УДК 519.23

НЕОДНОРОДНЫЕ МАРКОВСКИЕ СИСТЕМЫ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

ГЕРАСИН С.Н.

Рассмотрены неоднородные динамические системы без последействия. Приведен алгоритм сведения таких систем к системам меньшей размерности, основанный на процедуре блок-диагонализации матрицы системы уравнений Колмогорова. Это позволяет редуцировать сложные модели к таким, которые имеют меньшие параметры размерностей.

В настоящее время при математическом моделировании различных динамических систем часто приходится иметь дело с неоднородными системами без последействия, параметры которых мало меняются с течением времени. Поведение таких систем хорошо описывается неоднородными процессами Маркова. Изучение различных свойств неоднородных марковских процессов с конечным числом состояний приводит к анализу и решению системы уравнений Колмогорова, например, прямой [1]:

$$\frac{\partial p_{ij}(s,t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(s,t)\lambda_{kj}(t),\ i,k,j = 1,\dots,n, \qquad (1)$$

где $s \le t$. Здесь параметр s фиксирован, поэтому, хотя выражение (1) имеет вид системы в частных производных, по существу — это обычная система дифференциальных уравнений для переходных вероятностей

$$p_{ij}(s,t) = P(\xi(t) = j \mid \xi(s) = i).$$

Коэффициенты матрицы $\Lambda(t) = \|\lambda_{kj}(t)\|$ определяются как производные от коэффициентов матрицы $P(s,t) = \|p_{ij}(s,t)\|$:

$$\Lambda(t) = \lim_{s\to 0}\frac{P(s,t) - P(0,0)}{s}, \qquad P(0,0) = E,$$

где E — единичная матрица. Домножим уравнение системы (1) на вектор начального распределения $p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0$ и просуммируем результат. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_i p_i^0 p_{ij}(s,t)\Big) = \sum_k \Big(\sum_i p_i^0 p_{ik}(s,t)\Big)\lambda_{kj}(t).$$

Сумма в скобках есть безусловная вероятность состояний

$$P_j(s,t) = \sum_i p_i^0 p_{ij}(s,t) = P(\xi(t) = j).$$

Таким образом, приходим к прямой системе Колмогорова для вероятностей состояний. Параметр s, не изменяя общности, можно исключить:

$$p_j'(t) = \sum_k p_k(t)\lambda_{kj}(t). \qquad (2)$$

Система (2), как правило, не разрешима аналитически, но нас будет интересовать поведение ее решения при достаточно больших t. Кроме этого, будем предполагать, что элементы матрицы $\Lambda(t) = (\lambda_{kj})$ меняются медленно, что с физической точки зрения означает близость уравнения (2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для решения таких систем применяется специальная техника асимптотических решений [2]. Запишем (2) в матричном виде:

$$y'(t) = \mathbf{A}_\varepsilon(\xi)\, y(t), \qquad \xi = \varepsilon t, \qquad (3)$$

где ε — малый параметр. Наличие малого параметра ε объясняется тем фактом, что медленно меняющаяся переменная ξ может быть представлена в виде $\xi = \varepsilon \cdot t$. Предположим, что матрица $A_\varepsilon(\xi)$ допускает разложение в асимптотический ряд

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n A_n(\xi), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Пусть существует невырожденная матрица $P_0(\xi)$, такая что

$$P_0^{-1}(\xi)A_0(\xi)P_0(\xi) = B_0(\xi) = \begin{pmatrix} B_0^{11}(\xi) & 0 \\ 0 & B_0^{22}(\xi)\end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $B_0^{11}(\xi)$ имеет собственные значения $\lambda_i^{11}(\xi),\quad i = 1,\dots,r$, не совпадающие с собственными значениями $\lambda_i^{22}(\xi),\quad i = r+1,\dots,n$ матрицы $B_0^{22}(\xi)$. Существование такой матрицы $P_0(\xi)$ гарантируется теоремой Сибуйя о блок-диагонализации матриц [2]. Таким образом, исходная система (3) разбивается на две несвязные системы порядка r и $n - r$.

Рассмотрим преобразование

$$y(t) = P(\xi)Z(t) \qquad (4)$$

и подставим его в уравнение (3)

$$y'(t) = \xi\varepsilon\frac{dP(\xi)}{d\xi}Z(t) + P(\xi)\cdot Z'(t) = A(\xi)P(\xi)Z(t),$$

$$Z'(t) = P^{-1}(\xi)\Big(A(\xi)P(\xi) - \varepsilon\frac{dP(\xi)}{d\xi}\Big)Z(t).$$

Итак, преобразование (4) привело систему (3) к виду $Z'(t) = B(\xi)Z(t)$, где матрица

$$B(\xi) = P^{-1}(\xi)A(\xi)P(\xi) - \varepsilon\frac{dP(\xi)}{d\xi}.$$

Следовательно, матрица $P(\xi)$ определяется из

$$\varepsilon\frac{dP}{d\xi} = A(\xi)P(\xi) - P(\xi)B(\xi)\ . \qquad (5)$$

Будем искать асимптотические представления матриц P и B в виде рядов

$$P(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m P_m(\xi),$$
$$B(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m B_m(\xi), \qquad (6)$$

где $B_m(\xi)$ – блочные диагональные матрицы. Подставив (6) в (5) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

(7)

Здесь

$$\overline{F}_m = \sum_{S=1}^{m-1}(P_S B_{m-S} - A_{m-S}P_S) - A_m P_0 + \frac{dP_{m-1}}{d\xi}.$$

Выбрав матрицы B_0 и P_0 такими, как было указано выше, умножим уравнение (7) на P_0^{-1} слева; получим

$$P_0^{-1}A_0P_m - P_0^{-1}P_mB_0 = P_0^{-1}P_0B_m + P_0^{-1}\widetilde{F}_m,$$
$$B_0 = P_0^{-1}A_0P_0, \quad P_0^{-1}A_0 = B_0P_0^{-1},$$
$$B_0P_0^{-1}P_m - P_0^{-1}P_mB_0 = B_m + P_0^{-1}\widetilde{F}_m,$$

или

$$B_0W_m - W_mB_0 = B_m + F_m\ , \qquad (8)$$

где $W_m = P_0^{-1}P_m$, а $F_m = P_0^{-1}\widetilde{F}_m$.

Для решения системы (8) рассмотрим разбиение матриц W_m и F_m на блоки

$$F_m = \begin{pmatrix} F_m^{11} & F_m^{12} \\ F_m^{21} & F_m^{22} \end{pmatrix}, \quad W_m = \begin{pmatrix} W_m^{11} & W_m^{12} \\ W_m^{21} & W_m^{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь F_m^{11} и W_m^{11} – матрицы размерности $r \times r$. Положив

$$W_m^{11} = W_m^{22} = 0, \quad B_m^{11} = -F_m^{11}, \quad B_m^{22} = -F_m^{22}\ ,$$

приведем систему (8) к виду

(9)

Эти уравнения разрешимы относительно W_m^{12} и W_m^{21} единственным образом, так как матрицы B_0^{11} и B_0^{22} не имеют общих собственных значений [2].

Если матрица A_0 имеет различные собственные значения, то с помощью описанной выше схемы исходную систему можно свести к системе n не связанных друг с другом уравнений типа (9) с диагональной матрицей B, на главной диагонали которой стоят собственные значения $\lambda_1(\xi) \neq \lambda_2(\xi) \neq \ldots \neq \lambda_n(\xi)$. В этом случае решение системы (3) примет вид

$$y(t) = u(\xi)e^{\int_0^t \lambda(\xi)d\xi}, \ \left(u(\xi) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_s(\xi)\right).$$

Если подставить эти выражения в уравнение (3), получим

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$u_0(\xi)\lambda(\xi) = A_0u_0$$
$$\frac{du_i}{d\xi} + \sum_{k=0}^{i}A_k u_{i-k}, \quad i = 1,2,\ldots \qquad (10)$$

Решая эти уравнения последовательно, находим решение, отвечающее простому собственному значению $\lambda(\xi)$. Применяя аналогичную процедуру, находим решение, отвечающее любому собственному числу.

Выводы. Указанная методика дает возможность находить вероятности состояний неоднородного марковского процесса в случае, когда соответствующие параметры системы Колмогорова меняются медленно. Применение данного алгоритма к расчету конкретных динамических систем можно найти в работе [3].

Литература: 1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М.: Мир, 1984. 527 с. 2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 462 с. 3. *Методы* и алгоритмы фокусировки распределений марковских процессов/ Веприк А.Е., Герасин С.Н., Дикарев В.А. и др.// Х.: ХТУРЭ, 1997. 160 с.

Поступила в редколлегию 13.03.98

Герасин Сергей Николаевич, канд. техн. наук, доцент кафедры высшей математики ХТУРЭ. Область научных интересов: теория вероятностей и ее приложения, стохастический анализ, теория процессов Маркова. Адрес: 310166, Украина, Харьков, пр. Ленина, 14, e-mail: hm@kture.ua, тел.: (0572) 40-93-72, (0572) 72-12-38.