УДК 621.391

*Ф. В. ЛУЧЕНКО, В. С. ПОПЕНКО*, канд. техн. наук

# ОЦЕНКА «ЭФФЕКТИВНОЙ» ШИРИНЫ СПЕКТРА СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Весьма часто возникает необходимость оценки систем сигналов по эффективности использования заданного диапазона частот. Этот вопрос может быть решен на основе анализа спектральных свойств систем сигналов.

Так как в реальных системах сигналы финитны, их спектры бесконечны. На практике ширину спектра заменяют условной полосой частот, поскольку точная ширина спектра имеет смысл только для финитного спектра. Среди различных определений условной полосы наиболее привлекательно определение средней квадратичной ширины спектра, впервые предложенное в работе [3] и используемое в работах [1; 2], представляющее собой второй центральный момент положительной ветви нормированной энергетической спектральной плотности, получившей название «эффективной» ширины спектра, значение которой определяется из соотношения $W_э^2 = \frac{1}{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [U'(t)]^2 \, dt$ **(1)**, где $E$ — энергия сигнала $U(t)$. Если $U(t)$ имеет конечную длительность и непрерывную первую производную $U'(t) \in C'[0; T]$, то $W_э$ — величина конечная.

Рассмотрим дискретные сигналы, задаваемые функциями, которые принимают конечное число значений при непрерывном аргументе $t$. Сигналы такого вида можно задать в следующей форме: $U(t) = A(t) e^{i\theta(t)}$ **(2)**, где $A(t)$ — амплитуда; $\theta(t)$ — фаза сигнала.

Для сигналов вида (2) «эффективная» ширина спектра определяется из соотношения $W_э^2 = \frac{1}{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{[A'(t)]^2 + A^2(t) [\theta'(t)]^2\} \, dt$ **(3)**. У рассматриваемого класса сигналов $A(t) = 1$ $\theta(t)$ принимает два значения 0 и $\pi$.

Следовательно, $A'(t) = 0$ на всем интервале задания сигнала, а $\theta'(t)$ имеет разрывы второго рода в точках перехода от одного значения к другому, вследствие чего она не интегрируема, а следовательно, не интегрируема и $[\theta'(t)]^2$, тогда для дискретного сигнала $W_э^2 = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\theta'(t)]^2\,dt$ (4). Ясно, что в сравнении с любым сигналом, удовлетворяющим задаче Штурма-Лиувилля [1] (такой сигнал имеет непрерывную производную), дискретные сигналы используют полосу частот менее эффективно, так как согласно (4) для дискретного сигнала $W_э$ бесконечна.

Из (4) следует, что для дискретного сигнала $W_э$ найти невозможно. По мнению авторов, целесообразно применять этот показатель при относительном критерии оценки эффективности использования полосы частот различными дискретными сигналами. Пусть $U_1(t)$ и $U_2(t)$ имеют фазы соответственно $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, тогда относительный критерий определится соотношением $h = \dfrac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\theta_1'(t)]^2\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\theta_2'(t)]^2\,dt}$ (5). При $h < 1$ первый сигнал лучше использует полосу, если $h > 1$ — то второй. При $h = 1$ оба сигнала используют заданную полосу частот с одинаковой эффективностью, т. е. данный критерий позволяет оценить, насколько один сигнал эффективнее использует заданную полосу частот по сравнению с другим при стремлении «эффективной» ширины спектра каждого сигнала к бесконечности.

Рассмотрим, как зависит параметр $h$ от числа скачков фазы сигнала. Определим фазу $\theta(t)$ через функцию Хевисайда

$$\eta(t) = \left.\begin{matrix} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{matrix}\right\}. \tag{6}$$

Пусть $\theta_1(t)$ имеет $k$ скачков в точках $t_1, t_2, \ldots, t_k$, тогда $\theta_1(t) = \pi\sum\limits_{i=1}^{k}\mathscr{L}_i\eta(t - t_i)$ (7), где $\mathscr{L}_i = \pm 1$.

Пусть $\theta_2(t)$ имеет $m$ скачков, в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$

$$\theta_2(t) = \pi\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta(t - \tau_i), \tag{8}$$

где $\beta_i = \pm 1$.

Из (7), (8) с учетом, что $\eta'(t) = \delta(t)$, получаем

$$\theta_1^1(t) = \pi\sum_{i=1}^{k}\mathscr{L}_i\delta(t - t_i); \quad \theta_2^1(t) = \pi\sum_{i=1}^{m}\beta_i\delta(t - \tau_i). \tag{9}$$

Тогда из (5), с учетом (9), следует, что

$$h = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^{k} \delta(0)}{\pi^2 \sum_{i=1}^{m} \delta(0)} = \frac{k}{m}. \tag{10}$$

Анализ соотношения (10) показывает, что более эффективно использует полосу частот тот сигнал, у которого меньше скачков фазы. Таким образом, можно сделать вывод, что для двухуровневых дискретных сигналов, описываемых функциями Уолша, Хаара, Радемахера, число скачков полностью характеризует эффективность использования полосы частот.

**Список литературы:** 1. *Варакин Л. Е.* Теория сложных сигналов. М., 1970. 350 с. 2. *Варакин Л. Е.* Теория систем сигналов. М., 1978. 208 с. 3. *Харкевич А. А.* Борьба с помехами. М., 1965. 320 с.

*Поступила в редколлегию 03.10.88*