УДК 510.62

Д. Э. СИТНИКОВ, Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ВВЕДЕНИИ ПОНЯТИЯ МНОЖЕСТВА

Одной из важных задач теории интеллекта является исследование формирования математических абстракций, которыми оперирует разум человека. Задача состоит в том, чтобы в строгих математических терминах описать те субъективные состояния нашего ума, которые обычно относят к разряду математических абстракций.

Формальное описание математических понятий — это не математическая, а психологическая, психофизическая задача. При решении этой задачи исследователь выступает не как математик, а как физик. Он изучает математическое поведение человека, его психологические, субъективные состояния и процессы, которые обычно относят к математическим понятиям и математической деятельности. Понятие элемента, множества, отношения, функции — это объекты идеальные, продукты работы нашего мозга, поэтому они и должны изучаться психологическими методами.

Методика психофизического изучения субъективных состояний была подробно изложена в работе [1]. Согласно этой методике производится чисто физическое обследование поведения человека (испытуемого). На основе обследования строится математическая модель деятельности испытуемого: законы этой деятельности описываются математически, а из них извлекается математическое описание субъективных состояний человека.

Так как имеется задача формального описания некоторого объекта, мы неизбежно приходим к использованию математического аппарата. Однако не совершим ли мы ошибку порочного круга, используя математические средства для описания математических объектов? Нет, если будем четко и ясно различать предмет исследования и средство, язык исследования. Тогда, как свидетельствует вся история развития науки, порочного круга не будет. Действительно, имеются существенные успехи в области изучения и формального описания закономерностей логического мышления человека, хотя их изучение невозможно без опоры на логическое мышление. На протяжении веков развивалось языкознание, хотя при этом люди в полной мере пользовались и не могли не пользоваться языком.

Необходимый фактический материал для нашего исследования мы будем брать из опытов над испытуемым — человеком, математическая деятельность которого изучается. Итак, есть экспериментатор и испытуемый. Экспериментатор ставит задачу исследования и формирует множество предметов, которые будут предъявлены испытуемому, а также устанавливает порядок предъявления этих предметов. В течение эксперимента он изучает реакции испытуемого и в математической форме описывает замеченные закономерности. Важную роль здесь играет понятие *универсума предметов* — множества всех предметов, которые экспериментатор может предъявить испытуемому. Будем считать, что множество предметов в универсуме конечно.

В качестве первой задачи рассмотрим формирование *универсума элементов* в сознании испытуемого.

Пусть экспериментатор предъявляет испытуемому пару произвольных объектов из имеющегося универсума предметов и предлагает ответить на вопрос: одинаково ли воспринимаются эти объекты или нет? Если испытуемый не может различать предъявленные предметы, он должен ответить утвердительно (1), если он может выявить различие, то ответ должен быть отрицательным (0). Сформулируем следующие законы поведения испытуемого в опытах на совпадение восприятий предметов.

1) Закон однозначности (на любую пару предметов реакция испытуемого однозначна).

2) Закон рефлексивности (на пару, составленную из одинаковых предметов, испытуемый всегда дает положительный ответ).

3) Закон симметричности (изменение порядка предъявления предметов в паре не влияет на характер ответа).

4) Закон транзитивности (если на предъявление пары, состоящей из первого и второго предметов, и пары, состоящей из второго и третьего предметов, испытуемый дает положительный ответ, то он дает положительный ответ и на предъявление пары, состоящей из первого и третьего предметов).

Сформулированные законы запишем в аксиометрической форме. С этой целью используем язык алгебры конечных предикатов [2]. Закон однозначности означает, что испытуемый своим поведением реализует некоторый конечный предикат $E(x, y)$, заданный на универсуме предметов M.

Свойство рефлексивности имеет вид

$$\forall x E(x, x) = 1, \tag{1}$$

свойство симметричности:

$$\forall x \forall y (E(x, y) \Rightarrow E(y, x)) = 1, \tag{2}$$

свойство транзитивности:

$$\forall x \forall y \forall z (E(x, y) \wedge E(y, z) \Rightarrow E(x, z)) = 1. \tag{3}$$

Предикатом эквивалентности назовем любой предмет $\tilde{E}$, заданный на декартовом квадрате произвольного конечного множества M, определяемый для любых $x, y \in M$ равенством

$$E(x, y) = D(f(x), f(y)). \tag{4}$$

где D — предикат равенства, заданный на декартовом квадрате какого-нибудь множества N, символом f обозначена какая-нибудь функция, определенная на множестве M со значениями на множестве N.

Теорема 1. *Для того чтобы предикат E был эквивалентностью, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.*

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем лубую функцию $f{:}M \to N$ и покажем, что предикат E, определяемый равенством (4), обладает требуемыми свойствами. Возьмем произвольно $x \in M$. Тогда, в силу (4), $E(x, x) = D(f(x), f(x)) = 1$. Рефлексивность доказана. Возьмем x, y из M так, что $E(x, y) = 1$. Это означает, в силу (4), что $D(f(x), f(y)) = 1$, или $f(x) = f(y)$. Но $E(y, x) = D(f(y), f(x)) = 1$ в силу сказанного. Значит, предикат E симметричен. Возьмем x, y, z из M так, что $E(x, y) = E(y, z) = 1$. В силу (4) $D(f(x), f(y)) = D(f(y), f(z)) = 1$, откуда $f(x) = f(z)$, или $D(f(x), f(z)) = 1$. Но тогда из (4) следует, что $E(x, z) = 1$. Значит, предикат E транзитивен. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть предикат E обладает заданными свойствами. Покажем, что его можно представить в виде (4). Каждому элементу x из M можно поставить в соответствие множество элементов S_x таких, что для любого $y \in S_x$ $E(x, y) = 1$. Это множество непусто, так как всегда содержит хотя бы один элемент (в силу рефлексивности, например, элемент x). В качестве множества N возьмем множество всех множеств S_x, а в качестве функции

f — функцию, которая ставит в соответствие элементу x множество S_x. Пусть x, y таковы, что $E(x, y)=1$. Покажем, что в этом случае $S_x=S_y$. Пусть $z\in S_x$, тогда $E(x, z)=1$. В силу симметричности $E(y, x)=1$ и в силу транзитивности $E(y, z)=1$, значит, $z\in S_y$. Пусть $z\in S_y$. Тогда $E(y, z)=1$. Но $E(x, y)=1$. Значит, в силу транзитивности, $E(x, z)=1$, следовательно, $z\in S_x$. Мы показали, что из $E(x, y)=1$ следует $S_x=S_y$, а значит и $D(f(x), f(y))=1$. Пусть теперь x, y таковы, что $E(x, y)=0$. Тогда, очевидно, $y\in S_y$, $y\overline{\in} S_x$, следовательно, $S_x\neq S_y$, значит, $D(f(x), f(y))=0$.

Итак, $E(x, y)=D(f(x), f(y))$. Теорема доказана.

Объекты, входящие в состав множества N, интерпретируем как образы предметов, возникающие в сознании испытуемого в ответ на предъявление предметов. Объекты, входящие в состав множества N, назовем *элементами*, а само множество N — *универсумом элементов*. Понятие множества элементов предполагает прежде всего умение различать элементы, отличать их друг от друга. Это различение и производит предикат D. В доказанной выше теореме фигурирует также функция f. Эту функцию будем называть *формирователем* элементов универсума N.

Как для универсума, так и для формирователя f при фиксированном E не обеспечена единственность. Нетрудно привести примеры, когда при выборе различных универсумов элементов и различных формирователей элементов и даже при одинаковых универсумах (и разных формирователях f' и f'') равенство (4) для одного и того же бинарного предиката E остается верным. Возникает опасение, что сильно различающиеся между собой предикаты равенства (заданные на различных универсумах) посредством равенства (4) могут соответствовать одному и тому же предикату E. Если бы это было так, ценность приведенной модели уменьшилась бы. С другой стороны, значение данной модели возросло, если бы удалось показать, что эта модель определяет универсум элементов и предикат равенства на нем по сути единственным образом. Ниже формулируется и доказывается *теорема об изоморфизме* всех предикатов равенства *для предикатов эквивалентности*. Из теоремы непосредственно следует, что все возможные определения универсума элементов, индуцируемые заданным предикатом эквивалентности, по существу идентичны друг другу. Элементы разных вариантов универсума различаются лишь своими обозначениями.

Введем понятие изоморфизма предикатов. Предикаты $P(x_1, x_2, \dots x_r)$ и $P'(x'_1, x'_2, \dots x'_r)$, заданные соответственно на декартовых произведениях $N_1\times N_2\times\dots\times N_r$ и $N'_1\times N'_2\times\dots N'_r$, назовем изоморфными друг другу, если существуют биекции $g_1{:}N_1\to N'_1$, $g_2{:}N_2\to N'_2$, … $g_r{:}N_r\to N'_r$ такие, что $P(x_1, x_2, \dots x_r)\equiv P'(g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_r(x_r))$.

Теорема 2. *Пусть $f{:}M\to N$ и $f'{:}M\to N'$. Тогда из тождества $D(f(x), f(y))\equiv D'(f'(x), f'(y))$ следует, что предикаты равенства D и D' изоморфны друг другу.*

Поскольку предикаты D и D' заданы соответственно на декартовых произведениях $N \times N$ и $N' \times N'$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться в существовании единственной биекции $g: N \rightarrow N'$, для которой выполняется тождество $D(u, v) \equiv \equiv D'(g(u), g(v))$.

Доказательство. Пусть $D(f(x), f(y)) \equiv D'(f'(x), f'(y))$. Рассмотрим отношение $g \subseteq N \times N'$, представляющее собой множество всех пар вида $(f(x), f'(x))$, где x — любой элемент множества M. Покажем, что g — биекция. Пусть $x, y, \in M$ таковы, что $f(x) = f(y)$. Тогда $D(f(x), f(y)) = 1$, следовательно, $D'(f'(x), f'(x)) = = 1$, а значит $f'(x) = f'(y)$. Если же $x, y \in M$ таковы, что $f(x) \neq \neq f(y)$, то $D(f(x), f(y)) = 0$, $D(f'(x), f'(y)) = 0$, $f'(x) \neq f'(y)$. Значит g — вазимно однозначная функция. Но область определения функции g совпадает с множеством N, а область значений — с множеством N'. Итак, g — биекция. Имеем $f'(x) = g(f(x))$, откуда $D(f(x), f(y)) = D'(g(f(x)), g(f(y)))$. Следовательно, для любых $u, v \in N$ $D(u, v) = D'(g(u), g(v))$. Теорема доказана.

Итак, предикат эквивалентности дает нам образец предиката, индуцирующего (с точностью до изоморфизма) предикат равенства на универсуме элементов и тем самым полноценно вводящего универсум элементов.

Интересен следующий вопрос: можно ли ввести универсум элементов на базе какого-нибудь предиката, отличного от предиката эквивалентности. Оказывается, можно, и таким предикатом может быть предикат дифункциональности. *Предикатом дифункциональности* G, заданным на декартовом квадрате произвольного конечного множества M, назовем любой предикат, определяемый для произвольных $x, y \in M$ равенством

$$G(x, y) = D(f_1(x), f_2(y)). \tag{5}$$

Здесь D — предикат равенства, заданный на декартовом квадрате какого-нибудь множества N. Символами f_1 и f_2 обозначены какие-нибудь функции, определенные на множестве M со значениями на множестве N.

Предикат G, заданный на $M \times M$, назовем *квазитранзитивным*, если для любых $x, x_1, y, y_1 \in M$ из условия $G(x, y_1) = G(x_1, y_1) = = G(x_1, y) = 1$ следует $G(x, y) = 1$.

В дальнейшем будем рассматривать только предикаты, которые удовлетворяют условиям

$$\forall x \exists y G(x, y) = 1, \ \forall y \exists x G(x, y) = 1. \tag{6}$$

Справедлива следующая *теорема об условиях существования дифункционального предиката.*

Теорема 3. *Для того, чтобы предикат G был дифункциональным, необходимо и достаточно, чтобы он обладал свойством транзитивности и удовлетворял условиям* (6).

Доказательство. *Необходимость.* Выберем произвольно функции f_1 и f_2 и докажем, что предикат G, заданный равенством

(5), обладает свойством квазитранзитивности. Пусть x, x_1, y, y_1 таковы, что $G(x, y_1)=G(x_1, y_1)=G(x_1, y)=1$. Тогда, в силу (5), $f_1(x)=f_2(y_1)$, $f_1(x_1)=f_2(y_1)$, $f_1(x_1)=f_2(y)$, откуда $f_1(x)=f_2(y)$, или $D(f_1(x), f_2(y))=1$. Значит, и $G(x, y)=1$. Покажем теперь, что выполнены условия (6). Действительно, возьмем произвольно $x \in M$. В множестве N ему соответствует элемент $f_1(x)$. Функция f_2 действует из M на N, значит, для элемента $f_1(x)$ найдется такой $y \in M$, что $f_1(x)=f_2(y)$. Но $D(f_1(x))=1 \Rightarrow G(x, y)=1$. Аналогично доказывается второе условие.

Достаточность. Произвольно возьмем квазитранзитивный предикат G на $M \times M$, удовлетворяющий условиям (6), и покажем, что для него всегда найдутся функции f_1 и f_2, обеспечивающие выполнение равенства (5). Для каждого элемента x, взятого из множества M, существует непустое (в силу условий (6)) множество Q_x всех y таких, что $G(x, y)=1$. Покажем, что если $Q_x \cap Q_{x1} \neq \varnothing$, то $Q_x = Q_{x1}$. Действительно, если $Q_x \cap Q_{x1} \neq \varnothing$, то существует y_1 такой, что $y_1 \in Q_x$ и $y_1 \in Q_{x1}$. Отсюда следует $G(x, y_1)=G(x_1, y_1)=1$. Далее, если $y \in Q_{x1}$, то $G(x_1, y)=1$, и по свойству квазитранзитивности предиката G получаем $G(x, y)=1$, т. е. $y \in Q_x$. Если же $y \in Q_x$, то $G(x, y)=1$, и, в силу квазитранзитивности, имеем $G(x_1, y)=1$, т. е. $y \in Q_{x1}$. Мы показали, что $Q_x = Q_{x1}$.

Для любого y из M существует непустое (опять в силу условий (6)) множество S_y всех x из M, удовлетворяющих условию $G(x, y)=1$. Для любых x_1 и x_2, взятых из множества S_y, имеем $y \in Q_{x1}$ и $y \in Q_{x2}$, иными словами, $y \in Q_{x1} \cap Q_{x2}$. Это значит, что $Q_{x1} \cap Q_{x2} \neq \varnothing$, поэтому, согласно доказанному ранее $Q_{x1}=Q_{x2}$. Таким образом, любому элементу x из множества T_y соответствует одно и то же множество Q_x. Обозначим множество Q_x символом T_y, т. е. положим $Q_x = T_y$. Это корректно, поскольку множество Q_x в данном случае не зависит от выбора x, однако зависит от выбора y. Таким образом, любой элемент y из множества M однозначно определяет множество T_y. Заметим, что $y \in T_y$, поскольку $y = Q_x$.

Определим функции f_1 и f_2 следующим образом: $f_1(x)=Q_x$, $f_2(y)=T_y$. Прежде всего покажем, что области значений этих функций совпадают. Действительно, для любого T_y существует Q_x такое, что $Q_x = T_y$ (по определению T_y). Обратно, для любого Q_x (в силу того, что $Q_x \neq \varnothing$) существует $y \in Q_x$, значит, существует T_y такое, что $T_y = Q_x$ (опять по определению T_y). Пусть $G(x, y)= =1$. Тогда $x \in S_y$, значит, $Q_x = T_y$, откуда $D(f_1(x), f_2(y))=1$. Пусть теперь $G(x, y)=0$. Покажем, что в этом случае $Q_x \neq T_y$. Предположим противное, т. е. $Q_x = T_y$. Поскольку $y \in T_y$, то $y \in Q_x$, а это означает, что $G(x, y)=1$. Но это неверно, следовательно, $Q_x \neq T_y$, значит $D(f_1(x), f_2(y))=0$. Мы показали, что $G(x, y) \equiv D(f_1(x), f_2(y))$. Теорема доказана.

Ниже формулируется и доказывается *теорема об изоморфизме* всех предикатов равенства *для предиката дифункциональности.* Из теоремы непосредственно следует, что все возможные определения универсума элементов, индуцируемые заданным предикатом дифункциональности, по существу идентичны друг другу. Элементы разных вариантов универсума различаются лишь своими обозначениями.

Теорема 4. *Пусть $f_1, f_2: M \to N$ и $f_1', f_2': M \to N'$. Тогда из тождества $D(f_1(x), f_2(y)) \equiv D'(f_1'(x), f_2'(y))$ следует, что предикаты равенства D и D' изоморфны друг другу.*

Доказательство. Пусть $D(f_1(x), f_2(y)) \equiv D'(f_1'(x), f_2'(y))$. Рассмотрим отношение $g_1 \subseteq N \times N'$, представляющее собой множество всех пар вида $(f_1(x), f_1'(x))$, где x — любой элемент из M. Покажем, что отношение g_1 есть функция. Для этого возьмем произвольно $a \in M$. Пусть x_1, x_2 из M таковы, что $f_1(x_1) = f_1(x_2) = a$. Тогда существует $y \in M$ такой, что $f_2(y) = a$. Следовательно, $f_1(x_1) = f_2(y)$ и $f_1(x_2) = f_2(y)$. Это означает, что $D(f_1(x_1), f_2(y)) = D(f_1(x_2), f_2(y)) = 1$, откуда $D(f_1'(x_1), f_2'(y)) = D(f_1'(x_2), f_2'(y)) = 1$. Тогда $f_1'(x_1) = f_1'(x_2)$. Мы доказали, что из равенства первых элементов пар $(f_1(x), f_1'(x_1))$ и $(f_1(x_2), f_2'(x_2))$ вытекает равенство вторых элементов этих пар. Аналогично доказывается, что отношение g_1^{-1} тоже функция. Область определения функции g_1 совпадает с N, а область ее значений — с N^1. Следовательно, g_1 есть биекция.

Построим теперь отношение $g_2 \subseteq N \times N'$, представляющее собой множество всех пар вида $(f_2(y), f_2'(y))$, где y — любой элемент из M. Тот факт, что g_2 — биекция, доказывается аналогично. Покажем, что $g_1 = g_2$. Пусть $x, y \in M$ таковы, что первые элементы в парах $(f_1(x), f_1'(x))$ и $(f_2(y), f_2'(y))$ совпадают: $f_1(x) = f_2(y)$. Тогда получим $D(f_1(x), f_2(y)) = 1$, откуда $D(f_1'(x), f_2'(y)) = 1$. Следовательно, $f_1'(x) = f_2'(y)$. Из равенства первых элементов в парах следует равенство вторых элементов. Следовательно, $g_1 = g_2 = g$. Существование биекции g такой, что $D(u, v) \equiv D'(g(u), g(v))$, доказано. Теорема доказана.

Итак, предикат дифункциональности также с точностью до изоморфизма индуцирует предикат равенства на универсуме элементов. Заметим, что предикат эквивалентности является частным случаем предиката дифункциональности, когда $f_1 = f_2$.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Проблемы и перспективы//Рук. деп. в ВИНИТИ, № 3324—82. 210 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Математические средства. Х., 1984. 114 с.

Поступила в редколлегию 21.01.87