СИСТЕМА ПРИЗНАКОВ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ДЕРЕВЬЕВ

А. Г. Евдокимов, В. И. Уберман

Харьков

В теории сложных систем управления часто встречаются комбинаторные задачи, связанные с нахождением деревьев с теми или иными свойствами (нередко экстремальными) в графах. К основным методам решения таких задач относятся пошаговые методы, использующие различные рекуррентные соотношения [1] или разбиения комбинаций на классы с целью изучения только представителей классов [2]. Для использования этих методов необходимо указать такие «переменные» в деревьях, по которым можно было бы производить поиск, или признаки, которые можно было бы использовать для разбиения множества деревьев на классы. Некоторые из вводимых ниже понятий были сформулированы в ином виде в [3,4].

1. Предварительные сведения о покрытиях. Рассматривается класс G конечных связных неориентированных графов без кратных ребер и петель. Каждому ребру приписывается положительная единичная длина. Следуя [5], под графом $G \in \mathbf{G}$ будем понимать пару, состоящую из множества $V(G)$ вершин графа и отображения Γ этого множества на себя, или, что одно и то же, пару $(V(G), E(G))$, где $E(G)$ — множество неупорядоченных пар (v_1, v_2), $v_1, v_2 \in V(G)$, называемых ребрами графа, полученное отождествлением пар из графика отображения Γ, отличающихся лишь порядком компонент.

Нам понадобятся некоторые определения из [6]. Расстоянием между вершинами v_1 и v_2 называется число $\rho_G(v_1, v_2) = \min\limits_{[v_1, v_2] \in G} l_{[v_1, v_2]}$, где $l_{[v_1, v_2]}$ — длина цепи $[v_1, v_2]$, минимум берется по всем цепям $[v_1, v_2]$ графа G. Цепь $[v_1, v_2]$, для которой $l_{[v_1, v_2]} = \rho_G(v_1, v_2)$, называется прямой. Положим $l_{[v_1, v_1]} = 0$, отсюда $\rho_G(v_1, v_1) = 0$. При этом расстояние удовлетворяет всем аксиомам метрики.

Пусть $v \in V(G)$ произвольно фиксированная вершина. Тогда множество $U \subseteq V(G)$ вершин, удаленных от v не более чем на r (r — целое неотрицательное число), определится следующим образом:

$$U = \{v\} \cup \Gamma v \cup \Gamma^2 v \cup \ldots \cup \Gamma^r v. \quad (1)$$

Сферической окрестностью (окрестностью) радиуса r данной вершины v (центра окрестности) графа G называется подграф (U, Γ_U), где U определяется из (1). Окрестность будем обозначать $N_G(v, r)$. Граф G считается точечно (соответственно линейно) покрытым системой окрестностей $\{N_G(v_{k_i}, r_{l_i}), i \in I\}$ (где I — множество индексов окрестностей) некоторого множества $W = \{v_{k_i}, i \in I\}$ своих вершин, если $V(G) = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ (соответственно $(\forall (v_1, v_2) \in E(G))(\exists N_G(v_{k_i}, r_{l_i}))(v_1, v_2 \in U_i)$). Множество $R = \{r_{l_i}, i \in I\}$ — семейство радиусов. Сама система окрестностей $\{N_G(v_{k_i}, r_{l_i}), i \in I\}$ называется точечным (соответственно линейным) покрытием и обозначается $A_G(W, R)$. Два покрытия будем считать равными (с точностью до переиндексации) тогда и только тогда, когда между системами их окрестностей можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором у соответствующих окрестностей совпадают центры и множества вершин, входящих в них, равны. Если $(\forall r_{l_i} \in R)(r_{l_i} = r_i)$, то покрытие с таким семейством R называется однородным и обозначается $A_G(W, r)$.

Если

$$(\forall N_G(v_{k_{i_1}}, r_{l_{i_1}}))(\forall N_G(v_{k_{i_2}}, r_{l_{i_2}}))(U_{i_1} \subseteq U_{i_2}),$$

то точечное покрытие $A_G(W, R)$ называется простым и обозначается $A_G^*(W, R)$. В противном случае покрытие можно превратить в простое путем отождествления окрестностей, имеющих совпадающие центры и одинаковые радиусы и удаления «внутренних» окрестностей. Далее будут рассматриваться только простые точечные покрытия графа

$$G \in \boldsymbol{G}.$$

2. Канонические покрытия.

Определение 1. Пусть $A_G^*(W, R)$ — произвольное покрытие. Подграф (W, Γ_W) называется накрывающим подграфом графа G при покрытии $A_G^*(W, R)$ (или просто накрывающим подграфом) и обозначается $H(W)$

Определение 2. Покрытие $A_G^*(W, R)$ называется каноническим и обозначается $A_G(W)$, если выполняются условия:

1) $\operatorname{card}(W) > 1$;

2) накрывающий подграф $H(W)$ связен — условие связности покрытия;

3) $(\forall N_G(v_{i_1}, r_{l_{i_1}}))(\forall N_G(v_{i_2}, r_{l_{i_2}}))[(U_{i_1} \cap U_{i_2}) \setminus W = \varnothing]$ — условие неизбыточности покрытия.

Установим некоторые свойства канонических покрытий.

Лемма 1. Пусть $A_G^*(W, R)$ — покрытие, удовлетворяющее условиям 1) и 2) определения 2. Тогда $A_G^*(W, R) = A_G^*(W, r)$.

Теорема 1. $A_G^*(W, R) = A_G(W) \Rightarrow A_G^*(W, R) = A_G^*(W, 0) \vee A_G^*(W, R) = A_G^*(W, 1)$.

Тривиальное каноническое покрытие с $r = 0$ будем обозначать $A_G(V(G))$, т. е. для него $W = V(G)$.

Замечание 1. Покрытие $A_G^*(W, R) = \{N_G(w, 1)\}$ условимся считать каноническим.

Можно особо выделять для любого $A_G(W)$ с $W \neq V(G)$ множество $B(W) = \{w \in W : \Gamma w = \Gamma_W w\}$ центров окрестностей, участвующих только в образовании $H(W)$.

Теорема 2. Пусть (W, Γ_W) — связный подграф (допускается и одновершинный) графа G, на котором определены числа $d_G(W) = \sum_{w \in W} (d_G(w) - d_{(W, \Gamma_W)}(w))$ и $d_G^*(W) = \operatorname{card}(\Gamma W \setminus W)$, где $d_G(v)$ — степень вершины $v \in V(G)$ в графе G; (W, Γ_W) является накрывающим подграфом графа G при покрытии $A_G(W)$ тогда и только тогда, когда $d_G(W) = d_G^*(W) = \operatorname{card}(V(G) \setminus W)$.

Определение 3. Пусть $A_G^s(W, r)$ — покрытие, для которого выполнены условия 1) и 2) определения 2. Частичный подграф (W, Δ_W) называется накрывающим остовом графа G при покрытии $A_G^s(W, r)$ (накрывающим остовом) и обозначается $S(W)$, если он является деревом накрывающего подграфа $H(W)$ (полностью все отображение Δ определяется при конструктивном доказательстве теоремы 3). Множество накрывающих остовов графа G при покрытии $A_G^s(W, r)$ обозначается $\bar{S}(W)$.

3. Две операции над покрытиями. Теперь рассмотрим произвольные покрытия $A_G^s(W, 1)$ и их связь с каноническими покрытиями. Для этого введем следующие две операции.

Связывание $\tilde{C}(A_G^s(W, 1))$ несвязного покрытия $A_G^s(W, 1)$, заключающееся в том, что в покрытие $A_G^s(W, 1)$ вводится простое (см. п. 1) семейство новых окрестностей $\{N_G(u_j, r_{l_j}), j \in J\}$, $u_j \in V(G)$ с множеством центров $C = \{u_j, j \in J\}$, такое, что накрывающий подграф $H(W \cup C)$ связан, и далее рассматривается покрытие $A_G(W \cup C, R)$.

Лемма 2. Пусть $A_G(W \cup C, R)$ покрытие, полученное в результате некоторого связывания $\tilde{C}(A_G^s(W, 1))$. Тогда

$$A_G(W \cup C, R) = A_G^s(W \cup C, R) \Rightarrow A_G(W \cup C, R) = A_G(W \cup C, 1).$$

Как было указано, мы будем рассматривать только покрытия $A_G^s(W \cup C, 1)$. Равенство связываний определим следующим образом:

$$\tilde{C}_1(A_G^s(W, 1)) = \tilde{C}_2(A_G^s(W, 1)) \Leftrightarrow A_G^s(W \cup C_1, 1) = A_G^s(W \cup C_2, 1).$$

Множество всех различных связываний несвязного покрытия $A_G^s(W, 1)$ обозначим $\mathbf{C}(A_G^s(W, 1))$. При любом $\tilde{C} \in \mathbf{C}(A_G^s(W, 1))$ можно выделить непустое множество $X(\tilde{C}) = \{c \in C : d_{H(W \cup C)}(c) > 1\}$ (где $d_{H(W \cup C)}(c)$ — степень вершины c в накрывающем подграфе $H(W \cup C)$) центров окрестностей, непосредственно участвующих в связывании. Представляет интерес множество

$$\left\{\tilde{C} \in \mathbf{C}(A_G^s(W, 1)) : \min_{C \in \mathbf{C}} \operatorname{card}\left(X(\tilde{C})\right)\right\}$$

минимальных связываний покрытия $A_G^s(W, 1)$. Очевидно, что

$$\left(\forall x_1 \in X(\tilde{C})\right)(\exists w_1 \in W)(\exists w_2 \in W)\left[(x_1 \in \Gamma w_1 \,\&\, x_1 \in \Gamma w_2) \vee \right.$$
$$\left. \vee \left(\exists x_2 \in X(\tilde{C})\right)((x_1, x_2) \in E(G) \,\&\, x_1 \in \Gamma w_1 \,\&\, x_2 \in \Gamma w_2)\right]. \qquad (2)$$

Значит, $X(\tilde{C}) = Y(\tilde{C}) \cup Z(\tilde{C})$, где $Y(\tilde{C})$ и $Z(\tilde{C})$ определяются первым и вторым членами дизъюнкции в (2) соответственно. Таким образом, запись $A_G^s(W \cup C, 1)$ является более общей, так как в случае, когда $A_G^s(W, 1)$ связно, можно положить $C = \varnothing$. Операция связывания поз-

воляет приводить произвольные покрытия $A_G^*(W,\ 1)$ к виду, удовлетворяющему условию 2) определения 2.

Разбиение $\tilde{P}(A_G^*(W,\ 1))$ множества $V(G)$ на непересекающиеся классы, индуцированное покрытием $A_G^*(W,\ 1)$, такое что

$$\tilde{P}(A_G^*(W,\ 1)) = \{(U_{i_1} \setminus \Gamma_W w_{i_1}) \setminus Q_{i_1},\ i_1 \in I : Q_{i_1} \subseteq$$
$$\subseteq \{v \in \Gamma w_{i_1} : (\exists N_G(w_{i_2},\ 1) \in A_G^*(W,\ 1))(v \in U_{i_2})\}\}. \qquad (3)$$

Эта операция позволяет привести произвольные покрытия $A_G^*(W,\ 1)$ к неизбыточному виду. При этом происходит «расклеивание» окрестностей. Действительно, пусть имеем некоторое $\tilde{P}(A_G^*(W,\ 1))$. Данная операция предполагает построение по $A_G^*(W,\ 1)$ нового покрытия $A_G(\tilde{P})$ следующим образом: окрестность $N_G(w_{i_1},\ 1) \in A_G^*(W,\ 1)$ входит в $A_G(\tilde{P})$ как окрестность $N_G(P_{i_1})$, $(P_{i_1} = U_{i_1} \setminus \Gamma_W w_{i_1} \Leftarrow\Rightarrow (\forall N_G(w_{i_2},\ 1) \in A_G^*(W,\ 1))\ [(U_{i_1} \cap \bigcup U_{i_2}) \setminus W = \varnothing]$, что следует из (3) при $Q_{i_1} = \varnothing$. В противном же случае $P_{i_1} = (U_{i_1} \setminus \Gamma_W w_{i_1}) \setminus Q_{i_1}$, где $P_{i_1} \in \tilde{P}(A_G^*(W,\ 1))$ — соответствующий класс разбиения. Полученное покрытие $A_G(\tilde{P})$ удовлетворяет условию 3) определения 2, сформулированному для классов разбиения. Определим равенство разбиений следующим образом:

$$\tilde{P}_1(A_G^*(W,\ 1)) = \tilde{P}_2(A_G^*(W,\ 1)) \Leftarrow\Rightarrow A_G(\tilde{P}_1) = A_G(\tilde{P}_2).$$

Множество всех различных индуцируемых разбиений указанного вида обозначим $\mathbf{P}(A_G^*(W,\ 1))$. Для любого $\tilde{P} \in \mathbf{P}(A_G^*(W,\ 1))$ будем выделять множество $D(\tilde{P}) = \{w \in W : P_i = \{w\}\}$, что даст возможность искать $\left\{\tilde{P} \in \mathbf{P} : \max\limits_{P \in \tilde{P}} \operatorname{card}(D(\tilde{P}))\right\}$. Согласно определению операции связывания для $A_G^*(W \cup C,\ 1)$ имеем

$$\tilde{P} \in \left\{\tilde{P} \in \mathbf{P}(A_G^*(W \cup C,\ 1)) : \max \operatorname{card}(D(\tilde{P}))\right\} \Rightarrow C \subseteq D(\tilde{P}).$$

Замечание 1 и введенные выше операции позволяют привести любое покрытие $A_G^*(W,\ 1)$ к каноническому виду.

4. Квазиканонические покрытия.

Определение 4. Покрытие $A_G(\tilde{P})$, полученное из покрытия $A_G^*(W,\ 1)$ в результате связывания $\tilde{C} \in \mathbf{C}(A_G^*(W,\ 1))$ (если оно несвязно) и последующего разбиения $\tilde{P} \in \mathbf{P}(A_G^*(W \cup C,\ 1))$, называется квазиканоническим.

Если же $A_G^*(W,\ 1)$ связно, то непосредственно производится разбиение $\tilde{P} \in \mathbf{P}(A_G^*(W,\ 1))$.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{A}_G$ и $\hat{\mathbf{A}}_G$ — множества всех различных квазиканонических покрытий, полученных из связных и несвязных исходных покрытий $A_G^*(W,\ 1)$ и $A_G^*(W \cup C,\ 1)$ соответственно. Тогда $\hat{\mathbf{A}}_G \subseteq \mathbf{A}_G$.

Замечание 2. Полагая $\mathbf{P}(A_G(W)) = \underset{DI}{\{\{U_i \setminus \Gamma_W w_i,\ i \in I\}\}}$, получим, что

каноническое покрытие $A_G(W)$ индуцирует единственное квазиканоническое покрытие $A_G(\{U_i \setminus \Gamma_W w_i,\ i \in I\})$. Таким образом, каждое покрытие $A_G^*(W,\ 1)$ индуцирует некоторое непустое множество квазиканонических покрытий.

Из леммы 3 и замечания 2 следует, что в дальнейшем можно рассматривать только множество $\mathbf{A}_G$. Вместе с ним будем рассматривать множества $\mathbf{H}(G)$ и $\mathbf{S}(G)$ всех накрывающих подграфов и всех накрывающих остовов соответственно.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{T}(G)$ — множество деревьев графа G, а $\mathbf{F}(G) \subseteq \mathbf{A}_{(G)} \times \mathbf{S}(G)$ такой график, что

$$<A_G\left(\tilde{P}\left(A_G^*(W_1,\ 1)\right)\right),\ S(W_2)> \in \mathbf{F}(G) \Leftrightarrow\Rightarrow A_G^*(W_1,\ 1) = A_G^*(W_2,\ 1).$$

Тогда между множествами $\mathbf{F}(G)$ и $\mathbf{T}(G)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Доказательство проводится путем построения соответствия, существование которого утверждается.

Замечание 3. Результат теоремы справедлив и для множества $\{A_G(V(G))\}$. Его можно получить, считая $A_G\left(\tilde{P}\left(A_G(V(G))\right)\right) = A_G(V(G))$.

Таким образом, теорема 3 и ее обобщения позволяют любую задачу о нахождении деревьев в графе $G \in \mathbf{G}$ свести к задаче о нахождении соответствующих пар $<A_G\left(\tilde{P}\right), S(W)>$. Это может значительно упростить постановку самой задачи и ее решение. В качестве естественных применений выделенной выше системы переменных и признаков можно прежде всего указать задачи о доминирующих множествах, а также метрические задачи теории деревьев.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Бурков, С. К. Ловецкий. Методы решения экстремальных комбинаторных задач. Изв. АН СССР «Техническая кибернетика», 1968, № 4, 82—93.
2. Herz J.-C. Méthodes exhaustives en combinatoire. «Gestion», 1966, 9, mai.
3. А. Г. Евдокимов, В. И. Уберман. О нахождении деревьев с экстремальными свойствами в графах. Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967, 148.
4. А. Г. Евдокимов, В. И. Уберман. Система признаков для классификации деревьев. Тезисы докладов на Всесоюзной научно-технической конференции «Техническая кибернетика», Москва, 1969.
5. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ, 1962.
6. Ф. Я. Ветухновский. Задачи о покрытиях графа системой окрестностей его вершин. Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 19, Изд-во «Наука», 1967.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕЛЕМЕХАНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ С КАНАЛОМ ПОЛНОЙ РЕТРАНСЛЯЦИОННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

А. Д. Гринченко, В. В. Свиридов
Харьков

В настоящее время широким фронтом ведутся работы по внедрению средств комплексной автоматизации и электронно-вычислительной техники во все отрасли народного хозяйства нашей страны. При этом значительно возросла роль средств передачи телемеханической информации.

Из экономических соображений в условиях промышленных предприятий для образования каналов телемеханики чаще всего использу-