T \otimes A)\overset{+}{X}_n + \overset{+}{W}_{n+1}$$

(здесь $\otimes$ – символ тензорного произведения), однако число параметров в матрице $B^T \otimes A$, как и в случае (3), составляет $(MN)^2$.

В связи с этим возникает задача синтеза алгоритмов оценивания неизвестных параметров матриц A и B в (7), а также фильтрации и экстраполяции двумерного поля с помощью полученных оценок. Поставим в соответствие (7) настраиваемый фильтр вида

$$\hat{X}_{n+1} = A_n X_n B_n, \quad (8)$$

введём в рассмотрение три типа ошибок, возникающих в процессе настройки

$$\begin{cases} V_{n+1} = X_{n+1} - A_n X_n B_n, \\ V_{n+1}^A = X_{n+1} - A_{n+1} X_n B_n, \\ V_{n+1}^B = X_{n+1} - A_{n+1} X_n B_{n+1} \end{cases}$$

и критерии оценки качества фильтрации:

$$\begin{cases} J_{n+1}^A = Tr V_{n+1} V_{n+1}^T = \left\| V_{n+1} \right\|^2, \\ J_{n+1}^B = Tr V_{n+1}^A V_{n+1}^{A\ T} = \left\| V_{n+1}^A \right\|^2, \end{cases} \quad (9)$$

где Tr – символ следа матрицы.

Каждый шаг процесса оценивания состоит из двух тактов: уточнение матрицы A_{n+1} на основе ошибки V_{n+1} и критерия J_{n+1}^A и последующее уточнение матрицы оценок B_{n+1} на основе ошибки V_{n+1}^A и критерия J_{n+1}^B. При этом алгоритм настройки параметров градиентного типа можно записать в виде

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n - \gamma_{n+1}^A \nabla_{n+1}^A = A_n - \gamma_{n+1}^A V_{n+1} B_n^T X_n^T, \\ B_{n+1} = B_n - \gamma_{n+1}^B \nabla_{n+1}^B = B_n - \gamma_{n+1}^B X_n^T A_{n+1}^T V_{n+1}^A, \end{cases} \quad (10)$$

где $\gamma_{n+1}^A, \gamma_{n+1}^B$ – скалярные коэффициенты усиления алгоритма, $\nabla_{n+1}^A = V_{n+1} B_n^T X_n^T, \nabla_{n+1}^B = X_n^T A_{n+1}^T V_{n+1}^A$ – (MґM) и (NґN) – матрицы, образованные производными критериев J_{n+1}^A и J_{n+1}^B по настраиваемым параметрам.

Можно показать [5], что максимальная скорость настройки параметров обеспечивается специальным выбором коэффициентов усиления $\gamma_{n+1}^A, \gamma_{n+1}^B$, при этом (10) приобретает вид

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + \dfrac{\left\| \nabla_{n+1}^A \right\|^2}{Tr \nabla_{n+1}^A X_n B_n B_n^T X_n^T \nabla_{n+1}^{A\ T}} \nabla_{n+1}^A, \\ B_{n+1} = B_n + \dfrac{\left\| \nabla_{n+1}^B \right\|^2}{Tr\, A_{n+1} X_n \nabla_{n+1}^B \nabla_{n+1}^{B\ T} X_n^T A_{n+1}^T} \nabla_{n+1}^B, \end{cases} \quad (11)$$

что является обобщением оптимального ($a=1$) алгоритма Уидроу–Хоффа на случай двумерного поля.

Эволюция ошибок фильтрации в процессе работы алгоритма (11) описывается разностными уравнениями:

$$\begin{cases} V_{n+1}^A = V_{n+1} - \dfrac{\left\| \nabla_{n+1}^A \right\|^2 X_n B_n \nabla_{n+1}^A}{Tr \nabla_{n+1}^A X_n B_n B_n^T X_n^T \nabla_{n+1}^{A\ T}}, \\ V_{n+1}^B = V_{n+1}^A - \dfrac{\left\| \nabla_{n+1}^B \right\|^2 A_{n+1} X_n \nabla_{n+1}^B}{Tr\, A_{n+1} X_n \nabla_{n+1}^B \nabla_{n+1}^{B\ T} X_n^T A_{n+1}^T}, \end{cases} \quad (12)$$

при этом может быть показано [6], что $\left\| V_{n+1}^B \right\|^2 \le \left\| V_{n+1}^A \right\|^2 \le \left\| V_{n+1} \right\|^2$, т.е. алгоритм (11) обеспечивает монотонное убывание ошибок в процессе настройки параметров фильтра (8).

Практическое использование алгоритма (11) может осложняться тем, что в окрестности оптимальных режимов, когда ошибки V_{n+1} и V_{n+1}^A малы по норме, значения коэффициентов усиления γ_{n+1}^A и γ_{n+1}^B резко возрастают, что может привести к вычислительной неустойчивости, избежать которую можно, вводя аддитивную с

$$\gamma_{n+1}^{A\ A} = \frac{\left\| \nabla_{n+1}^A \right\|^2}{\gamma^A + Tr \nabla_{n+1}^A X_n B_n B_n^T X_n^T \nabla_{n+1}^{A\ T}},$$

$$\gamma_{n+1}^{B\ A} = \frac{\left\| \nabla_{n+1}^B \right\|^2}{\gamma^B + Tr\, A_{n+1} X_n \nabla_{n+1}^B \nabla_{n+1}^{B\ T} X_n^T A_{n+1}^T}$$

и мультипликативную с

$$\gamma_{n+1}^{A\ \ M} = \frac{\gamma_M^A}{\left\| X_n B_n \right\|^2}, \quad \gamma_{n+1}^{B\ \ M} = \frac{\gamma_M^B}{\left\| A_{n+1} X_n \right\|^2}$$

модификации алгоритма (10). Здесь γ^A, γ^B – регуляризующие добавки, $0 < \gamma_M^A < 2, \quad 0 < \gamma_M^B < 2$.

Процесс убывания ошибок при использовании алгоритма (11) ограничен снизу величиной, определяемой характеристиками помех W_{n+1}. Если

$$M\{W_{n+1}\} = 0, \quad M\left\{ \overset{+}{W}_{n+1} \overset{+}{W}{}^T_{n+1} \right\} = P_W < \infty I$$

(здесь $M\{\bullet\}$ – символ математического ожидания), то точность фильтрации ограничена величиной [6]:

$$\left\| V^{\min} \right\|^2 = Tr(B^T \otimes A + I) P_W (B^T \otimes A + I)^T.$$

Наряду с задачей фильтрации достаточно часто при обработке полей наблюдений возникает задача их экстраполяции, для решения которой удобно использовать матричный аналог уравнения авторегрессии

$$X_{n+1} = \sum_{h=0}^{r-1} A^h * \left(q^{-h} X_n \right) + W_{n+1}, \qquad (13)$$

где q^{-h} – оператор сдвига назад, определяемый соотношением $q^{-h} X_n = X_{n-h}, \quad A^h, h = 0, 1, \Lambda, r-1$ – операторы матричной свёртки типа (1). При этом общее число параметров такой модели составляет $(MN)^2 r$.

Количество неизвестных параметров прогнозирующей модели может быть существенно уменьшено путём использования упрощённого преобразования вместо структуры (13). При этом в качестве экстраполирующей можно использовать либо структуру

$$X_{n+1} = \widetilde{A}\left(X_n \ \vdots\ X_{n-1} \ \vdots\ \Lambda \ \vdots\ X_{n-r+1} \right) \widetilde{B} + W_{n+1}, \qquad (14)$$

содержащую $M^2 + rN^2$ параметров (здесь $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – (MгM) и (rNгN) – матрицы преобразования), либо

$$X_{n+1} = \sum_{h=0}^{r-1} A^{h+1} X_{n-h} B^{h+1} + W_{n+1}, \qquad (15)$$

содержащую $\left(M^2 + N^2 \right) r$ параметров.

Вводя в рассмотрение матрицы

$$\widetilde{A} = \left(A^1 \ \vdots\ A^2 \ \vdots\ \Lambda \ \vdots\ A^r \right),$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ M \\ B^r \end{pmatrix}, \widetilde{X}_n = \begin{pmatrix} X_n & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & X_{n-1} & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & X_{n-r+1} \end{pmatrix},$$

можно переписать (15) в компактной форме

$$X_{n+1} = \widetilde{A} \widetilde{X}_n \widetilde{B} + W_{n+1} \qquad (16)$$

и поставить в соответствие (16) настраиваемый упредитель $\hat{X}_{n+1} = \widetilde{A}_n \widetilde{X}_n \widetilde{B}_n$, что позволяет свести задачу экстраполяции к уже рассмотренной выше задаче адаптивной фильтрации с помощью матричного аналога алгоритма Уидроу-Хоффа.

В заключение важно отметить, что если X_n – суть скалярная стохастическая последовательность, то предлагаемая здесь процедура автоматически приобретет форму алгоритма, рассмотренного в [7], если же X_n – векторная последовательность, то приходим к результатам, полученным в [8], т.е. нами предложено обобщение процедур адаптивной фильтрации и экстраполяции на случай двумерных полей наблюдений.

Литература: 1. *Кунцевич В.М.* О решении задачи двумерной дискретной фильтрации //Автоматика и телемеханика. - 1987.- №6.- С.68-78. 2. *Гришин В.Н., Дятлов В.А., Милов Л.Т.* Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем.- Л.: Энергоатомиздат.- 1985. – 104 с. 3. *Haykin S.* Modern filters.- N.Y.: Macmillan Publishing Company, 1989.- 398 p. 4. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход.- Киев: Наукова думка.- 1985 - 248 с. 5. *Бодянский Е.В., Плисс И.П.* О решении задачи управления матричным объектом в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика.- 1990.- №2.- С.175-178. 6. *Bodyansky Ye.V., Pliss I.P., Timofeev V.A.* Discrete adaptive identification and extrapolation of two-dimensional fields // Pattern Recognition and Image Analysis.- 1995.-V.5.- №3.- P.410-416. 7. *Taylor C.D., Nicolas D.P.* An adaptive data-smoothing routine. //Computers in Physics.- 1989.- 3.-№2.- P.63-64. 8. *Moir T.J., Grimble M.J.* Optimal self-tuning filtering, prediction, and smoothing for discrete multivariable processes // IEEE Trans. on Autom. Contr.- 1984.- V.29.- №2.- P.128-137.

Поступила в редколлегию 10.09.97

Плисс Ирина Павловна, канд. техн. наук, вед. науч. сотр. ПНИЛ АСУ ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы обработки информации и управления. Увлечения: фелинология, приготовление экзотических блюд. Адрес: Украина, Харьков, 145, ул. Клочковская, 152-А, кв. 10.

Попов Сергей Витальевич, студент факультета компьютерных наук ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивная обработка информации в многомерных системах. Увлечения: музыка, компьютеры, автомобили. Адрес: Украина, Харьков, 98, ул. Полтавский шлях, 148/2, кв. 162, тел. 72-59-85, e-mail: serge_mail@writeme.com.