Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
З дисципліни
“ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ”

Всі цитати, цифровий, фактичний матеріал та бібліографічні відомості перевірені, написання одиниць відповідає стандартам

РЕКОМЕНДОВАНО
науково-методичною
радою університету.
Протокол №
від “27” “________”

Упорядники: В.В. Кирій
Н.І. Фастова

Відповідальний випусковий: В.О.Тімофєєв

Начальник методичного відділу І.О. Мілютченко
Начальник КВВ ННВПЦ Б.П. Косіковська

Поз.

Харків 2014

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

В.В. Кирій, Н.І. Фастова

“ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ”

Харків 2014

УДК 621. 396. 931

Кирій В.В., Фастова Н.І. Прикладні задачі моделювання економічних процесів: Навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 209с.

ISBN 000-000-000-0

У навчальному посібнику викладено основні закономірності та методи застосування математичних моделей в теоретичних дослідженнях та прикладних задачах економічної діяльності підприємств. Розглянуто елементи теорії випадкових процесів та її застосування в прикладних задачах; аналіз та моделювання соціально-економічних процесів на основі теорії марківських процесів; управління економічними системами на базі теорії мереж; теорія нечітких множин та її застосування в прикладних задачах; основи теорії нечіткої логіки, теорії управління запасами.

Рекомендується студентам денної та заочної форм навчання спеціальностей напрямку “Економічна кібернетика”.

Іл. 78. Табл. 16. Бібліогр. наймен. 23.

Рецензенти:

В.Б.Родченко, д-р екон. наук, проф., завідуючий кафедрою «Маркетингу та менеджменту ЗЕД» ХНУ ім. В.Н. Каразіна;

Т.П. Близнюк, канд. екон. наук., доц. каф. Менеджменту ХНЕУ.

ISBN 000-000-000-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Напрям математичного моделювання економічних процесів став у сучасній економічній науці одним з найважливіших напрямків розвитку економічної теорії і вдосконалення інструментарію прийняття рішень в управлінні об'єктами і ситуаціями у економічних та фінансових системах. Основна мета дисципліни "Прикладні задачі моделювання економічних процесів" – дати можливість майбутнім спеціалістам, які обрали застосування математичних методів в економіці своєю професією, навчитися застосовувати методологію, методику та інструментарій економіко-математичного моделювання у теоретичних дослідженнях та використовувати здобуті знання у практичній діяльності.

Важливим при цьому надати допомогу їм утвердитися у позиції провідної ролі математичного моделювання в економічній науці та господарській практиці, синтезу економічних та математичних знань.

ТЕМА 1. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ АНАЛІЗУ ТА ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1 Проблематика використання математичних моделей в дослідженні економічних систем

1.2 Основні дефініції математичного моделювання

1.1 Проблематика використання математичних моделей в дослідженні економічних систем

Управління будь-якою системою реалізується як процес, який підпорядковується певним закономірностям. Знання цих закономірностей допомагає визначити умови необхідності та достатності успішного протікання окремого процесу. Для цього всі параметри, що характеризують процес, і зовнішні умови, повинні бути кількісно визначеними. Отже, економіко-математичне моделювання – кількісне обґрунтування прийняття рішень відносно організаційного управління.

Сучасна економічна наука як на мікро-, так і на макрорівнях у своїх практичних дослідженнях широко використовує наявний інструментарій математичних методів для формалізованого опису існуючих стійких кількісних характеристик та закономірностей розвитку соціально-економічних систем.

Під соціально-економічною системою розуміємо складну імовірнісну динамічну систему, яка містить процеси виробництва, обміну, розподілу та споживання матеріальних й інших благ. Її відносять до класу кібернетичних, тобто керованих систем. Багатокомпонентність і велика розмірність систем, зокрема соціально-економічних, може значно ускладнити процес відображення мети та обмежень в аналітичному вигляді. Тому виникає необхідність у проведенні процедури зменшення реальної розмірності задачі до таких меж, які б із достатнім ступенем точності адекватно відобразили реальну дійсність. Незважаючи на велике число змінних і обмежень, які на перший погляд слід враховувати в процесі аналізу реальних ситуацій, лише невелика їх частина виявляється суттєвою для опису поведінки досліджуваних систем. Тому при виконанні процедури спрощення опису реальних систем, на основі якої буде побудована модель, насамперед необхідно ідентифікувати домінуючі змінні, параметри та обмеження.

Схематичне зображення рівнів абстракції, відповідно до процедури процесу переходу від системи-оригіналу до її моделі представлено на рис. 1.1.

Прообраз реальної системи відрізняється від системи-оригіналу тим, що в ньому відображено лише домінуючі чинники (змінні, їх параметри й обмеження), які визначають генеральну стратегію поведінки реальної системи. Модель, яка буде прообразом реальної системи, є найбільш суттєвою для опису системи співвідношення у вигляді цільової функції та сукупності обмежень.

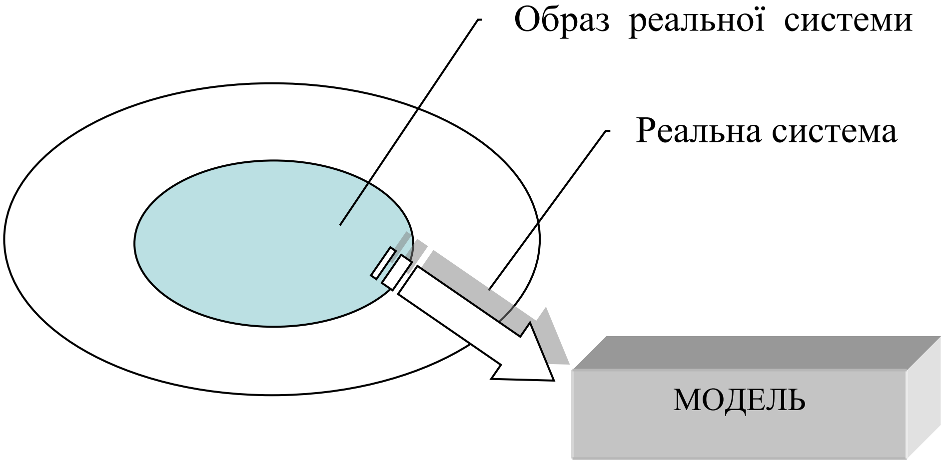


Рисунок 1.1 – Абстрактне зображення рівнів системи

Єдиного визначення категорії системи не існує. У своїх дослідженнях ми будемо використовувати таку дефініцію: системою називається сукупність взаємозв'язаних структурних елементів, які сумісно реалізують визначені цілі. Множину елементів, що досліджується, можна розглядати як систему, якщо виконуються такі чотири ознаки:

- цілісність системи, тобто незвідність її властивостей до суми властивостей складових елементів системи;
- наявність мети та критерію дослідження множини елементів;
- наявність більш структурно-логічної, зовнішньої у відношенні до досліджуваної системи, називаної «середовищем»;
- можливість виділення в описуваній системі взаємозв'язаних частин (підсистем).

З поняттям системи тісно корелюють категорії надсистеми і підсистеми.

Надсистема – середовище, яке оточує систему і в якому вона функціонує.

Підсистема – підмножина елементів, що реалізують цілі, узгоджені з цілями системи.

Існує декілька підходів математичного опису складної системи. Найбільш загальним і доступним є теоретико-множинний підхід, при якому система **S** представляється відношенням S € X x У**,** де, відповідно, *X і У* – вхідні та вихідні об'єкти системи.

Предметом нашого дослідження буде економічна система, процесам функціонування якої властиві кількісні та якісні характеристики. До якісних характеристик віднесемо, наприклад, податкову реформу, приватизацію власності, радикальну перебудову зовнішньої діяльності, зміну інфраструктури, реформу аграрного сектора тощо.

Якісні характеристики економічної системи тісно пов'язані зі структурними зсувами в економіці. У свою чергу кількісні характеристики охоплюють множину тих питань, які корелюють з регулюванням ринкової кон'юнктури, використанням фінансових і матеріальних ресурсів, вибором оптимальних технологічних способів виробництва, структури портфеля цінних паперів, оптимальних стратегій бізнес-планів та ін.

Кількісний аспект оцінки функціонування економічної системи на мікро- і на макрорівнях ґрунтується на використанні інструментарію математичних методів.

Використання кількісних методів в економічних дослідженнях дає можливість, по-перше, виділити та формально описати найбільш важливі й суттєві закономірності функціонування економічних систем і об'єктів у вигляді моделей.

По-друге, на основі сформульованих за певними правилами логіки вхідних даних і співвідношень, методами дедукції зробити висновки, які адекватні до об'єкта дослідження стосовно зроблених припущень.

По-третє, математичні методи дають можливість отримати дедуктивним шляхом нові дані про об'єкт дослідження.

По-четверте, використання мови математики дозволяє компактно описати основні положення економічної теорії, сформулювати їх змістовний апарат і робити відповідні висновки.

1.2. Основні дефініції математичного моделювання

У ринкових умовах господарювання економіко-математичні методи стають важливим інструментом отримання більш глибоких і повних знань про кількісні та якісні сторони економічного механізму тих чи інших процесів і явищ.

Внутрішньою характеристикою раціонального керування господарського комплексу та його складників є **оптимальність**, тобто вибір із множини можливих варіантів економічного розвитку такого, який дає можливість найефективніше використовувати наявні виробничі, фінансові та інші ресурси.

З позиції оптимального планування та керування, підприємство або структурний підрозділ розглядається як система, в якій комплексно відображаються технологічні, економічні та організаційні взаємозв'язки керованого об'єкта, а також його складників.

Оптимальні плани виробничих та господарських структур повинні забезпечувати балансовий взаємозв'язок завдань для випуску продукції з виробничими та фінансовими ресурсами, які є в наявності. Наступне завдання оптимального планування – ефективне використання виробничих, фінансових та інших ресурсів при дотриманні оптимальних структурних пропорцій.

З оптимальним планом безпосередньо взаємодіє поняття **економіко-математичної моделі**, яка є концентрованим виразом існуючих взаємозв'язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи в математичній формі і складається із сукупності пов'язаних між собою математичних залежностей у вигляді формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов та факторних величин, всі або частина яких має економічний зміст. За своїм призначенням в економіко-математичних моделях ці фактори доцільно поділити на параметри та характеристики (рис. 1.2).

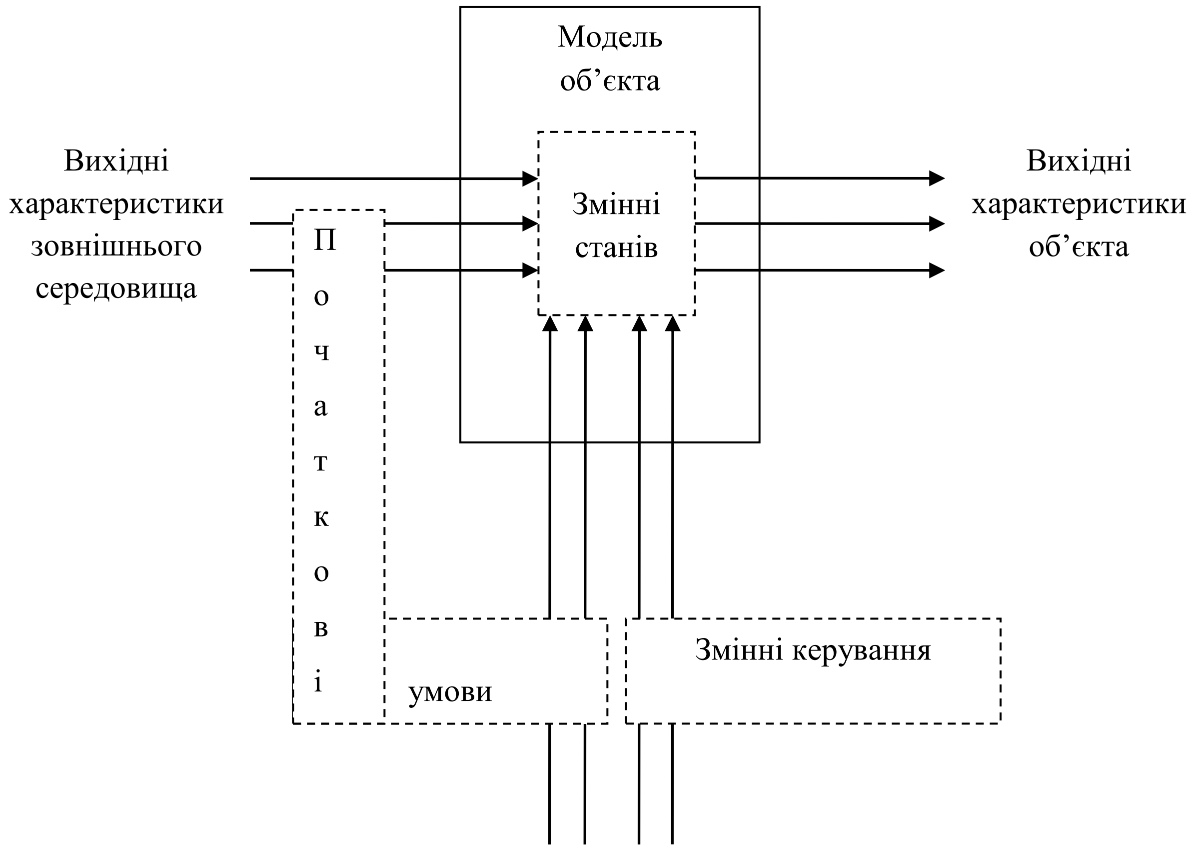


Рисунок 1.2 – Класифікація чинників

При цьому параметрами об’єкта називають фактори, які характеризують властивості об’єкта або його складників. В процесі дослідження об’єкта ряд параметрів може змінюватися, тому їх називають змінними, які, в свою чергу, поділяються на змінні стану та змінні керування. Вхідними характеристиками є змінні стану об’єкту, а вихідними характеристиками – безпосередньо кінцеві результати функціонування об’єкта. Відповідно, характеристики зовнішнього середовища описують його властивості, які впливають на процес та результат функціонування об'єкта. Значення ряду факторів, що визначають початковий стан об'єкта або зовнішнього середовища, називаються початковими умовами.

Отже, **моделювання – процес побудови моделі**, за допомогою якого вивчається функціонування об'єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб'єкта, об'єкта дослідження та моделі, з допомогою якої суб'єкт пізнає об'єкт.

Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об'єкт, який у процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт. Іншими словами, модель – умовне зображення об'єкта, що певною мірою адекватно описує його функціональні характеристики, які істотно важливі для поставленої мети дослідження. Разом із тим, можна сказати, що модель – це інструмент кількісного аналізу певних явищ, крім того, вони розвивають інтелект і дають багато корисного для прийняття рішень.

У визначенні моделі можна визначити декілька важливих моментів:

- модель може бути матеріальним об'єктом або абстрактним представленням, і, як наслідок, конкретне втілення моделі не буде суттєвим для мети моделювання;
- основна властивість моделі – здатність представити об'єкт при дослідженні його властивостей;
- моделлю може бути тільки така структура, яка дозволить отримати на її основі більш повну інформацію, в порівнянні з безпосереднім дослідженням об'єкта.

Загальне схематичне зображення основних етапів процесу моделювання показано на рис. 1.3.

Розрізняють фізичне та математичне моделювання. Математичне моделювання – універсальний та ефективний інструмент пізнання внутрішніх закономірностей, властивих явищам і процесам. Воно дає можливість вивчити кількісні взаємозв'язки, взаємозалежності системи, щ моделюється та вдосконалити її подальший розвиток і функціонування з допомогою математичної моделі.

Рисунок 1.3 – Основні складові процесу моделювання

Математичну модель розуміємо як формалізований, тобто представлений математичними співвідношеннями, набір правил, що описують фактори суттєвого впливу на функціонування об'єкта дослідження.

Отже, математична модель є системою математичних формул, нерівностей або рівнянь, які більш-менш адекватно описують явища та процеси, що властиві для оригіналу.

Тому процес побудови та використання математичної моделі для її розв'язання з допомогою прикладних задач називається математичним моделюванням.

Опис математичної моделі виконується термінами кількісних характеристик-показників (змінних, невідомих), значення яких підлягає визначенню в процесі розв'язку задачі та параметрів, величини котрих апріорно відомі.

Моделювання служить передумовою та інструментом аналізу економіки і процесів, які функціонують у ній, а також використовуються як засіб обґрунтування прийняття рішень, прогнозування, бізнес-планування та керування економічними об'єктами. Модель економічного об'єкта переважно підтримується реальними статистичними та емпіричними даними, а результати розрахунків, виконані в межах побудованої моделі, дають можливість будувати прогнози на майбутнє та давати об'єктивні оцінки корисності об'єктів дослідження.

Перевага математичного моделювання очевидна: вона полягає у можливості отримати інформацію про об'єкт вивчення без проведення дійсних експериментів. А це, в свою чергу, виправдовує витрати на розробку алгоритмів і методів розв'язання поставлених задач.

Моделювання має багатовекторний характер і його доцільно застосовувати в таких випадках:

- об'єкт недоступний для безпосереднього дослідження;
- об'єкт настільки складний, що дослідження його втрачає сенс через складність самого дослідження, або ж через наявність великої кількості побічних для даного дослідження факторів;
- дослідження на реальному об'єкті неможливі з деяких міркувань (моральних, фінансових або конкурентних).

Моделюючи конкретну ситуацію, аналітик має з' ясувати, наскільки чітко й точно модель відображає реальну дійсність і надійність отриманих кількісних оцінок.

Найбільш важливими моделями, що використовуються при дослідженні розвитку та функціонування економічних процесів є математичні. Будь-яка модель задачі дослідження окремого класу включає в себе змінні, систему обмежень і мету. Мета – це цільова функція, яка задається на множині допустимих розв'язків D. Сама множина D виражає міру досягнення мети: якщо D – пуста множина, то розв'язків не існує; якщо D – одна точка, то ця точка буде єдиним допустимим розв'язком задачі, який не представляє собою для нас інтересу; якщо D містить більше одного розв'язку, то задача оптимізації полягає у знаходженні оптимального розв'язку на множині допустимих. Внаслідок цього всі моделі є спрощеним відображенням реальної системи, але якщо цей процес виконано коректно, то отримане наближене відображення реальної ситуації дає можливість мати достатньо точні характеристики об'єкта дослідження.

Економіко-математичні моделі не створюють нових і не змінюють існуючих принципів та методологічних основ економічної теорії, вони змінюють способи їх використання для всебічного кількісного та якісного аналізу закономірностей і взаємозв'язків економічних процесів.

Отже, процес моделювання тісно пов'язаний із множиною процедур, а саме: вибором цільової функції, змінних, параметрів, форм зв'язку та іншими. Тому при побудові економіко-математичної моделі слід вміло володіти такими поняттями: критерієм оптимальності, цільовою функцією, системою обмежень, рівняннями зв'язку, розв'язком моделі.

Критерієм оптимальності називається деякий показник, який має економічний зміст та служить способом формалізації конкретної мети керування і виражається за допомогою цільової функції через фактори моделі. Критерій оптимальності визначає розуміння змісту цільової функції. У деяких випадках в якості критерію оптимальності може виступати одна із вихідних характеристик об'єкта моделювання.

Цільова функція математично зв'язує між собою фактори моделі, і її значення визначається значеннями цих величин. Змістовне тлумачення цільовій функції надає тільки критерій оптимальності.

Змінні в моделях класифікуються як змінні стану, росту, додаткові та керовані.

Змінні стану визначають або допомагають визначити стан системи в будь-який момент часу. Прикладом таких змінних можуть бути обсяги продажу і прибуток.

Змінні росту – характеристики, що описують процес, який протікає в системі в заданий момент часу. Досліджуваний процес можна кваліфікувати або як перетворення, або як переміщення.

Додаткові змінні допомагають глибше вивчити об'єкт, а в окремих випадках спрощують співставлення результатів дослідження.

Керовані змінні – входи моделі, значення яких змінюється в часі незалежно від поведінки об'єкта дослідження. Зростання обсягів виробництва – результат керування зі сторони зовнішнім середовищем, дію якого на окремих стадіях можна розглядати як постійну величину. Керовану змінну можна представити як функцію від часу.

Параметри та константи – це незалежні від часу економічні показники та нормативні коефіцієнти, які характерні для об'єкта і включаються до моделі через систему обмежень.

Система обмежень визначає границі існування області дійсних та допустимих розв'язків і характеризує основні зовнішні та внутрішні властивості об'єкта. Обмеження визначають область відбуття процесу, границі зміни параметрів та характеристик об'єкта.

Рівняння зв'язку являються математичною формалізацією системи обмежень. Між поняттями «**система обмежень**» та «**рівняння зв'язку**» існує аналогія, як між поняттями «критерій оптимальності» та «цільова функція»: різні за змістом обмеження можуть описуватися однаковими рівняннями зв'язку, а одне і те ж саме обмеження в різних моделях може записуватись різними рівняннями зв'язку.

Таким чином, саме критерій оптимальності та система обмежень в першу чергу визначають концепцію функціонування майбутньої математичної моделі, її концептуальну модель, а їх формалізація, тобто побудова цільової функції та рівнянь зв'язку, представляють собою математичну модель.

Розв'язком математичної моделі називається такий набір (сукупність) значень змінних, які задовольняють її рівняння зв'язку. Розв'язки, які мають економічний зміст, називаються структурно допустимими. Моделі, які мають багато розв'язків, називаються варіантними на відміну від без варіантних, які мають один розв'язок. Серед структурно допустимих варіантних розв'язків моделі, як правило, знаходиться один розв'язок, при якому цільова функція в залежності від змісту моделі має найбільше або найменше значення. Такий розв'язок, як і відповідне значення цільової функції, називається оптимальним**.**

Для того, щоби моделювання стало дієвим інструментом пізнання, необхідно правильно побудувати математичну модель, адекватну процесу, що вивчається.

Найчастіше математичні методи використовують для вирішення класичних задач оптимізації, імітації чи прогнозування. При цьому, основні труднощі, подолати які необхідно, полягають у забезпеченні адекватності цієї моделі до об'єкта дослідження.

Адекватність побудованих математичних моделей необхідно оцінювати з урахуванням таких чинників (рис. 1.4):

- відповідності структури та властивостей об'єкта керування (процесу управління);
- відповідності властивостей і можливостей методів формування інформаційної бази моделей, виконання їх на основі процедури імітації;
- відповідності до вимог розв'язання управлінських задач.

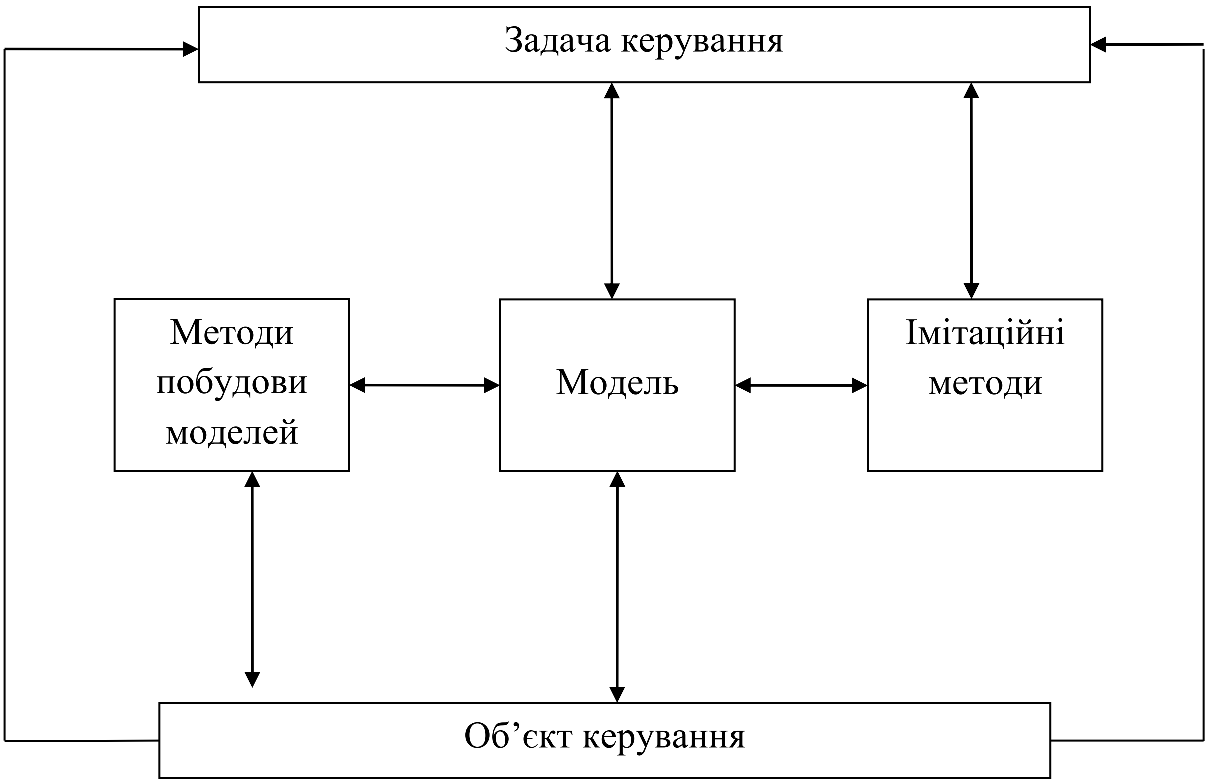


Рисунок 1.4 – Формування вимог адекватності моделей

Контрольні запитання і завдання

1. Що розуміється під соціально-економічною системою?
2. Поясніть чим відрізняється прообраз реальної системи від системи-оригіналу.
3. Охарактеризуйте фактори економіко-математичних моделей.
4. У чому полягають переваги та недоліки математичного моделювання?
5. Надайте визначення поняттям: критерієй оптимальності, цільова функція, система обмежень, рівняння зв'язку, розв'язок моделі.

ТЕМА 2. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ І ЗАСОБІВ КІЛЬКІСНОГО АНАЛІЗУ ТА МОДЕЛЮВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

2.1 Загальна класифікація економіко-математичних моделей

2.2 Принципи та етапи побудови економіко-математичних моделей

2.1 Загальна класифікація економіко-математичних моделей

У прикладних дослідженнях економічних процесів і явищ використовуються різні типи моделей, які відрізняються цільовим призначенням, характером задачі, ступенем адекватності, математичним апаратом тощо. Побудова єдиної математичної моделі функціонування будь-якої економічної системи або її складових практично не представляється можливим без розробки допоміжних моделей, тобто певного комплексу моделей.

Вид і характер економіко-математичних моделей визначається взаємозв'язками та взаємозалежностями економічних систем. Взаємозв'язки одних систем можна описати на основі лінійних рівнянь і нерівностей, других – на основі рівнянь і нерівностей більш високих порядків і т.д.

В основу класифікації економіко-математичних моделей покладено такі ознаки:

- за цільовим призначенням – теоретико-аналітичні та прикладні моделі;
- за ступенем агрегування об'єктів – макроекономічні та мікроекономічні моделі;
- за конкретним призначенням – балансові, трендові, оптимізаційні, імітаційні моделі;
- за типом інформації, що використовується в моделі – аналітичні та ідентифіковані моделі;
- з урахуванням фактора невизначеності – детерміновані та стохастичні моделі;
- за характером математичного апарату – матричні моделі, моделі лінійного та нелінійного програмування, кореляційно-регресійні моделі, моделі теорії масового обслуговування, моделі сіткового планування та керування, моделі теорії ігор і т.п.;
- за типом підходу до систем, які досліджуються – дескриптивні (описові) моделі (наприклад, балансові та трендові моделі) та нормативні моделі (оптимізаційні та моделі рівня життя);
- за структурою моделей та характером їх складових одно та багатофакторні моделі, статичні та динамічні моделі, моделі простої та складної структури;
- за часовими характеристиками – довготермінові, середньотермінові та короткотермінові моделі.

До числа складної комбінованої економіко-математичної моделі, наприклад, можна віднести економіко-математичну модель міжгалузевого балансу, яка є за вищенаведеною класифікацією прикладною, макроекономічною, аналітичною, дескриптивною, детермінованою, балансовою, матричною моделлю. Окрім того, розрізняють як статичні, так і динамічні моделі.

Враховуючи вище сформульовані класифікаційні ознаки, представимо загальну схему математичних моделей, які в подальшому складуть основу моделювання економічних процесів (рис. 2.1).

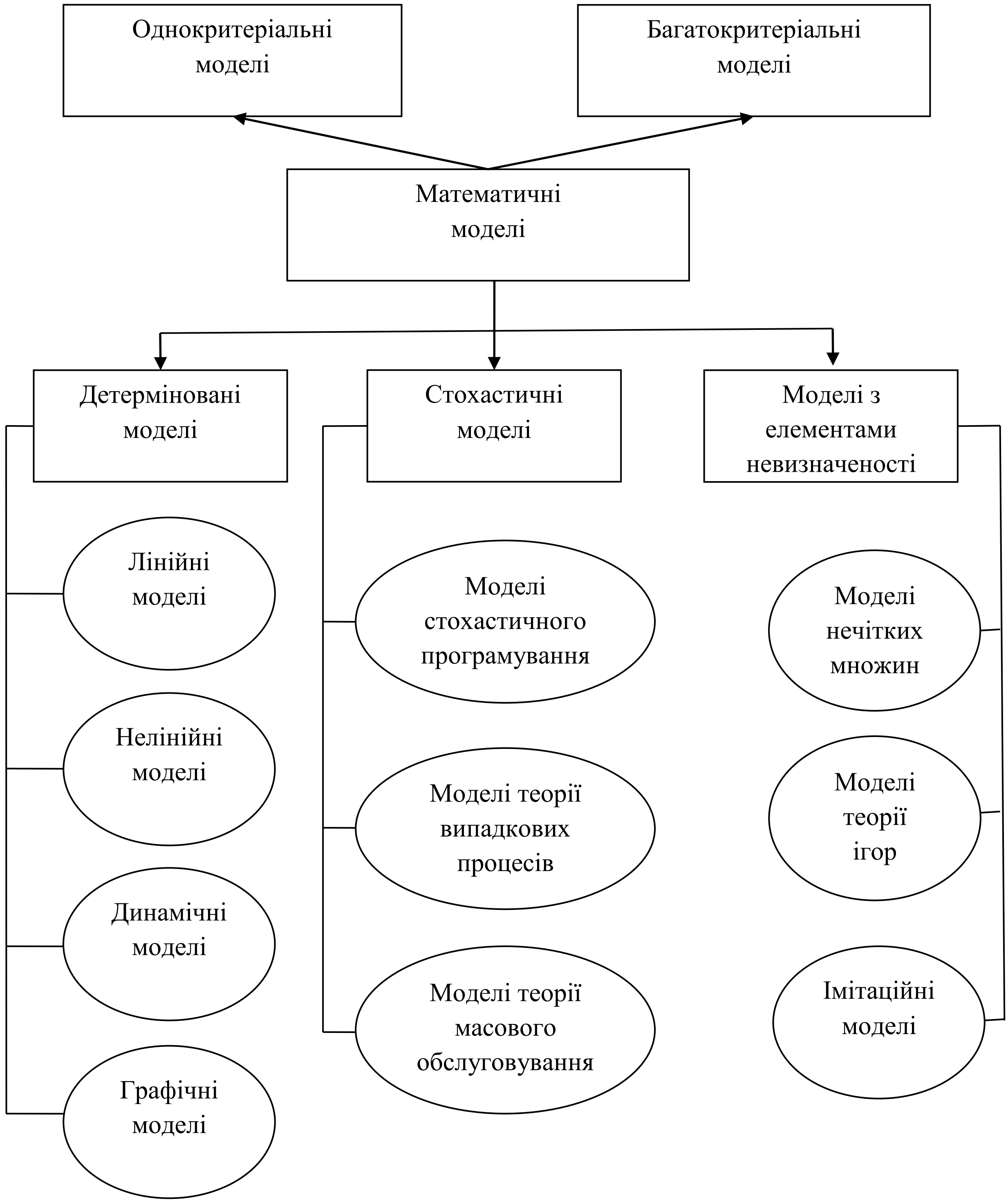


Рисунок 2.1 – Схема класифікації математичних моделей

2.2 Принципи та етапи побудови економіко-математичних моделей

Для побудови як комплексу взаємозв'язаних економіко-математичних моделей, так і будь-якої окремої моделі, необхідна певна сукупність принципів (правил гри), які дають можливість коректно здійснювати процес формалізації моделюючих систем та об'єктів.

Загальні принципи економіко-математичного моделювання випливають із загальних основ системного аналізу, тобто вони повинні бути відповідями на запитання:

1) що повинно бути зроблено?
2) Коли повинно бути зроблено?
3) З допомогою кого повинно бути зроблено?
4) На основі якої інформації здійснюються відповідні дії?
5) Який результат повинен бути отриманий на основі цих дій?

Тому в якості загальних принципів економіко-математичного моделювання доцільно прийняти такі принципи: системності, інтегрованості, невизначеності, достатності, інваріантності, наступності та ефективності.

Дуже важливим із точки зору практичного використання комплексу моделей є принцип **ефективності реалізації**. Для його виконання необхідно, щоб кожна модель могла бути реалізована з допомогою сучасних програмних та технічних засобів. З другої сторони, виконання такого принципу вимагає забезпечення відповідної точності вхідних даних, точності розв'язку задачі і тієї точності висновкової інформації, яка достатня для досягнення практичних цілей.

Рисунок 2.2 – Етапи моделювання

Наведені принципи дають можливість будувати довільну окрему модель функціонування економічних систем і гарантують можливість її повної сумісності з іншими економіко-математичними моделями.

Процедуру побудови моделі та підготовку управлінського рішення на основі економіко-математичних методів можна представити з допомогою ряду взаємозв'язаних етапів, хоча в конкретних випадках деякі етапи можуть опускатися, а ряд процедур для побудови моделі – вестись паралельно.(рис.2.2)

1.Постановка задачі та формулювання мети дослідження**.**

Даному етапу передує виникнення проблемних ситуацій, усвідомлення яких призводить до необхідності їх узагальнення або вирішення для майбутнього досягнення певного ефекту. Основу етапу складає комплексний аналіз функціонування об'єкта дослідження, виявлення його проблемних місць. Далі йде опис найбільш характерних властивостей об'єкта, вивчення його структури та взаємозв'язків. Тут важливим моментом є формулювання гіпотез щодо поведінки та розвитку об'єкта. Завершується досліджуваний етап описом поставлених завдань у вигляді задачі та сформульованої мети дослідження з допомогою критерію чи критеріїв ефективності.

2. Побудова концептуальної (формалізованої) моделі.

Базовою основою для побудови моделі об'єкта є його концептуальна модель. Під концептуальною моделлю об'єкта розуміємо сукупність якісних залежностей критеріїв оптимальності і різного роду обмежень від факторів, суттєвих для адекватного відображення функціональних характеристик об'єкта. На другому етапі відбувається формалізація існуючої економічної проблеми, яка полягає у вираженні її з допомогою математичної символіки через відповідні залежності та відношення. Як результат, на завершення етапу ми отримуємо математичну задачу, яка має цільову функцію та відповідну систему обмежень.

Концептуальна модель відображає основні елементи:

– умови функціонування об'єкта, визначені характером взаємодії між об'єктом і його оточенням, а також між елементами об'єкта;

– мету дослідження об'єкта та напрямок покращення його функціонування;

– можливості керування об'єктом, визначення складу керованих змінних об'єкта.

У процесі формулювання концептуальної моделі об'єкта можуть виникати такі проблеми:

– побудова спрощеного і в той же час адекватного поставленій меті дослідження сценарію функціонування об'єкта;

– формулювання та уточнення мети дослідження;

– формалізація мети в критерії оптимальності;

– формалізація зовнішніх та внутрішніх обмежень;

– вибір факторів, які описують об'єкт і його оточення, котрі повинні бути враховані при дослідженні і, відповідно, включені в математичну модель;

– класифікація факторів і вибір серед них в першу чергу керованих змінних.

Побудова концептуальної моделі є важливим етапом моделювання, оскільки він визначає напрямки, цілі та область дослідження. Завершальним кроком побудови концептуальної моделі є оцінка в майбутньому її адекватності моделюючій ситуації.

3. Формування інформаційної бази моделі.

Цей етап є найбільш трудомістким, оскільки він представляє собою не тільки простий статистичний збір інформації. Тут висуваються досить високі вимоги до якості та достовірності підготовленої інформації.

При формуванні інформаційного забезпечення використовується математичний інструментарій теорії ймовірностей, економетричного моделювання. Тут має місце неперервність процесу формування необхідної інформації, який полягає в тому, що вихідні параметри однієї моделі можуть служити вхідними показниками для іншої.

4. Побудова числової економіко-математичноїмоделі**.**

На окресленому етапі на основі концептуальної моделі здійснюється формування числової математичної моделі об'єкта. Головна проблема етапу – визначення кількісних математичних співвідношень, які формалізують якісні залежності концептуальної моделі. Навіть за наявності повністю розробленого сценарію ці співвідношення можуть бути неочевидними. У зв'язку з цим часто виникає необхідність у виконанні проміжного етапу між побудовою концептуальної і математичної моделей об'єкта, тобто перетворення сценарію в алгоритм, який моделює взаємодію елементів між собою та оточенням в динаміці.

Для реалізації математичної моделі на персональних комп'ютерах вона має бути представленою в числовій формі, тобто задані числові значення констант, границі зміни невизначених факторів та керованих змінних, закони розподілу випадкових величин. Завершальним кроком формування математичної моделі є оцінка її адекватності стосовно до концептуальної моделі.

5. Числовий розв 'язок задачі**.**

Етап дослідження числової математичної моделі розпочинається з її аналізу (відношення до певного класу моделей), вибору відповідного методу її розв'язання та програмного забезпечення. Головна проблема цього етапу – розробка алгоритму оптимального або найкращого в заданих умовах розв'язання певної задачі.

Враховуючи вид числової економіко-математичної моделі, приймаються відповідні рішення стосовно подальших дій. Якщо отримана модель задачі має стандартний вид, для неї існують відомі алгоритми, а також програмні продукти знаходження розв'язків, то тут відбувається все дуже просто. В протилежному випадку доводиться розробляти алгоритм розв'язання та формувати відповідне програмне забезпечення. Отримані числові розв'язки далі піддаються суттєвому кількісному аналізу.

6. Аналіз числових результатів і прийняття рішень.

На цьому етапі вирішується важливе питання відносно правильності та повноти результатів моделювання, і, як результат, розробляються рекомендації для практичного використання при прийнятті вигідних рішень або для удосконалення моделі.

Завершальним кроком процедури побудови економіко-математичної моделі є оцінка точності одержаних розрахунків та вироблення на їх основі ефективних прикладних рішень.

Ефективність прийняття рішень у великій мірі залежить від рівня досягнутої мети дослідження, яка в свою чергу визначається цільовою функцією. Моделі можуть будуватись для досягнення таких цілей:

1) Виявлення функціональних співвідношень – визначення кількісних залежностей між вхідними факторами моделі та вихідними характеристиками об'єкта дослідження. Подібного роду моделі за своїм характером є описовими і присутні при побудові математичних моделей будь-яких видів.

2) Аналіз чутливості – встановлення з великого числа наявних факторів тих, які значною мірою впливають на вихідні характеристики об’єкта дослідження. Моделі аналізу чутливості повинні обов'язково передбачати можливість варіації ряду факторів і можуть бути використані так само для оцінки точності розв'язків, отриманих за допомогою моделей будь-яких типів.

3) Прогноз – оцінка поведінки об'єкта на часовому інтервалі при деякому допустимому поєднанні зовнішніх умов. Переважно задачі прогнозу є динамічними відносно вхідних параметрів і в якості незалежної змінної виступає час. Моделі прогнозу також є описовими.

4) Оцінка – визначення, наскільки адекватно об'єкт дослідження буде відповідати деяким критеріям. На відміну від розглянутих вище типів моделей, моделі оцінки включають розрахунки інтегральних характеристик – критеріїв, які формалізують мету дослідження. Моделі оцінки займають проміжне місце між описовими і оптимізаційними моделями. В них задані критерій і його деяке «критичне» значення, але проводиться не оптимізація, а лише порівняння розрахункового значення з «критичним», після чого приймається рішення про задоволення характеристик об'єкта поставленим вимогам.

5) Порівняння – співставлення обмеженого числа альтернативних варіантів систем або співставлення декількох прийнятних принципів чи методів дій.Число варіантів припускається незначним, у зв'язку з чим оцінюються всі варіанти, тобто здійснюється прямий перебір всієї множини. Хоча моделі окремого типу близькі до оптимізаційних, спеціальний блок оптимізації у них відсутній.

6) Оптимізація – точне визначення такого поєднання змінних керування, при якому забезпечується екстремальне (максимальне або мінімальне залежно від змісту критерію оптимальності) значення цільової функції. Суттєва різниця від наведеного вище випадку – наявність спеціального блоку оптимізації, який дозволяє цілеспрямовано і найбільш ефективно з обчислювальної точки зору переглядати множину альтернативних варіантів.

У загальному випадку якість економіко-математичної моделі визначають взаємодоповнювальні одна одну характеристики адекватності, стійкості та корисності моделі, які можна трактувати як погодження інформації, що описує функціональні можливості моделі, з наявною інформацією про реальний об'єкт дослідження та мету моделювання. Узагальнені фактори, які описують рівень цих якісних характеристик, подано на рис. 2.3.

Рисунок 2.3 – Фактори якості моделі

Контрольні запитання і завдання

1. Користуючись схемою класифікації математичних моделей (Рис. 2.1) надайте характеристику моделей.
2. За якими етапами здійснюється моделювання?
3. Які проблеми можуть виникати у процесі формулювання концептуальної моделі об'єкта?
4. Для досягнення яких цілей можуть будуватись моделі?
5. Які фактори обумовлюють якість моделі?

ТЕМА 3. МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

3.1 Основні положення моделі Уілсона
3.2 Графічне подання моделі
3.3 Економічний розмір замовлення й інтервал повторного замовлення

3.1 Основні положення моделі Уілсона

Математичні моделі управління запасами (УЗ) дозволяють знайти оптимальний рівень запасів деякого ресурсу, що мінімізує сумарні витрати на покупку, оформлення й доставку замовлення, зберігання ресурсу, а також збитки від його дефіциту.

Модель Уілсона є найпростішою моделлю УЗ і описує ситуацію закупівлі ресурсів у зовнішнього постачальника, яка характеризується обмеженнями.

Обмеження моделі Уілсона:

– інтенсивність споживання є апріорно відомою й постійною величиною;

– замовлення доставляється зі складу, на якому зберігається раніше зроблений ресурс;

– час поставки замовлення є відомою й постійною величиною;

– кожне замовлення поставляється у вигляді однієї партії;

– витрати на здійснення замовлення не залежать від розміру замовлення;

– витрати на зберігання запасу пропорційні його розміру; витрати поставок, які залежать від розміру замовлення, при формалізації моделі враховуються відповідно у вартості одиниці ресурсу;

– відсутність запасу (дефіцит) є неприпустимою.

Традиційна графічна представлення моделі дає рис. 3.1.

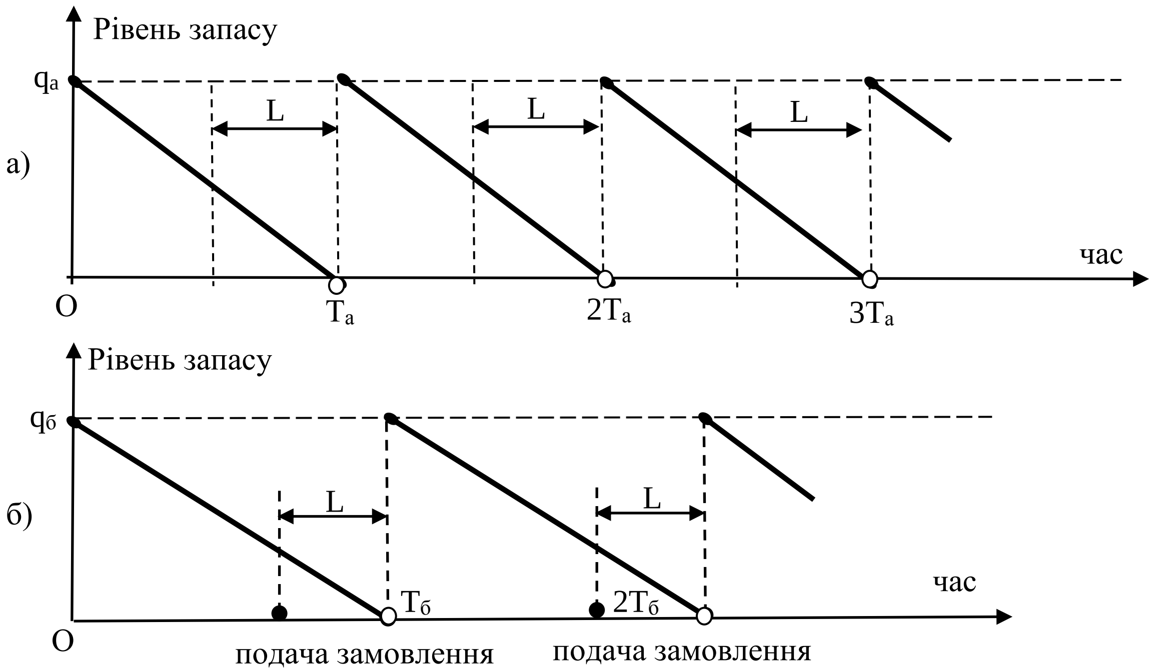


Рисунок 3.1 – Графік рівнів запасів при різних стратегіях замовлення партії ресурсу: (а) і (б)

Як видно з рис.3.1 можна використовувати дві основні стратегії поставки:

а) замовлення надходять часто, при цьому рівень запасів низький, отже витрати на зберігання запасів низькі, однак суттєво ростуть витрати на придбання запасів, так звані витрати на поставку;

б) замовлення подаються рідше, отже партіями більших розмірів (при цьому відомо річне споживання запасів), при цьому річні накладні витрати на поставку будуть меншими, чим в ситуації *(а)*, коли замовлення подаються частіше. Але при цьому витрати на зберігання будуть більше (тому що в середньому кількість збереженого ресурсу протягом року збільшиться).

Визначимо відповідні позначення для моделі і її графічного представлення:

- D – споживання ресурсу за рік;
- $C_П$ – вартість одиниці ресурсу;
- C_h – витрати на зберігання одиниці ресурсу за рік;
- тривалість L проміжку часу реалізації поставки – задана величина;
- накладні витрати C_0 на кожну поставку відомі (це – витрати, які не залежать від обсягу або розміру замовлення);
- значення обсягу q замовлення при поставках – величина, що оптимізується;
- тривалість T інтервалу часу між поставками пов'язана з розміром замовлення q рівністю $T = \frac{q}{D}$ (також величина, що оптимізується).

Таким чином з урахуванням обмежень моделі, для мінімізації сумарних річних витрат необхідно вміти визначати:

- оптимальне значення q^* обсягу замовлення для поставок, що мінімізують зазначені сумарні річні витрати, – так званий **економічний розмір замовлення** (EOQ);
- оптимальне значення тривалості **інтервалу повторного замовлення** – проміжку часу T^* між моментами подачі сусідніх замовлень.

Розглянемо основні показники стосовно до розглянутої оптимізаційної моделі управління запасами. При цьому необхідно особливо відзначити, що при розв'язанні завдань управління запасами необхідно чітко й відповідально підходити до **єдності точок виміру**. Так, у нашому випадку будемо виходити з того, що всі величини будуть вимірюватися в річному вимірі– витрати на зберігання, попит, інтервал повторного замовлення:

- T – інтервал повторного замовлення (у роках);
- $\frac{1}{T} = \frac{D}{q}$ – щорічна кількість поставок (замовлень);
- $\frac{C_0}{T} = C_0 * \frac{D}{q}$ – накладні витрати на поставки, що здійснюються протягом року;
- $\frac{q}{2}$ – середній рівень запасів протягом року (виходячи зі сталості споживання ресурсів – обмеження моделі);

- $C_h * \frac{q}{2}$ – щорічні витрати на зберігання ресурсу.

3.2 Графічне подання моделі

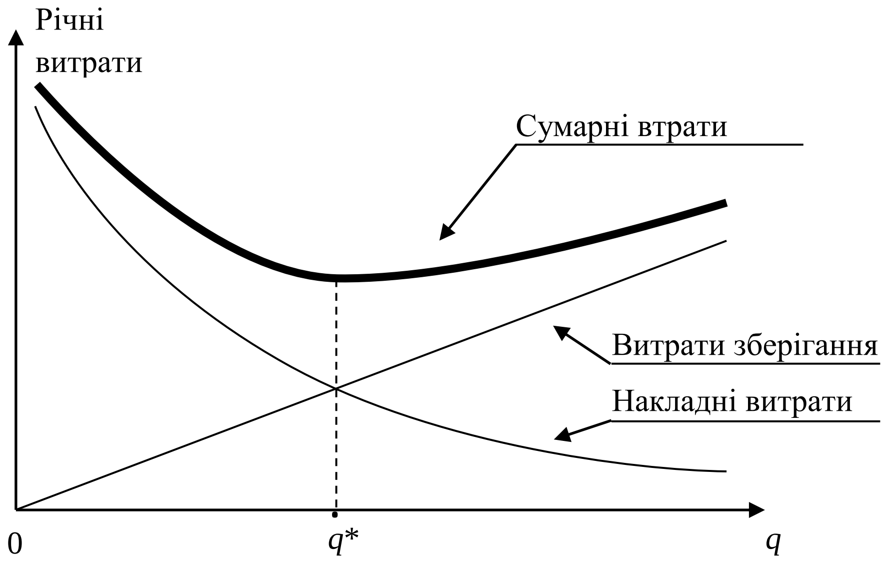


Рисунок 3.2 – Річні витрати як функція змінної q – обсягу замовлення

Дамо пояснення до графіків.

Згідно з обмеженнями до моделі витрати на зберігання ресурсів прямо пропорційні їх кількості в місцях зберігання. Саме тому витрати на зберігання представлені прямою.

Накладні витрати відповідають витратам на замовлення та постачання ресурсів на склад підприємства. Це означає, що всі ці витрати розподіляються на всю партію постачання, а саме на кожну одиницю ресурсів,що постачалися однією партією. Відповідно до цього ці витрати тим менше, чим більша кількість ресурсів у партії постачання. Графік витрат на постачання представлений як гіпербола. Загальні витрати складаються з суми вищеозначених графіків.

3.3 Економічний розмір замовлення й інтервал повторного замовлення

Розглянемо складові економічних витрат на управління запасами.

Першим елементом витрат є витрати на придбання запасів. Ці витрати визначаються величиною поточного попиту на ресурси і прямо пропорційні йому, тобто вартість придбання ресурсів становить:

$$D * C_{п}. \tag{3.1}$$

При цьому видно, що дана величина ніяк не змінюється залежно від стратегії управління запасами, оскільки постійна, виходячи з обмеження по моделі (сталість попиту).

Наступним елементом моделі витрат на управління запасами є вартість замовлення або накладні витрати для кожного постачання ресурсів. Це величина прямо пропорційна кількості постачань протягом періоду (року):

$$C_0 * \frac{D}{q}. \tag{3.2}$$

Останнім елементом є вартість зберігання запасів, вона прямо пропорційна обсягу запасів на складі підприємства. Враховуючи, що споживання рівномірне, можна припустити, що обсяг запасів на складі становить у середньому половину обсягу поставки (на початку інтервалу – увесь обсяг, наприкінці – відсутність запасів):

$$C_h * \frac{q}{2} \tag{3.3}$$

Використовуючи рівність $\frac{1}{T} = \frac{D}{q}$ завдання, що відповідає меті дослідження, може бути розглянуте як завдання мінімізації сумарних річних витрат/втрат, представлених функцією $C_г(q)$ змінної q:

$$C_г(q) = C_0 * \frac{D}{q} + C_h \frac{q}{2} \to \min_{q>0}, \tag{3.4}$$

або функцією $C_г(T)$ змінної T:

$$C_г(T) = \frac{C_0}{T} + C_h * D\frac{T}{2} \to \min_{T>0}. \tag{3.5}$$

Приведемо відповідні формули, які в літературі по керуванню запасами називають **формулами Уілсона.**

Економічний розмір замовлення

$$EOQ = q^* = \sqrt{2C_0 \cdot D / C_h}. \tag{3.6}$$

Інтервал повторного замовлення

$$T^* = \sqrt{2C_0 / (D \cdot C_h)}. \tag{3.7}$$

Дамо деякі пояснення до наведених формул:

Перший доданок у правій частині кожного із представлених виражень (3.4) та (3.5) річних витрат $C_г(q)$ на управління запасами (як функція відповідної змінної) є гіперболою, а другий доданок – лінійною функцією. При цьому для сумарної функції, що характеризує річні втрати, легко бачити, що точка мінімуму існує. Відповідну графічну ілюстрацію дає рис. 3.2.

Диференціювання функції $\frac{\partial C_г}{\partial q} = 0$ ($\frac{\partial C_г}{\partial T} = 0$) дозволяє знайти єдине оптимальне значення q^* для розміру замовлення (для тривалості T^* періоду часу між поставками або інтервалу повторного замовлення) стосовно до розглянутого завдання мінімізації загальних річних витрат, а також і інші необхідні параметри оптимальної стратегії.

У точці мінімуму функції $C_г(q)$ (тобто при $q = q^*$) накладні річні витрати на поставки й річні витрати зберігання збігаються між собою. Інакше кажучи, при оптимальному управління перший доданок у правій частині вираження для $C_г(q)$ буде збігатися із другим доданком у цьому виразі. Зазначена обставина може використовуватися як індикатор оптимальності реалізованої на практиці стратегії управління запасами при роботі конкретної ланки ланцюгу поставок.

Функція $C_г(q)$ у крапці свого мінімуму $q = q^*$ поводиться досить рівно. Тому, можливі на практиці відхилення розмірів замовлень від рекомендованих формулою Уілсона (q^*) навіть на 10% – 20% у більшості випадків приведуть до незначного відносного збільшення відповідних річних витрат (менш 1%). Цю обставину можна використовувати для коректування розміру замовлення стосовно до конкретних практичних ситуацій.

Контрольні запитання і завдання

1. У чому полягає завдання управління запасами?
2. Перелічите обмеження моделі Уілсона управління запасами.
3. Охарактеризуйте графічну модель управління запасами.
4. Охарактеризуйте складові витрат на управління запасами
5. Представте формули оптимального управління запасами.
6. Охарактеризуйте модель Уілсона й можливість її застосування на практиці в «чистому виді».

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Модель Уїлсона в теорії УЗ є:

а) найпростішою моделлю;
б) простою моделлю;
в) найскладнішою моделлю;
г) складною моделлю;
д) усередненою моделлю.

2. Згідно моделі Уїлсона має місце наступне допущення:

а) витрати на зберігання запасу дорівнюють його розміру;
б) витрати на зберігання запасу пропорційні його розміру;
в) витрати на зберігання запасу оберненопропорційні його розміру;
г) витрати на зберігання запасу вдвічі більші, ніж його розмір;
д) витрати на зберігання запасу вдвічі менші, ніж його розмір.

3. Згідно моделі Уїлсона має місце наступне допущення:

а) відсутність запасу (дефіцит) є неприпустимимою;
б) відсутність запасу (дефіцит) є можливою;
в) відсутність запасу (дефіцит) в незначній мірі є припустимою;

г) відсутність запасу (дефіцит) не відіграє важливої ролі ;

д) відсутність запасу (дефіцит) веде до погіршення конкурентоспроможності.

4. Модель Уїлсона в теорії УЗ є:

а) складною однопродуктовою моделлю управління запасами з постійним попитом;

б) найпростішою багатопродуктовою моделлю управління запасами зі змінним попитом;

в) складною багатопродуктовою моделлю управління запасами з постійним попитом;

г) найпростішою однопродуктовою моделлю управління запасами зі змінним попитом;

д) найпростішою однопродуктовою моделлю управління запасами з постійним попитом.

5. Задача мінімізації загальних річних втрат може бути представлена як:

а) $C_г(q)=C_0 \cdot D/q+ C_h \cdot q/2 \rightarrow \min, q<0$;

б) $C_г(q)=C_0 \cdot D/q+ C_h \cdot q/2 \rightarrow \min, q>0$;

в) $C_г(q)=C_0 \cdot D/q+ C_h \cdot q/2 \rightarrow \max, q>0$;

г) $C_г(q)=C_0 \cdot D/q+ C_h \cdot q/2 \rightarrow \max, q<0$;

д) $C_г(q)=C_0 \cdot D/q+ C_h \cdot q/2 \rightarrow \min, q=0$.

Практичні завдання

Задача 3.1

Обсяг продажів деякого магазину складає в рік 500 упаковок горішків в пакетах. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна покупки одного пакета дорівнює 5 грн.. За доставку замовлення власник магазину повинен заплатити 30 грн.. Час доставки замовлення від постачальника складає 12 робочих днів (при 6-денному робочому тижні). За оцінками фахівців, витрати зберігання на рік складають 1 грн. 50 коп. за один пакет. Відомо, що магазин працює 300 днів на рік.

Завдання.

1. Визначити: скільки пакетів повинен замовляти власник магазину для однієї поставки; частоту замовлень; точку замовлення; річні витрати на управління запасами (УЗ).

2. Побудуйте графік загальних річних витрат на УЗ. Графічно визначте найбільш вигідний обсяг замовлення.

3. Побудуйте графік циклів зміни запасу пакетиків горішків. Графічно визначте точку замовлення.

ТЕМА 4. МОДИФІКАЦІЇ БАЗОВОЇ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

4.1 Поставки зі знижкою на ціну замовлення

У рамках основної моделі додатково враховується, що ціна ресурсу, що поставляється, може залежати від обсягу замовлення, причому така залежність формалізується у вигляді знижки на замовлення. Знижка надається тоді, коли розмір замовлення буде не меншим, чим обумовлений відповідним граничним значенням для обсягу замовлення.

А саме, нехай додатково до атрибутів базової моделі Уілсона задане:

- q_1 – граничне значення розміру замовлення для одержання знижки;
- $C_{П0}$ – ціна одиниці ресурсу при розмірі замовлення меншому q_1;
- $C_{П1}$ – ціна одиниці ресурсу при розмірі замовлення рівному або перевищуючому q_1.

Вартість одиниці ресурсу при такій модифікації моделі необхідно розглядати як **«східчасту» функцію змінної q.** А саме, далі матимемо наступне:

$$С_п = С_п(q). \tag{4.1}$$

Для вибору оптимального розміру партії q* у випадку, коли договором передбачена можливість надання знижки, слід порівняти значення сумарних витрат у місцях q_0 і q_1 (де q_1 – обсяг замовлення, починаючи з якого надається знижка), вибравши той варіант, де витрати менші:

де

$$C_П(q) = \begin{cases} C_{П0}, & \text{якщо } q < q_1; \\ C_{П1}, & \text{якщо } q \ge q_1; \end{cases} \tag{4.2}$$

(при цьому вважаємо, що виконана нерівність $C_{П1} < C_{П0}$).

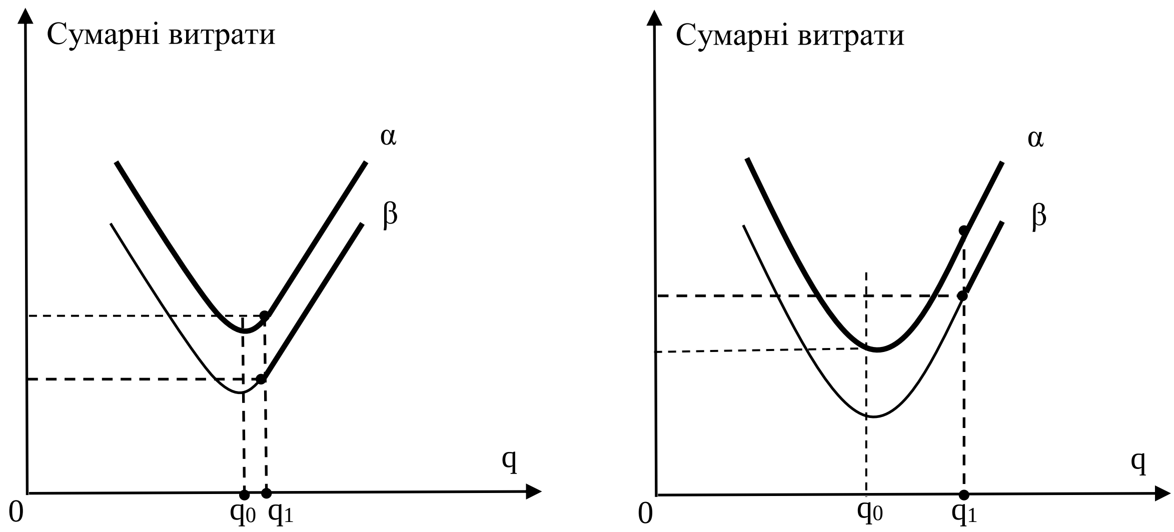
Завдання мінімізації витрат на управління запасами з урахуванням модифікації базової моделі з урахуванням знижок на ціну ресурсу залежно від обсягу постачання може бути записана таким чином:

$$C_0 \cdot (D/q) + C_h \cdot (q/2) + C_П(q) \cdot D \to \min_{0<q<D}. \tag{4.3}$$

При будь-якім фіксованім зазначенім значенні $C_П(q)$ (або значення $C_{П0}$, або значення $СП_1$) сумарні річні витрати як функція змінної q будуть представлені опуклою вниз лінією, вид якої нам уже відомий. Пропонована знижка обумовлює той факт, що ці лінії виявляться просто зрушеними (по вертикалі) одна щодо іншої. При цьому їх крапки мінімуму будуть збігатися. При цьому слід урахувати, що в загальному випадку використання знижки на ціну ресурсу може знижувати загальну вартість керування запасами, а може й збільшувати її. Графічне зображення даного факту показане на рис. 4.1.

Як видно на рисунку 4.1 (а) знижка зменшує загальні витрати на управління запасами, а надання й використання знижки при розмірі партії, зазначеному на рис 4.1 (б) не зменшує витрат на керування запасами. При цьому:

- α – при ціні $С_{П0}$ (за од. тов.);
- β – при ціні $С_{П1}$ (за од. тов.);
- обидві функції α і β мають мінімум при $q=q_0$;
- жирна лінія відповідає ціні СП(q).



а) б)

Рисунок 4.1 – Сумарні витрати на управління запасами

Для вибору оптимального розміру партії q^* слід порівняти значення сумарних витрат у точках q_0 і q_1, вибравши той варіант, де витрати менше (див. рис.4.1.). Рисунок 4.2 ілюструє процедуру поліпшення розв'язку щодо величини замовлення з урахуванням еластичності ціни щодо величини закупівлі, яка має східчастий характер.

$$C_г=C_h+C_{0.} \tag{4.4}$$

Враховуючи це, збільшення партії поставки від q_0 до q_1 дозволяє знизити витрати запасів від B_0 до B_1, а у випадку збільшення партії поставки до q_2, відповідно, знизити до B_2. Отже, з рис.4.2 видно, що закупівля партії ресурсів величиною q_2 є найбільш привабливою щодо забезпечення мінімуму витрат ($B_2 < B_1 < B_0$).

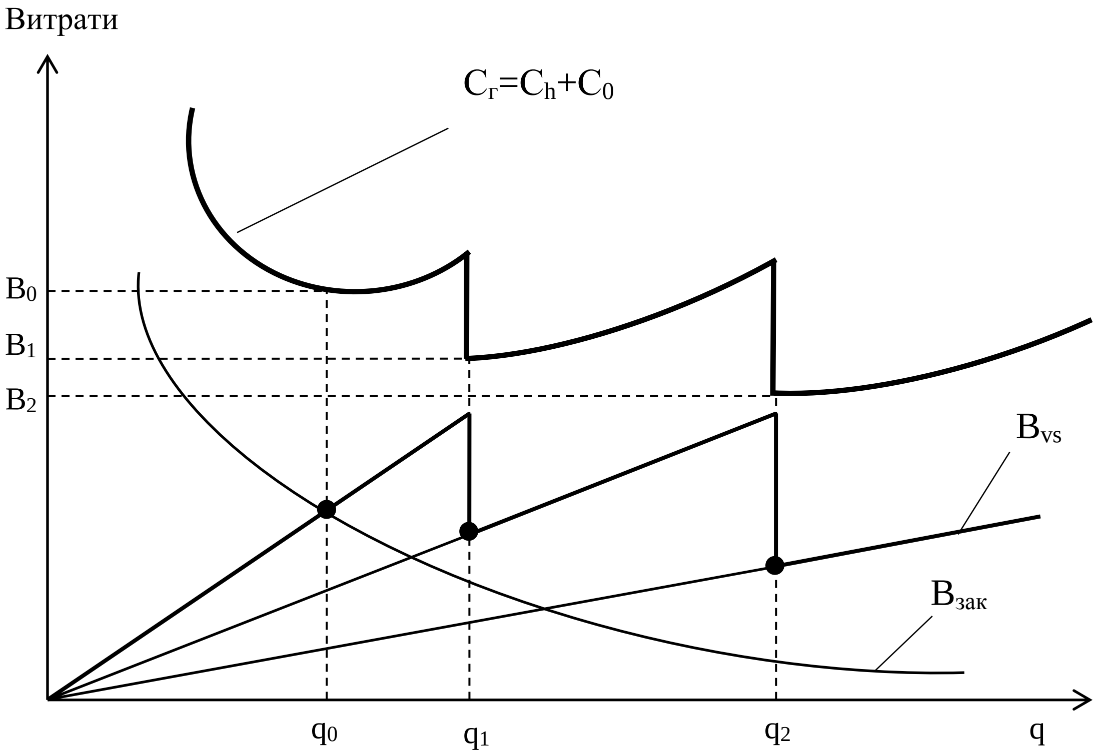


Рисунок 4.2 – Графічна вистава знижок у ціні ресурсу

4.2 Залежність витрат замовлення від обсягу замовлення

Стосовно до базової моделі, додатково враховується, що накладні витрати на поставку ресурсу (C_0) можуть залежати від обсягу замовлення. Зазначені витрати при такій модифікації моделі необхідно розглядати як «східчасту» функцію змінної q.

Нехай C_0(q) представляє такі накладні витрати для модифікованої моделі, причому для замовлень, починаючи з обсягу q_0, такі витрати збільшуються:

$$C_o(q) = \begin{cases} C_{00}, \text{ якщо } q < q_0; \\ C_{01}, \text{ якщо } q \geq q_0 \ \ (C_{01} > C_{00}). \end{cases} \qquad (4.5)$$

Завдання мінімізації витрат на управління запасами з урахуванням модифікації базової моделі залежно від витрат витрат замовлення може бути записане так:

$$C_0(q) \cdot (D/q) + C_h \cdot (q/2) + C_{\ddot{I}} \ \cdot D \rightarrow \min_{0<q<D}. \qquad (4.6)$$

При будь-якому фіксованому значенні C_0(q) (або значення C_{00}, або значення C_{01}) сумарні річні витрати як функція змінної q знову будуть представлені опуклою вниз лінією, вид якої був наведений (див. рис 4.3). Пропонована знижка обумовлює той факт, що складова таких сумарних витрат, представлена гіперболою, буде для розглянутих випадків з різною величиною витрат. Графічне представлення дає рис. 4.3. У представленому на рис. 4.3 випадку (коли при перевищенні обсягу q_0 накладні витрати на поставку збільшуються) ніяких можливостей для зниження загальних витрат немає (див. жирну лінію на рис. 4.3).

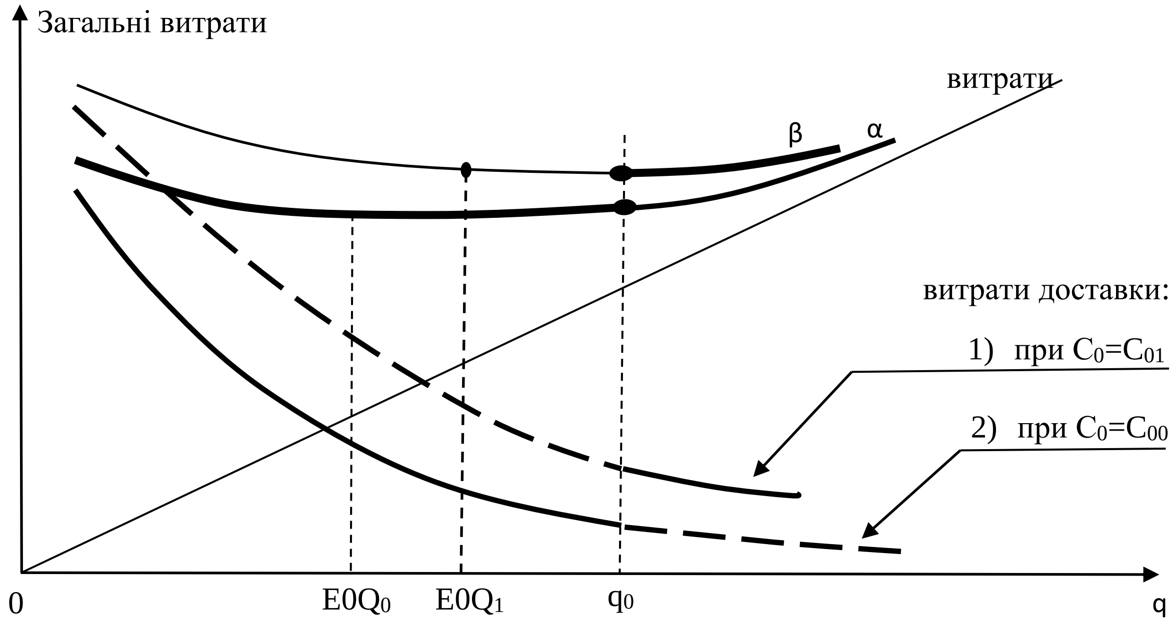


Рисунок 4.3 – Загальні витрати (без обліку константи $C_П \cdot D$)

А якщо ні (див. рис. 4.4), тобто у випадку $C_{01} < C_{00}$ (коли при перевищенні обсягу q_0 партією замовлення ціна поставки знижується, наприклад, за рахунок використання відповідних пільг), така можливість уже є. Тому в такому випадку для вибору оптимального розміру партії замовлення q^* слід порівняти значення загальних витрат у точках $q = EOQ_0$ (економічного розміру замовлення при ціні доставки C_{00}) і $q = q_0$, вибравши той варіант, де сумарні такі витрати менше.

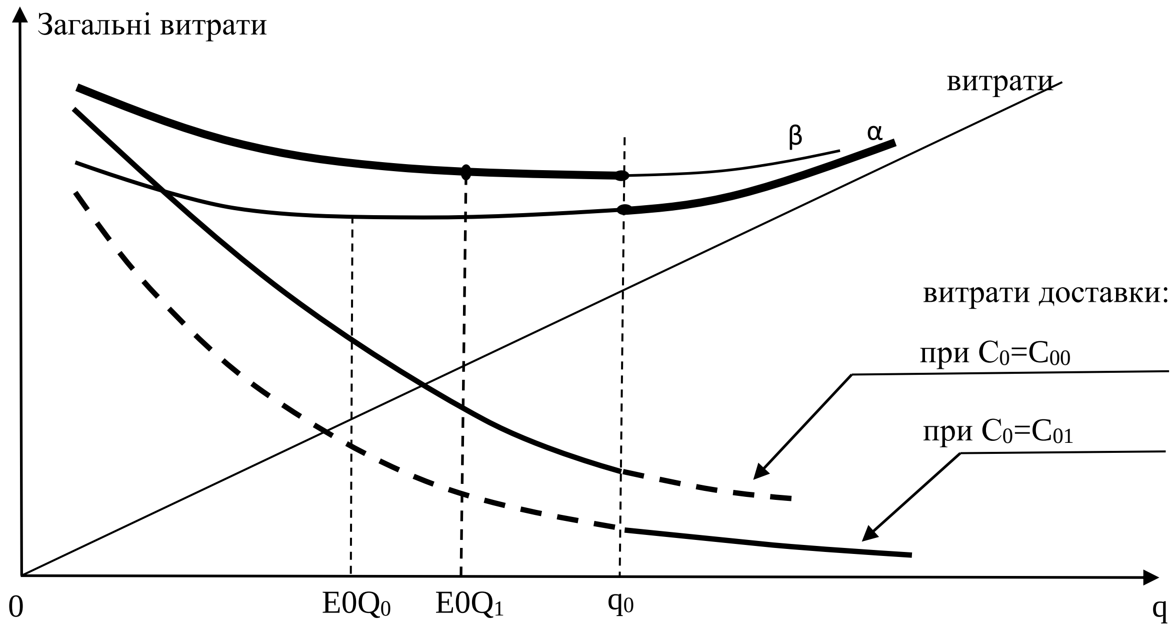


Рисунок 4.4 – Загальні витрати (у випадку коли C_{01}<C_{00})

4.3 Залежність витрат зберігання від обсягу поставок

Стосовно базової моделі додатково враховується, що річні витрати зберігання одиниці ресурсу C_h можуть залежати від обсягу замовлення.

Нехай для партій замовлення при їхньому обсязі, починаючи з q_h, пропонується знижка на витрати зберігання. Тобто додатково до атрибутів базової моделі УЗ задане:

– q_h – граничне значення розміру замовлення для одержання зазначеної знижки для витрат зберігання;

– C_{h0} – витрати зберігання одиниці ресурсу за рік при розмірі партій поставок меншому за q_h;

– C_{h1} – витрати зберігання одиниці ресурсу за рік при розмірі партій поставок, рівному або перевищуючому граничне значення q_h.

Витрати зберігання при такій модифікації моделі необхідно розглядати як відповідну «східчасту» функцію змінної q. А саме, далі ухвалюємо: $C_h = C_h(q)$, причому:

$$C_h(q) = \begin{cases} C_{h0}, \text{ якщо } q < q_h; \\ C_{h1}, \text{ якщо } q \geq q_h \ \ (C_{h1} < C_{h0}). \end{cases} \quad (4.7)$$

Відповідне завдання мінімізації сумарних витрат на управління запасами з урахуванням зазначених особливостей модифікації базової моделі може бути записане так:

$$C_0(D/q) + C_h(q) \cdot (q/2) + C_П \cdot D \to \min_{0<q<D}. \quad (4.8)$$

При кожному вказаному значенні $C_h(q)$ (або C_{h0}, або C_{h1}) сумарні річні витрати як функція змінної q і в цій ситуації будуть представлені опуклою вниз лінією, вид якої був наведений раніше. Пропонована знижка обумовлює той факт, що складова витрат зберігання (у сумарних річних витратах), представлена прямою лінією, буде для розглянутих випадків мати різний тангенс кута нахилу.

Графічне представлення зображено на рисунку 4.5.

1) α – при тарифі C_{h0} для витрат зберігання;

2) β – при тарифі C_{h1} для витрат зберігання ($C_{h1} < C_{h0}$);

3) жирна лінія відповідає синтезованому тарифу $C_h(q)$.

Як видно з рис. 4.5, пропонована знижка для витрат зберігання може змінити оптимальну стратегію управління запасами (щодо ситуації в рамках базової моделі, коли відсутня пропозиція такої знижки). А саме, при $qh \leq E_{oqh}$ (у правій частині цієї нерівності – економічний розмір замовлення при тарифі Ch_1 для витрат зберігання) оптимальний розмір замовлення q^* завжди буде визначатися рівністю $q* = E_{oqh}$. При $qh > E_{oqh}$ для вибору оптимального q^* слід зрівняти значення загальних річних витрат у точках q= EOQ_0 (економічний розмір замовлення при тарифі C_{h0}) і q = q_h, вибравши той варіант, де витрати менше.

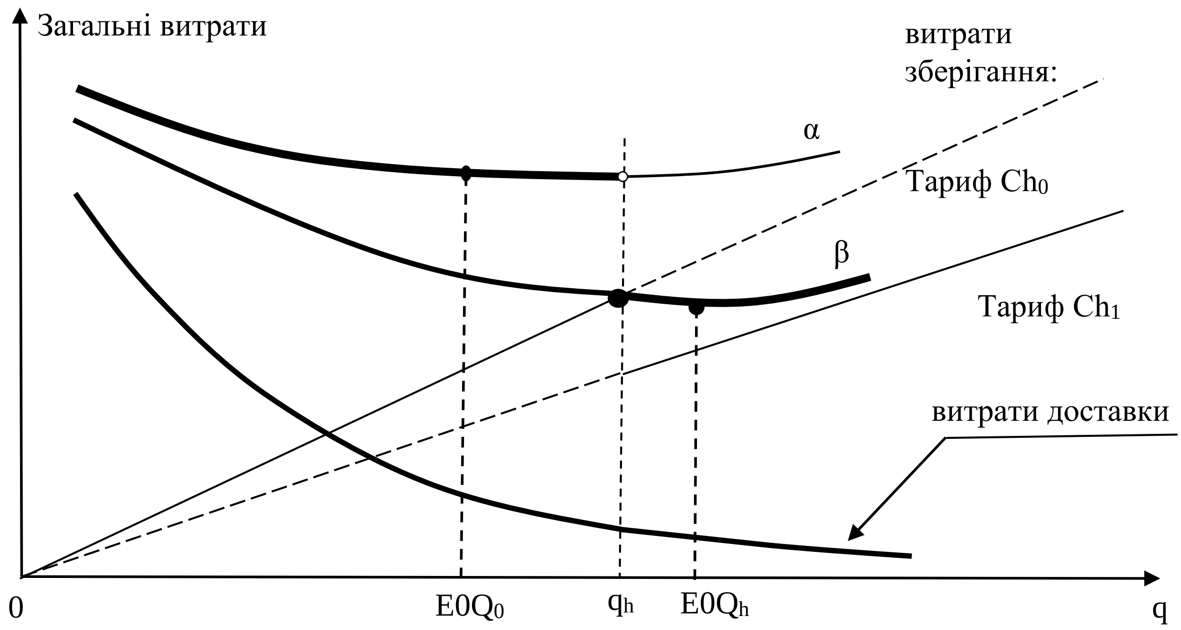


Рисунок 4.5 – Загальні витрати (без обліку константи $C_П \cdot D$)

Можливість зниження загальних річних втрат може також мати місце у випадку, коли модифікація моделі припускає яку або комбінацію розглянутих вище схем. Наприклад, якщо впливає:

1) з одного боку, ріст накладних витрат на поставку;

2) з іншого боку, знижку на вартість ресурсу (при досить великому розмірі замовлення).

4.4 Урахування цінових знижок під час транспортування

Проста модель EOQ передбачає незмінність ставок на перевезення, оскільки вони формують ціну закупівлі, а ціна закупівлі ухвалюється постійною. Якщо ж допустити, що ставки за транспортування є еластичними щодо кількості вантажу, то їх зміна може суттєво впливати на зміну транспортних витрат, а виходить, і загальних логістичних витрат, тобто впливати на зміну оптимальних параметрів закупівлі.

Цей вплив можна трактувати такими постановками оптимізації:

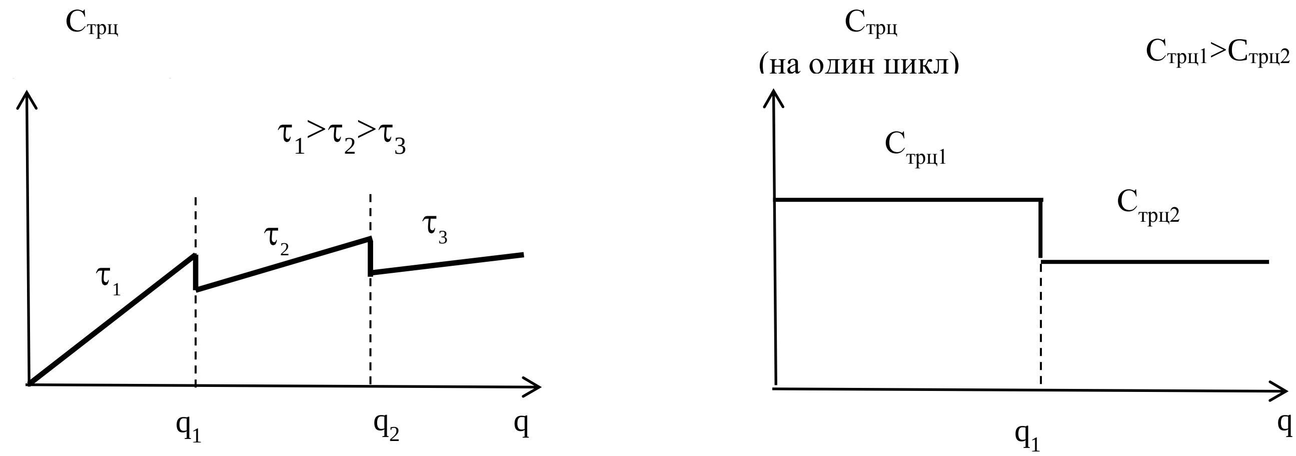
а) збільшення величини замовлення в певних діапазонах за рахунок зниження перевізних ставок викликає уцінку закупівлі. У цьому трактуванні береться до уваги, що для певних діапазонів вантажу встановлені питомі перевізні ставки (у розрахунках за одиницю вантажу). Якщо транспортні витрати входять у ціну придбання, то вплив знижених перевізних ставок на величину замовлення й логістичні витрати є таким же, як і вплив цінових знижок закупівлі. По суті, таке трактування є компромісною залежністю між витратами складу запасів і витратами замовлення.

б) збільшення величини замовлення в певних межах дозволяє знизити перевізні ставки (наприклад, при повному завантаженні вагона, автомобіля), за рахунок яких можна знизити транспортні витрати, а виходить, і загальні логістичні витрати. Це трактування ґрунтується на відокремленні транспортних витрат, тому має місце взаємозалежність витрат складу запасів, витрат замовлення й транспортних витрат. При цьому розрахунки транспортних витрат може відбуватися по двом варіантам:

– для кожного діапазону обсягу ресурсів установлюється перевізна ставка за одиницю вантажу (τ) щодо річного попиту (D);

– для кожного діапазону обсягу ресурсів установлюється перевізна ставка на весь вантаж розраховуючи на всю поїздку (рейс) (Ртр).

Графічно для цих двох варіантів транспортні витрати (Ртр) залежно від обсягу вантажу мають характеристику, зображену на рис. 4.6.



а) пропорційна характеристика

$$C_{тр} = \tau * D \begin{cases} \tau_1 * D, q \le q_1 \\ \tau_2 * D, q_1 < q \le q_2 \\ \tau_1 * D, q > q_2 \end{cases}$$

б) дискретна характеристика

$$С_{тр} = \begin{cases} С_{трц1} * \frac{D}{q}, \ \text{если } q \le q_1; \\ С_{трц2} * \frac{D}{q} \ \text{если } q > q_1 \end{cases}$$

Рисунок 4.6 – Графічна інтерпретація розрахунків транспортних витрат

Для пропорційної характеристики розрахунків транспортних витрат загальні витрати як суму витрат зберігання запасів (C_h), витрат замовлень (C_0) і транспортних витрат ($C_{тр}$), можна сформулювати так:

$$C_h(q/2) + C_0(D/q) + \tau * D \to \min_{0<q<D}. \tag{4.9}$$

Графічно це виглядає так, як показано на рисунку 4.7.

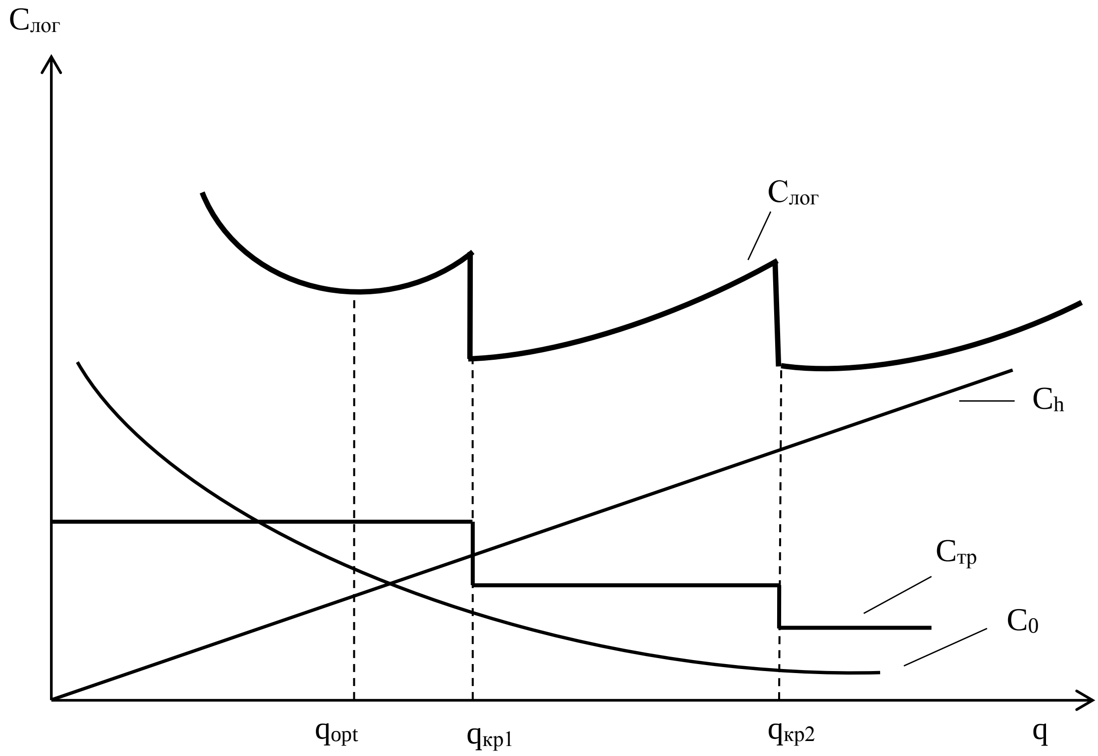


Рисунок 4.7 – Графічна інтерпретація залежності логістичних витрат ($C_{лог}$) від перевізних ставок (пропорційна характеристика)

Для дискретної характеристики розрахунків транспортних витрат загальні витрати як суму витрат зберігання запасів, витрат замовлень і транспортних витрат, можна сформулювати так:

$$C_h(q/2) + C_0(D/q) + C_{трц} * \frac{D}{q} \to \min_{0<q<D}, \tag{4.10}$$

де $C_{трц}$ – транспортні витрати однієї поїздки (рейсу).

За аналогією з формулою визначення EOQ (формулою Уильсона) оптимальну величину замовлення з урахуванням транспортних витрат можна розрахувати по формулі:

$$EOQ = q^* = \sqrt{2(C_0 + C_{трц.}) \cdot D / C_h}. \tag{4.11}$$

Графічно це можна подати, як на рис. 4.8.

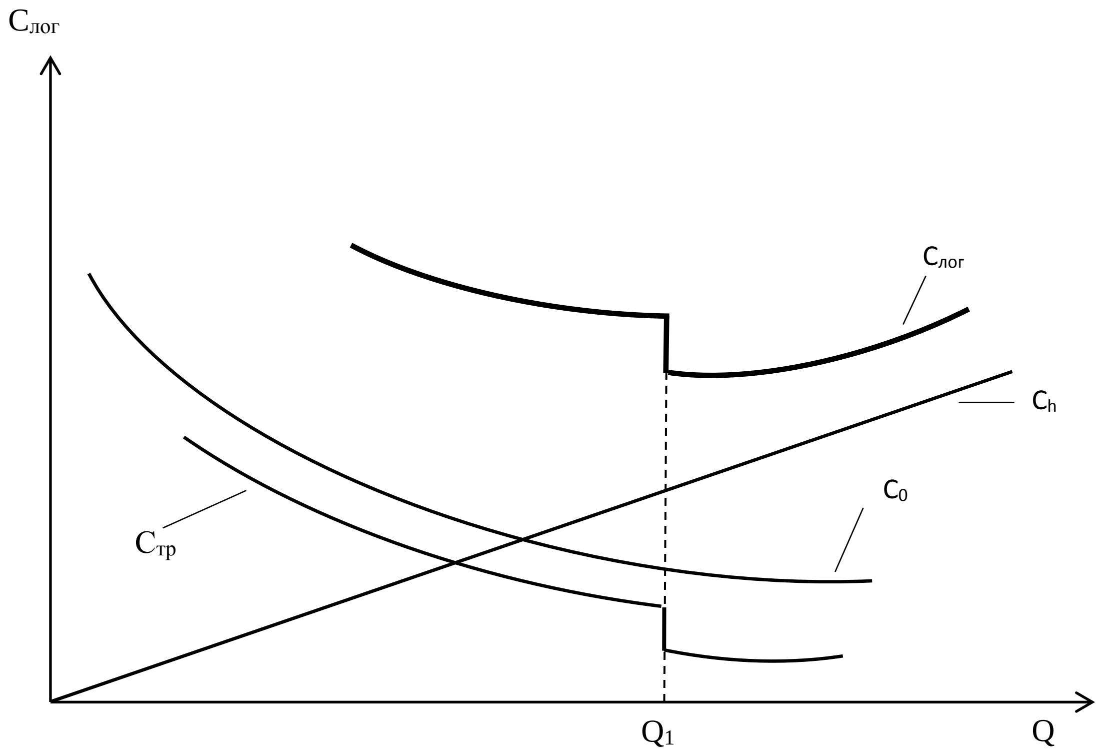


Рисунок 4.8 – Графічна інтерпретація залежності логістичних витрат (Слог) від перевізних ставок (дискретна характеристика)

в) збільшення величини замовлення понад установлений мінімум перевізником з метою оплати транспортних послуг по знижених тарифах.

Третє трактування стосується мотивування перевізником збільшення перевезеного вантажу понад установлену їм мінімальної норми (Q_{min}) шляхом зниження перевізних ставок. У цьому випадку додатково виникають реляції між витратами запасів у постачальника й в одержувача, оскільки перший повинен нагромадити більшу партію поставки, а другий – її втримувати, щоб скористатися зниженими перевізними ставками. Інакше кажучи, економія транспортних витрат повинна компенсувати витрати утримання додаткового запасу.

За результатами досліджень така формула розрахунків оптимальної величини замовлення з урахуванням зниження перевізної ставки перевізником ($\Delta\tau$):

$$EOQ = q^* = \sqrt{D\Delta\tau * q / C_h}, \tag{4.12}$$

де q – мінімальна величина партії, установлена перевізником;

$\Delta\tau$ – величина знижки перевізної ставки розраховуючи на одиницю запасу.

Помітимо, що урахування транспортних витрат може служити підставою й для обґрунтування вибору власного транспорту або аутсорсингу і його потужності. Так, подана формула розрахунків оптимальної величини замовлення з урахуванням вартості транспортування (однієї поїздки) може бути основою ухвалення рішення при обґрунтуванні:

а) використання власного транспорту шляхом порівняння власних витрат і витрат стороннього перевізника;

б) потужності (вантажопідйомності $Q_{вп}$) транспортних засобів власного відділу доставки, для того, щоб вона відповідала оптимальної партії замовлення, тобто такий, яка зазначена як формула (4.11).

4.5 Багатономенклатурна модель: загальні поставки

Багатономенклатурні моделі управління запасами враховують, що поставка проводиться виходячи зі значного числа позицій. Основні відмінності такої моделі виходять із того, що моделі можуть ураховувати одночасність поставки ресурсу або не враховувати її.

Будемо виходити з допущення, що всі ресурси поставляються одночасно, однієї партією. Ураховується довільна кількість N видів i- ресурсів ($i = \overline{1,N}$), по кожному з яких планується свій запас. При цьому поставка всіх ресурсів – щораз загальна, тобто в партії замовлення представлені всі види аналізованих ресурсів, причому розмір замовлення для кожного виду i- ресурсу – «свій» (як, наприклад, закупівля переліку ресурсів в одного постачальника).

Відзначимо відповідні атрибути моделі й позначення:

- відсутність запасів по кожному виду i- ресурсу неприпустимо ($i = \overline{1,N}$);
- попит на i- ресурс постійний, D_i – його річне споживання;
- поставки загальні, T_0 – інтервал повторного замовлення;
- витрати на зберігання одиниці i- ресурсу – Chi (залежать від i- ресурсу);
- накладні витрати однієї поставки – C_0 (загальні для партії замовлення);
- обсяг замовлення i- ресурсу – q_i (у партії загальної поставки);
- щорічна кількість поставок – $1/T_0$ (де T_0 – у роках);
- середній річний рівень запасу i- ресурсу – q_i /2.

Графічна інтерпретація, цілком аналогічна тій, яка наведена для базової однономенклатурної моделі, представлена на рис.4.9.

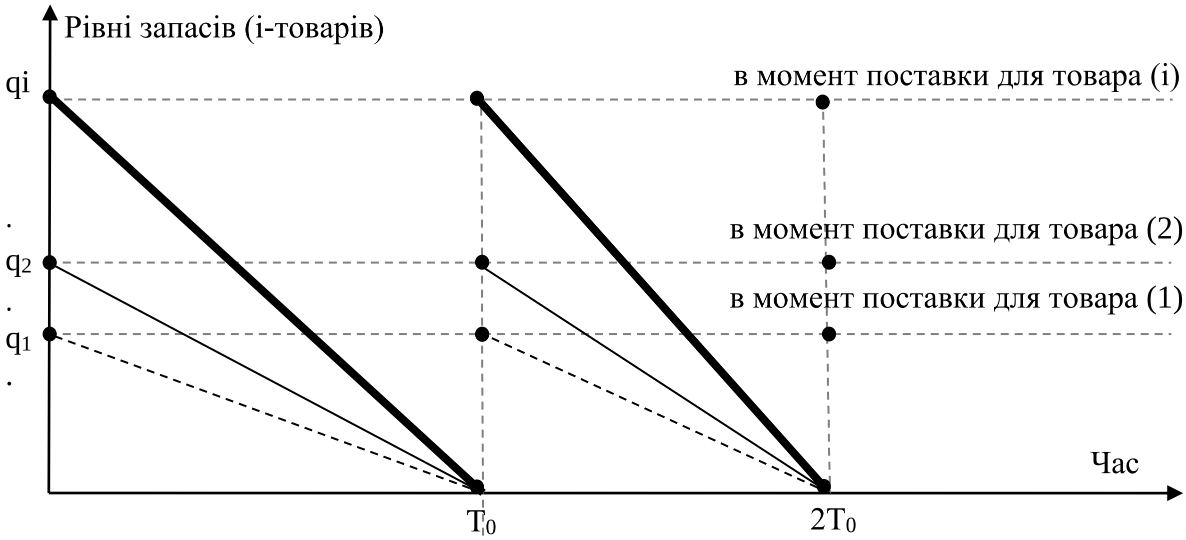


Рисунок 4.9 – Графіки рівнів запасів і- ресурсу при загальних поставках

Зазначена величина витрат для аналізованої моделі визначається виразом:

$$C_0 \cdot \left(\frac{1}{T}\right) + \sum_{i=1}^{N} C_{hi} \cdot (q_i / 2), \qquad (4.13)$$

причому для будь-якого фіксованого $T = T_0$ маємо: $q_i = T_0 * D$.

Урахування вартості ресурсу по кожному виду і дасть додатковий доданок $\sum_{i=1}^{N} C_{\Pi i} \cdot D_i$, не залежить ні від q_i, ні від T, а отже, що не впливає на точку мінімуму функції, що цікавить нас.

Уведемо додатково позначення, які допоможуть у зручному виді формалізувати завдання знаходження оптимальної стратегії стосовно до багатономенклатурної моделі, що цікавить нас, керування запасами. А саме, нехай:

$\vec{D} = (D_1, D_2, ..., D_N)$ – вектор споживання і- ресурсу;

$C_h = (C_{h1}, C_{h2}, ..., C_{hN})$ – вектор витрат на їхнє зберігання;

$\vec{D} \cdot \vec{C_h}$ – скалярний добуток цих векторів (нагадаємо, що це – число, яке шукають по формулі $\vec{D} \cdot \vec{C_h} = D_1 \cdot Ch_1 + D_2 \cdot Ch_2 + \cdots + D_n \cdot Ch_n$).

Відповідне завдання знаходження оптимального інтервалу постачання ресурсів тепер може бути розглянуте як завдання мінімізації сумарних витрат, представлених функцією $C_Г(T_0)$ змінної T_0:

$$C_Г(T_0) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{T_0}\right) + \frac{T_0}{2} \cdot (\vec{D} \cdot \vec{C}_h) \rightarrow \min_{T_o > 0} . \qquad (4.14)$$

Параметри моделі простіше отримувати на основі відповідної модифікації формул Уілсона. Приведемо відповідні формули.

Інтервал повторного замовлення (загальний):

$$T_0^* = \sqrt{2C_0 / (\vec{D} \cdot \vec{C}_h)} \text{ (у роках).} \qquad (4.15)$$

Підкреслимо, що у випадку коли поставки по кожному і- ресурсу організують незалежно одна від одної, то відповідний оптимальний інтервал повторного замовлення для і- ресурсу рівний $T_i{*} = \sqrt{2C_0/(C_{hi} \cdot D_i)}$. Порівнюючи цей вираз для T_i^* с наведеним вище вираженням для T_0^* легко побачити, що стосовно до багатономенклатурної моделі із загальними поставками інтервал повторного замовлення стає (при збереженні накладних витрат на поставку) більш «коротким»: $T_0^* < T_i^*$, тому що $C_{hi} \cdot D_i < \vec{D} \cdot \vec{C_h}$

Економічний розмір замовлення (і- ресурсу).

$$q_i{*} = D_i \cdot \sqrt{2C_0/(\vec{D}\cdot\vec{C}_h)}\,. \tag{4.16}$$

Дамо деякі пояснення до наведених формул.

Завдання звелося до аналогічного завдання для базової моделі управління запасами, що дозволяє легко знайти основні параметри оптимальної стратегії. А саме, спочатку знаходимо оптимальне значення інтервалу T_0^* повторного замовлення, потім (з урахуванням рівностей $q_i{*} = D_i \cdot T_0^*$) знаходимо оптимальний розмір замовлення $q_i{*}$ по кожному *і*- ресурсу.

Перший доданок у правій частині представленого вираження (як функція змінної T_0) є гіперболою, а другий доданок – лінійну функцію. При цьому легко бачити, що точка мінімуму існує.

Умова $\partial C_\Gamma / \partial T_0 = 0$ дозволяє знайти відповідне єдине оптимальне значення тривалості періоду часу між загальними постачаннями для розглянутого завдання мінімізації загальних річних витрат, а потім і інші необхідні параметри оптимальної стратегії.

Контрольні запитання і завдання

1. У чому особливості моделі зі знижкою на ціну замовлення?
2. Запишіть та прокоментуйте завдання мінімізації витрат на управління запасами з урахуванням модифікації базової моделі з урахуванням знижок на ціну ресурсу залежно від обсягу постачання.
3. Запишіть та прокоментуйте завдання мінімізації витрат на управління запасами з урахуванням модифікації базової моделі залежно від витрат витрат замовлення.
4. Запишіть та прокоментуйте завдання мінімізації сумарних витрат на управління запасами з урахуванням модифікації базової моделі залежно від річних витрат на зберігання одиниці ресурсу C_h, що можуть залежати від обсягу замовлення.
5. Поясніть як зміна ставки на транспортування може суттєво впливати на зміну транспортних витрат і загальних логістичних витрат, тобто впливати на зміну оптимальних параметрів закупівлі.
6. У чому полягають основні відмінності багатономенклатурної моделі управління запасами від базової моделі.

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Для отримання знижки розмір замовлення повинен бути:

а) не меншим, ніж обумовлене умовами знижки відповідне граничне значення для обсягу замовлення;

б) строго дорівнювати значенню, вказаному у договорі куплі-продажу;

в) не більшим, ніж обумовлене умовами знижки відповідне граничне значення для обсягу замовлення;

г) бути рівним відповідному граничному значенню для обсягу замовлення;

д) значно перевищувати відповідне граничне значення для обсягу замовлення.

2. Вартість одиниці ресурсу при розгляді задачі мінімізації сумарних річних втрат необхідно розглядати як:

а) «Лінійну» функцію змінної q;

б) «Ступінчасту» функцію змінної q;

в) «Колоподібну» функцію змінної q;

г) «Гіперболічну» функцію змінної q;

д) «Параболічну» функцію змінної q.

3. Задача мінімізації сумарних річних втрат може бути записана як:

а) $C_0(q)\cdot(D\cdot q)+C_h/(q/2)+C_{\Pi}\cdot D\to\max\limits_{0<q<D}$;

б) $C_0(q)/(D/q)+C_h/(q\cdot 2)+C_{\Pi}\cdot D\to\min\limits_{0<q<D}$;

в) $C_0(q)/(D/q)+C_h\cdot(q/2)+C_{\Pi}/D\to\max\limits_{0<q<D}$;

г) $C_0(q)\cdot(D/q)+C_h\cdot(q\cdot 2)+C_{\Pi}/D\to\min\limits_{0<q<D}$;

д) $C_0(q)\cdot(D/q)+C_h\cdot(q/2)+C_{\Pi}\cdot D\to\min\limits_{0<q<D}$.

4. Особливістю моделі залежності витрат на зберігання від обсягу поставок є:

а) річні витрати зберігання партії ресурсу C_h можуть залежати від обсягу замовлення;

б) річні витрати зберігання партії ресурсу C_h можуть бути незалежними від обсягу замовлення;

в) річні витрати зберігання одиниці ресурсу C_h можуть залежати від обсягу замовлення;

г) річні витрати зберігання одиниці ресурсу C_h можуть бути незалежними від обсягу замовлення;

д) річні витрати зберігання одиниці ресурсу C_h і обсяг замовлення - невзаємопов'язані.

5. При будь-якому фіксованому вказаному значенні (задача мінімізації сумарних річних втрат) сумарні річні витрати як функція змінної q будуть представлені як:

а) випуклою вверх лінією;

б) випуклою вниз лінією;

в) випуклою вверх параболою;

г) випуклою вниз параболою;

д) розтягнутою параболою.

Практичні завдання

Задача 4.1

Нехай витрати на замовлення дорівнюють 10 грн., витрати на зберігання ресурсу 1 грн. на добу, інтенсивність споживання товару 5 шт. на день, ціна товару – 2 грн. за штуку, а при обсязі закупівлі 15 шт. і більше – 1 грн.. Визначте аналітично і графічно оптимальний розмір замовлення, ціну покупки і витрати на УЗ.

Задача 4.2

Побудуйте графік загальних річних витрат на УЗ для задачі 3.1 (q <200 шт.) З урахуванням витрат власника магазина на закупівлю пакетів горішків постачальника (формули 4.3). Графічно визначте найбільш вигідний обсяг замовлення, якщо горішки відпускається упаковками по 90 шт.

Задача 4.3

Розглянемо задачу 3.1. Нехай постачальник горішків в пакетах надає такі знижки

Таблиця 4.1 – Вихідні данні

Розмір замовлення	Ціна, грн./шт.
1 – 199	2
200 – 499	1,96 (2% знижки)
500 і більше	1,92 (4% знижки)

Чи слід власнику магазина скористатися однією з знижок, що надаються постачальником? Які при цьому будуть розмір замовлення і загальні витрати на УЗ?

Задача 4.4

Розрахувати параметри системи керування запасами, якщо необхідні параметри наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Параметри аналізованих ресурсів

Ресурс	1	2	3
Споживання D_i (од. продукції)	$D_1 = 12000$	$D_2 = 25000$	$D_3 = 6000$
Витрати C_{hi} (грн/ на рік)	$Ch_1 = 0,6$	$Ch_2 = 0,4$	$Ch_3 = 1,2$
Витрати C_{0i} (грн)	$C_{01} = 20$	$C_{02} = 20$	$C_{03} = 20$
Вартість од. ресурсу $C_{пi}$ (грн)	$C_{П1} = 3$	$C_{П2} = 2$	$C_{П3} = 6$

ТЕМА 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Вступ до теорії випадкових процесів
5.2 Основні визначення
5.3 Дискретний марківський процес

5.1 Вступ до теорії випадкових процесів

Випадкові процеси являють собою спеціальний вид ймовірнісних моделей різних процесів, що протікають в економічних системах.

Марківські процеси є основою теорії масового обслуговування, яка охоплює дуже широкий клас економічних задач, без вирішення яких неможливе ефективне управління в сучасній економіці.

5.2 Основні визначення

Випадковою величиною називається величина, яка в результаті досвіду (спостереження) може приймати одне з числових значень з деякої відомої множини, але заздалегідь невідомо яке саме.

Випадковим процесом або випадковою функцією S (t), де t-час, називається функція, яка кожному моменту часу t з тимчасового інтервалу спостереження ставить у відповідність єдину випадкову величину S (t).

Випадкова функція описує зміну випадкової величини в процесі спостереження. Для подальшого вивчення теорії випадкових процесів необхідно розглянути поняття системи.

Під **системою S** розуміється всяка цілісна множина взаємопов'язаних елементів, яку не можна розбити на незалежні підмножини.

Зв'язки між елементами можуть бути односторонніми, двосторонніми, а також як безпосередніми і опосередкованими.

На рисунку 5.1 зображено приклад системи, де протікає випадковий процес.

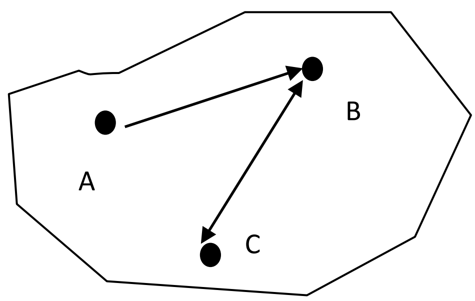


Рисунок 5.1 – Приклад системи, де протікає випадковий процес

Елементи системи та зв'язки між ними можуть змінюватися у часі і характеризують в кожний момент часу t стан S (t) системи S.

Якщо система S з плином часу t змінює свої стани S (t) випадковим чином, то кажуть, що **в системі S протікає випадковий процес**.

Нехай S_1, S_2, ..., S_n можливі стани системи S, і в будь-який момент часу t система перебуває тільки в одному з них, тобто для будь-якого моменту часу t існує єдиний стан S_i, таке, що $S(t) = S_i$.

Прикладом може слугувати гра з підкиданням монети n разів. Кожне випробування можна розглядати як деякий момент часу. Отримана послідовність випробувань утворює випадковий процес. Станом системи при будь-якому випробуванні є або герб, або решка.

5.3 Дискретний марківський процес

Якщо множина станів системи не більш ніж лічильна (тобто може бути перерахована), то така множина називається дискретною. В іншому випадку (коли має місце потужність континіуму) множина станів системи безперервна.

У дискретних множинах стан системи змінюється стрибкоподібно (або миттєво). У безперервних множинах зміна стану відбувається безперервно.

Процес, в результаті якого система з дискретною множиною станів, в деякі моменти часу випадковим чином стрибкоподібно переходить з одного стану в інший називається **дискретним випадковим процесом**.

Випадковий процес, що протікає в системі S, називається **марківським,** якщо він має властивість відсутності післядії, яка полягає в тому, що для кожного моменту t_0 ймовірність будь-якого стану S(t) системи S у майбутньому ($t > t_0$) залежить тільки від стану в сьогоденні $S(t_0)$ (при $t = t_0$) і не залежить від того як розвивався процес в системі S в минулому (при $t < t_0$).

Властивість відсутності післядії називають також властивістю відсутності пам'яті (системи без пам'яті), процеси без пам'яті. Для опису дискретних випадкових процесів використовується граф станів системи.

Приклад 5.1

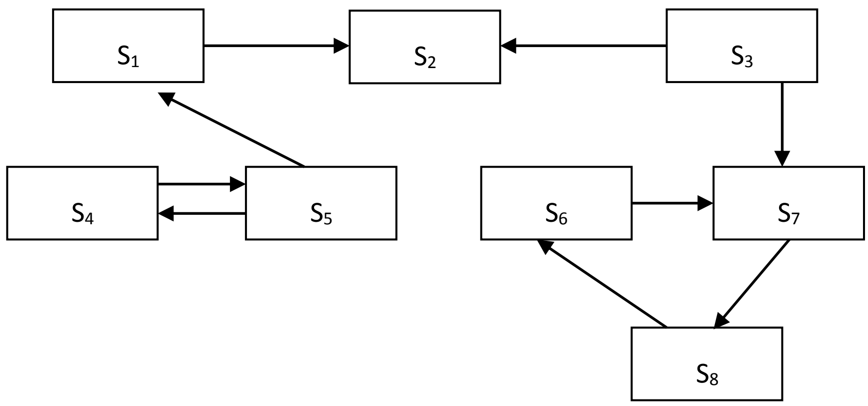


Рисунок 5.2 – Граф станів системи

У прикладі розглядається дискретна система з 8-ма можливими станами $S_1 – S_8$, і з можливими безпосередніми переходами:

$S_1 \to S_2$, $S_3 \to S_2$, $S_3 \to S_7$, $S_4 \to S_5$, $S_5 \to S_4$, $S_5 \to S_1$, $S_6 \to S_7$, $S_7 \to S_8$, $S_8 \to S_6$.

Група станів називається **множиною без виходу**, якщо система одного разу потрапивши в нього, вже ніколи не може вийти з цієї множини. Множина без виходу називається також **поглинаючою множиною, або узагальненою пасткою**.

Група станів називається **множиною без входу**, якщо система, перебуваючи в цій множині, може з будь-якого її стану перейти за кінцеве число кроків в будь-який інший її стан, але, вийшовши якось із цієї множини, система вже ніколи в неї не повернеться.

Множину без входу також називають **нестійкою або несталою множиною**. Якщо множина без входу складається з єдиного стану, то такий стан називається **станом без входу, нестійким, несталим**.

Система називається **ергодичною,** якщо вона з будь-якого свого стану може перейти за кінцеве число кроків в будь-який інший стан ("ергос" (грец.) – робота).

Приклад 5.2

Граф станів ергодичної системи

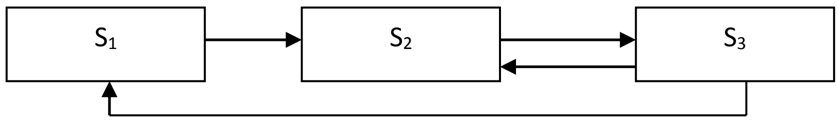


Рисунок 5.3– Граф станів ергодичної системи

Для побудови графа станів дискретного марківського процесу необхідно спочатку чітко описати кожний з можливих станів та охарактеризувати їх кількість, в простому випадку $S_i = i$.

Тоді процес S(t) буде представляти дискретну випадкову величину з множиною значень можливих станів {1, 2, ...}.

Дискретну випадкову величину S (t_0) називають **перетином випадкового процесу**, що протікає в системі S в момент часу t_0.

Реалізацією випадкового процесу в системі S за часовий проміжок $[t_0, t_0 + \Delta t]$ називається не випадкова функція, значення якої збігається з випадковою величиною S (t) в кожний момент часу $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$.

Приклад 5.3

Розглянемо реалізацію випадкового процесу на інтервалі $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ($\Delta t > 0$) в системі, граф якого наведено в прикладі 1.2.

Таблиця 5.1 – Приклад реалізації випадкового процесу (таблична форма)

Проміжок часу	Стан системи
$[t_0, t_1)$ $(t_0<t_1<t_0+\Delta t)$	S_2
$[t_1, t_2)$ $(t_1<t_2<t_0+\Delta t)$	S_3
$[t_2, t_3)$ $(t_2<t_3<t_0+\Delta t)$	S_1
$[t_3, t_4)$ $(t_3<t_4<t_0+\Delta t)$	S_2
$[t_4, t_5)$ $(t_4<t_5<t_0+\Delta t)$	S_3
$[t_5, t_0+\Delta t]$	S_2

Оцінюючи кожний стан його номером, отримаємо реалізацію випадкового процесу в проміжку часу

$[t_0, t_0 + \Delta t]$ у вигляді ступінчастої розривної функції.

$$S(t) = \begin{cases} 2, & t_0 \le t < t_1 \\ 3, & t_1 \le t < t_2 \\ 1, & t_2 \le t < t_3 \\ 2, & t_3 \le t < t_4 \\ 3, & t_4 \le t < t_5 \\ 2, & t_5 \le t < t_0 + \Delta t \end{cases} \tag{5.1}$$

Графік якої буде мати вигляд, представлений на рис. 5.4.

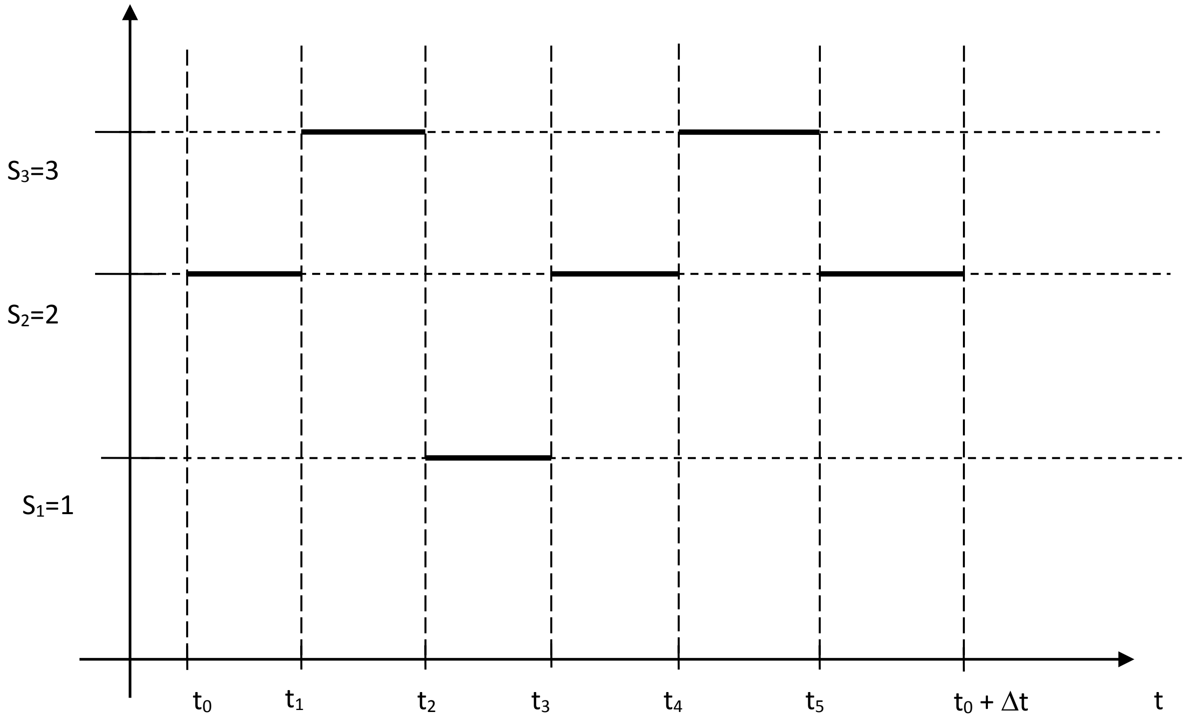


Рисунок 5.4 – Приклад реалізації випадкового процесу (графічна форма)

Контрольні запитання ізавдання

1. Надайте визначення випадкового процесу і приклади.
2. Як формулюється властивість відсутності післядії?
3. Надайте визначення марківського випадкового процесу.
4. Які випадкові процеси називаються дискретними?
5. Що розуміється під графом стану системи?
6. Дайте визначення множинам без входу і множинам без виходу.
7. Надайте визначення ергодичної системи.
8. Що називається реалізацією випадкового процесу за проміжок часу?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Процес з безперервним часом –це:

а) Випадковий процес, що протікає в системі, якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу.

б) Випадковий процес, що протікає в системі, якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в будь-які, заздалегідь відомі, випадкові моменти часу.

в) Випадковий процес, що протікає в системі, якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в будь-які, заздалегідь невідомі,але заздалегідь зазначені моменти часу.

г) Випадковий процес, що протікає в системі, якщо переходи системи з одного стану в інший повинні відбуватися в певні, заздалегідь відомі, випадкові моменти часу.

д) Випадковий процес, що протікає в системі, якщо переходи системи з одного стану в інший не можуть відбуватися в будь-які випадкові моменти часу.

2. Ймовірність стану Pi (t) є:

а) Ймовірнісною функцією стану;

б) Ймовірнісною функцією переходів системи с одного стану в інший;

в) Ймовірнісною функцією часу t ≥ 0;

г) Ймовірнісною функцією настання переходу системи в інший стан в зазначений момент часу;

д) Ймовірнісною функцією настання переходу системи в інший стан в будь-який момент часу;

3. Якщо всі ймовірності стану Pi (t), i = 1, 2, ..., n, то дискретний марківський процес з безперервним часом вважається:

а) Повністю невизначеним;

б) Частково невизначеним;

в) Повністю визначеним;

г) Частково визначеним;

д) $\forall t > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} P_i(t) \neq 1$;

4. Щільністю ймовірності переходу системи S зі стану Si в стан Sj в момент часу t називається величина:

а) $P_{ij}(t;\Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t$, при Δ t $\to$ min;

б) $P_{ij}(t;\Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) / \Delta t$, при Δ t $\to$ 0;

в) $P_{ij}(t;\Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) / \Delta t$, при Δ t $\to$ min;

г) $P_{ij}(t;\Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t$, при Δ t $\to$ max;

д) $P_{ij}(t;\Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t$, при $\Delta t \to 0$;

Практичні завдання

Задача 5.1

Для виявлення фальшивих купюр у касі банку використовується детектор валют. Інтерес становлять три його стани:

– детектор справний, але не експлуатується;
– детектор зайнятий виявленням фальшивих купюр;
– детектор не експлуатується через несправність.

Припустимо, що детектор може виходити з ладу тільки під час експлуатації.

Охарактеризуйте процес, який протікає в системі, у якості якої виступає детектор. Побудуйте граф станів системи S і вкажіть стан й множини без входу й без виходу, якщо такі існують. Чи є дана система ергодичною?

Побудуйте реалізацію даного процесу за вибраний Вами довільний проміжок часу, якщо в початковий момент часу детектор був справний і перебував у стані експлуатації.

Задача 5.2

Банк, який приймає внески від фізичний осіб, використовує для перевірки купюр детектор валют SUPER SCAN і ультрафіолетовий детектор TUV-2, який по якості уступає першому.

Будемо розглядати наступні стани:

для детектора SUPER SCAN:

1 - не експлуатується;
2 - перебуває в експлуатації;

для ультрафіолетового детектора TUV-2:

- справний, але не експлуатується;
- експлуатується;
- не експлуатується через несправність.

У якості системи S розглянемо обидва детектора (тобто система складається із двох «вузлів»).

Охарактеризуйте процес, який протікає в системі S. Складіть матрицю станів системи S і вкажіть її розмір. Побудуйте граф станів системи S із припущенням, що кожний з детекторів може виходити з ладу тільки під час експлуатації й одночасна зміна станів обох детекторів малоймовірна. З'ясуйте, чи є серед станів системи S стани й множини без виходу й без входу. Є чи ергодичною система S? Побудуйте яку-небудь реалізацію даного процесу, вибравши довільно будь-який проміжок часу й стан системи S на початку цього проміжку.

ТЕМА 6. ДИСКРЕТНИЙ МАРКІВСЬКИЙ ПРОЦЕС З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

6.1 Дискретний марківський процес з дискретним часом.
6.2 Матриця перехідних ймовірностей
6.3 Однорідні марківські ланцюги
6.4 Неоднорідні марківські ланцюги

6.1 Дискретний Марківський процес з дискретним часом

Марківський випадковий дискретний процес, що протікає в системі S, характеризується станами і моментами часу, в які відбувається перехід системи з одного стану в інший. Такі моменти часу можуть бути заздалегідь відомими або випадковими.

Випадковий процес, що протікає в деякій системі S, називається **процесом з дискретним часом**, якщо переходи системи з одного стану в інший відбуваються в заздалегідь відомі моменти часу t_0, t_1, …, t_k, які називають **кроками** або **етапами процесу**. У проміжки часу між суміжними кроками стан системи не змінюється.

Випадковий процес, що протікає в деякій системі S, називається **процесом з безперервним часом**, якщо переходи системи з одного стану в інший можливі в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу.

Розглянемо Марківський випадковий процес з дискретним часом.

Нехай S_1, S_2, …, S_k – можливі стани системи S. Переходи системи з одного стану в інший відбуваються тільки в моменти часу t_0, t_1, …, t_k. У момент часу $t \in [t_k, t_k +1)$, k = 1, 2, 3 …, система знаходиться в стані $S(t) = S(t_k)$ і процес можна розглядати як випадкову функцію кроків tk або номерів кроків.

Позначимо $S_i(k)$ (i = 1, 2, … n, k = 1, 2, …) подію, що складається в тому, що система S з k-го кроку до (k+1)-го перебуває в стані S_i. Тоді випадковий процес з дискретним часом можна представляти випадковою послідовністю (за індексом k) випадкових подій $S_i(k)$, i = 1, 2, …, n; k =1, 2 …, що зветься **ланцюгом**.

Випадкова послідовність називається **марківським ланцюгом**, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S_i в будь-який стан S_j не залежить від того коли і як система S опинилася в стані S_i.

6.2. Матриця перехідних ймовірностей.

Основними характеристиками марківських ланцюгів є ймовірності $p_i(k) = p(S_i(k))$, (i = 1, 2, …, n; k = 1, 2 …) подій $S_i(k)$.

Ймовірності $p_i(k)$, (i = 1, 2, …, n; k = 1, 2 …) називаються **ймовірностями станів**.

Для обчислення ймовірностей стану $p_i(k)$ використовуються перехідні ймовірності, які визначаються наступним чином.

Перехідною ймовірністю $p_{ij}(k)$ з i-го стану в j-ий стан для k-го кроку (i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, n; k = 1, 2 …) називають ймовірність безпосереднього переходу системи S в момент часу t_k зі стану S_i в стан S_j.

Якщо i = j, то перехідна ймовірність $p_{ij}(k) = p_{ii}(k)$ називають ймовірністю затримки системи S у стані S_i.

У будь-який момент часу t, система S може перебувати тільки в одному з станів S_1, S_2, …, S_n, то при кожному k=1, 2, … події $S_1(k)$, $S_2(k)$, …, $S_n(k)$ несумусні і утворюють **повну групу подій**.

Реалізацію дискретного випадкового процесу з дискретним часом за будь-який кінцевий проміжок часу можна представити невипадковою кінцевої послідовністю (ланцюгом) за індексом k подій $S_i(k)$, (i = 1, 2, …, n; k = 1, 2 …)

6.3. Однорідні Марківські ланцюги.

Якщо перехідні ймовірності не залежать від кроків k, то марківський ланцюг називається **однорідним**, $p_{ij}(k) = p_{ij}$.

Перехідні ймовірності для однорідного марківського ланцюга можна представити у вигляді квадратної матриці n-го порядку.

$$P = \left(p_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (6.1)$$

Елементи матриці P не залежать від номера кроку k і її порядок визначається числом можливих станів системи S, на головній діагоналі знаходяться ймовірності затримки стану системи S.

Перехідна ймовірність як **умовна ймовірність**

$$p_{ij} = p\left(S_j(k)/S_i(k-1)\right). \qquad (6.2)$$

Події S_1 (k), …, S_n (k) несумісні, утворюють повну групу подій, і

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (6.3)$$

що означає рівність 1 суми елементів кожного з рядків матриці P.

Матриця, кожен елемент якої невід’ємний і сума елементів кожного рядка дорівнює 1, називається **стохастичною**.

Якщо стохастична матриця має властивість, яка визначається так: сума елементів кожного з стовпців дорівнює 1, то така матриця називається **двостохастичною.**

Граф станів системи S із зазначенням перехідних ймовірностей називається **розміченим**.

Ймовірності переходів, що дорівнюють 0 і ймовірності затримок на розміченому графі не позначаються.

В силу властивостей стохастичної матриці P ймовірності затримки можна обчислити за формулою:

$$p_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ij}, \quad i = 1, ..., n. \qquad (6.4)$$

Приклад 6.1

Розмічений граф станів системи.

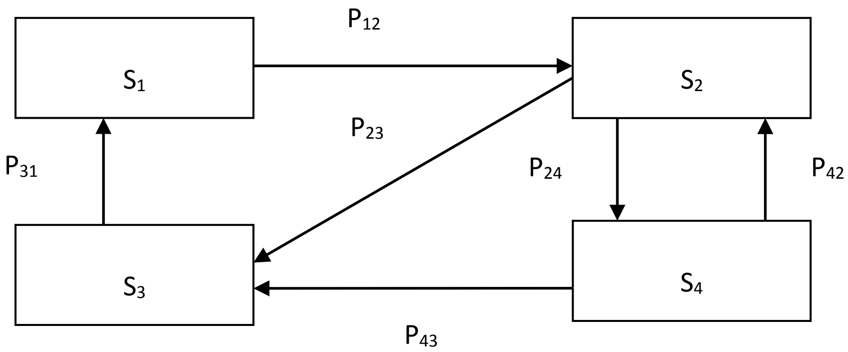


Рисунок 6.1 – Розмічений граф системи

Вектор-рядок ймовірностей стану (p_1 (0), p_1 (0), …, p_n (0)) в початковий момент часу t = 0, що безпосередньо передує першому кроку, називається **вектором початкового розподілу ймовірностей**.

Властивості вектору початкового розподілу ймовірностей:

1. Сума ймовірностей дорівнює 1

$$p_1(0) + p_2(0) + \ldots + p_n(0) = 1. \qquad (6.5)$$

2. Якщо в початковий момент часу t = 0 система S перебувала в стані S_m, то p_m (0) = 1 і початковий розподіл ймовірностей $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$, …, $p_m(0) = 1$, $p_{m+1}(0) = 0$, …, $p_n(0) = 0$.

3. Якщо відомо початковий розподіл ймовірностей і матриця перехідних ймовірностей, то можна обчислити ймовірності стану системи для будь-якого k-го кроку.

Теорема 6.1. Для однорідного Марківського ланцюга вектор-рядок ймовірностей стану від k-го до (k + 1)-го кроку дорівнює добутку вектор-рядку ймовірностей стану від (k – 1)-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей.

$$\left(p_1(k), p_2(k), \ldots, p_n(k)\right) = \left(p_1(k-1), p_2(k-1), \ldots, p_n(k-1)\right) \cdot P. \qquad (6.6)$$

Доказ

Добуток вектор-рядку ймовірностей стану розмірності (1×n) на матрицю розмірності (n × n) визначає вектор рядок розмірності (1×n) ймовірностей станів системи на k-му кроці.

Для кожного кроку k = 1, 2, … розглянемо n гіпотез H_i (k-1), i = 1, 2, …, n, що складаються в тому, що від (k-1)-го кроку до k-го система S перебувала в стані S_i. Ці гіпотези для кожного кроку неспільні і утворюють повну групу подій, з ймовірностями стану з (H_i (k-1)) = $з_i$ (k – 1).

Умовна ймовірність з($S_j(k)/S_i(k–1)$) є перехідною ймовірністю $з_{ij}$ і за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p\left(H_i(k-1)\right) \cdot p\left(S_j(k)/S_i(k-1)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot p_{ij} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.7)$$

що і доводить справедливість формули (6.6), яка є рекурентною і дозволяє обчислювати ймовірності стану системи для будь-якого k-го кроку, і для однорідного Марківського ланцюга справедлива формула

$$\left(p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k)\right) = \left(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0)\right) \cdot P^k .....k = 1,2,... . \quad (6.8)$$

Приклад 6.2

Дискретний марківський процес з дискретним часом для економічної системи. Стан комерційного банку характеризується однією з процентних ставок 2%, 3%, 4% які встановлюються на початку кожного кварталу і можуть змінюватися тільки на початку наступного кварталу.

Стан системи S_1-процентна ставка 2%, S_2-ставка 3%, S_3-ставка 4%.

Аналіз роботи у попередні роки показав, що зміна перехідних ймовірностей з плином часу мала. Визначити ймовірності станів банку на кінець поточного року, якщо в кінці минулого процентна ставка складала 3%, розмічений граф станів мав вигляд:

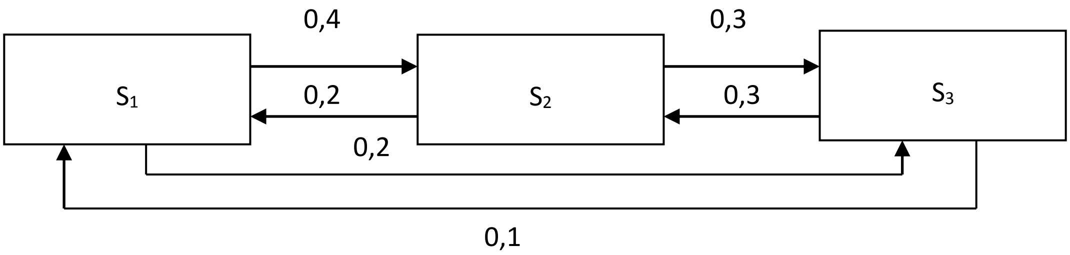


Рисунок 6.2 – Розмічений граф марківського ланцюга

В даному випадку змоделювати поведінку банку на кінець року можна у вигляді однорідного Марківського дискретного випадкового процесу з дискретним часом, або у вигляді однорідного Марківського ланцюга.

За розміченим графом станів складемо матрицю перехідних ймовірностей.

$$P := \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.207 & 0.404 & 0.389 \\ 0.202 & 0.402 & 0.396 \\ 0.195 & 0.396 & 0.409 \end{pmatrix}$$

$(p_1(4), p_2(4), p_3(4)) = (0, 1, 0) * P^4 = (0.2020, 0.4015, 0.3965)$

$p_1(4) = 0.2020$, $p_2(4) = 0.4015$, $p_3(4) = 0.3965$

Найбільш ймовірний стан процентної ставки на кінець року $p_2(4) = 0.4015$ тобто ставка 3%.

6.4. Неоднорідні марківські ланцюги.

Нехай в системі S протікає дискретний Марківський процес з дискретним часом $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ і можливими станами $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Марківський ланцюг називається неоднорідним, якщо перехідні ймовірності залежать від номера кроку k.

Перехідні ймовірності для неоднорідного марківського процесу позначаються $P_{ij}(k)$. Матриця перехідних ймовірностей

$$P(k) = \left(p_{ij}(k)\right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & \ldots & p_{1n}(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(k) & \ldots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}. \qquad (6.9)$$

і як і матриця перехідних ймовірностей для однорідного марківського ланцюга має властивість стохастичної матриці:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \;\; k = 1, 2, \ldots . \qquad (6.10)$$

Визначення вектора стану системи S для неоднорідного марківського ланцюга виконується на підставі результату теореми.

Теорема 6.2.

Для неоднорідного Марківського ланцюга вектор ймовірностей стану від k-го до (k + 1)-го кроку дорівнює добутку вектора ймовірностей від (k – 1)-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей від k-го до (k + 1)-го кроку.

$$(p_1(k), \ldots, p_n(k)) = (p_1(k\text{-}1), \ldots, p_n(k\text{-}1)) * P(k),\; k = 1, 2, \ldots \qquad (6.11)$$

Доказ

Для кожного кроку k = 1, 2, ... розглянемо n гіпотез H_i (k-1), i = 1, 2, ..., n, що складаються в тому, що від (k – 1)-го кроку до k-го система S перебувала в стані S_i. Ці гіпотези для кожного кроку несумісні і утворюють повну групу подій. Ймовірності цих гіпотез $p(H_i(k–1))$ збігаються з ймовірностями стану $p_i(k\text{-}1)$ станів S_i від (k–1)-го до k-го кроку.

$p(H_i(k\text{-}1)) = p_i(k\text{-}1)$ i = 1, 2, ... n; k = 1, 2, ...

Умовна ймовірність $P(S_j(k)/S_i(k–1))$ є умовною ймовірністю P_{ij} (k), яка в даному випадку залежить від кроку k.

За формулою повної ймовірності отримаємо:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p\left(H_i(k-1)\right) \cdot p\left(S_j(k)/S_i(k-1)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) \cdot p_{ij}(k) \quad j = 1, 2, \ldots, n . \qquad (6.12)$$

Дана формула є аналог (6.11) в координатній формі. Як слідство теореми для неоднорідного марківського ланцюга справедлива наступна рекурентна формула:

$$\left(p_1(k), p_2(k), \ldots, p_n(k)\right) = \left(p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)\right) * P(1) \cdot P(2) \ldots\ldots \cdot P(k) \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (6.13)$$

Вираз $P(1) \cdot P(2) \ldots\ldots \cdot P(k)$ є добутком n-мірних, квадратних, стохастичних матриць.

Приклад 6.3

Нехай ми перебуваємо в умовах поведінки банківських відсоткових ставок для випадку однорідних марківських ланцюгів, але перехідні ймовірності залежать від моменту встановлення відсоткових ставок і мають вигляд:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.9 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \end{pmatrix} \qquad P(2) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.6 & 0.0 & 0.4 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$P(3) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.0 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad P(4) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

У даному прикладі зміна відсоткових ставок є дискретним марківським неоднорідним ланцюгом. Розмічені графи стану для кожного з чотирьох кроків будуть мати вигляд:

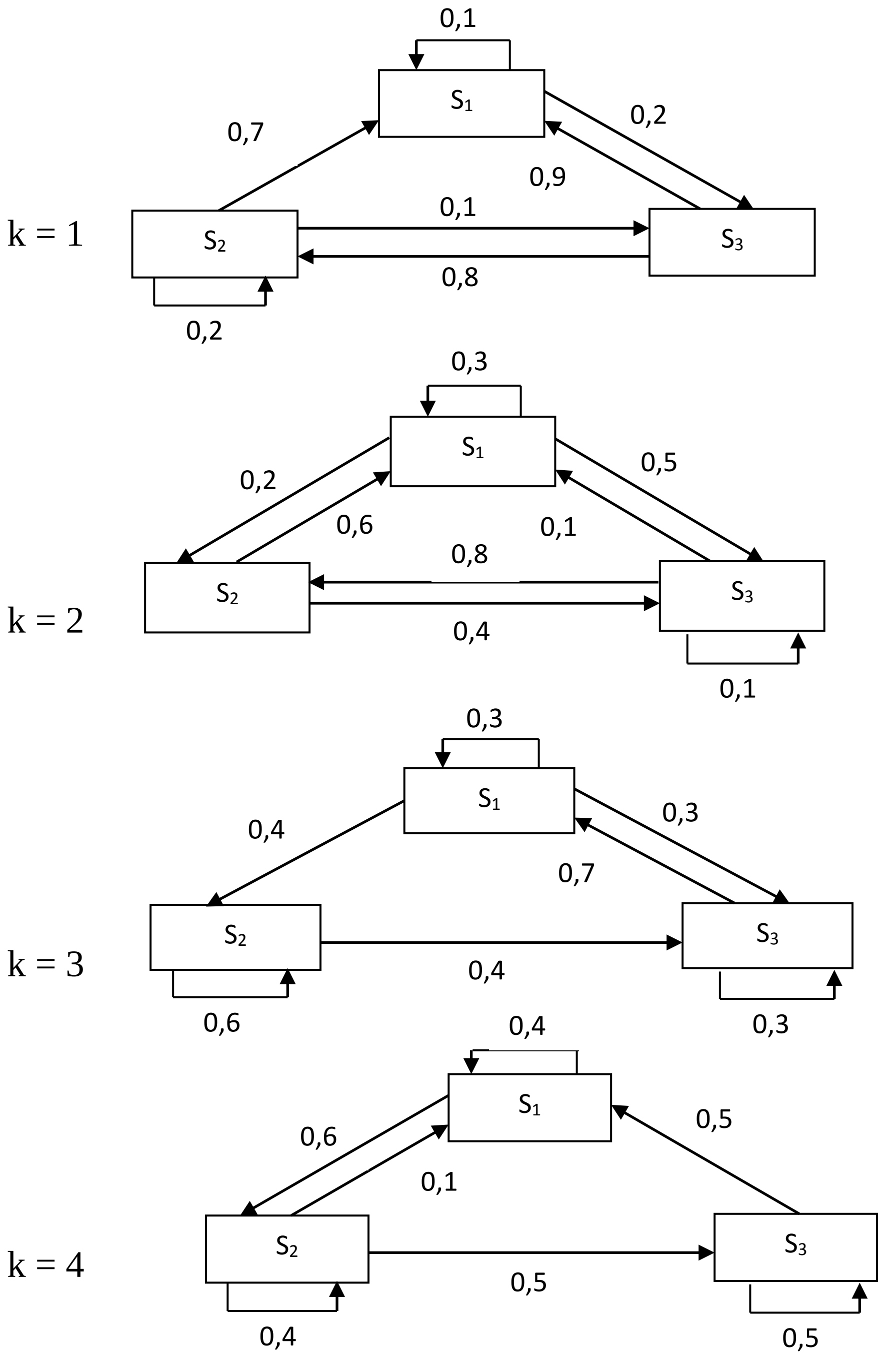


Рисунок 6.3 – Розмічені графи

Згідно умови прикладу ймовірності стану для t = 0 мають вигляд:

$$p(0) = (p_1(0),\ p_2(0),\ p_3(0)) = (0,\ 0,\ 1)$$

Знаходимо

$$P(1)\cdot P(2)=\begin{pmatrix}0,1 & 0,0 & 0,9\\ 0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,2 & 0,8 & 0,0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,6 & 0,0 & 0,4\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,1\cdot 0,3+0,0\cdot 0,6+0,9\cdot 0,1 & 0,1\cdot 0,2+0,0\cdot 0,0+0,9\cdot 0,8 & 0,1\cdot 0,5+0,0\cdot 0,4+0,9\cdot 0,1\\ 0,7\cdot 0,3+0,2\cdot 0,6+0,1\cdot 0,1 & 0,7\cdot 0,2+0,2\cdot 0,0+0,1\cdot 0,8 & 0,7\cdot 0,5+0,2\cdot 0,4+0,1\cdot 0,1\\ 0,2\cdot 0,3+0,8\cdot 0,6+0,0\cdot 0,1 & 0,2\cdot 0,2+0,8\cdot 0,0+0,0\cdot 0,8 & 0,2\cdot 0,5+0,8\cdot 0,4+0,0\cdot 0,8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,12 & 0,74 & 0,14\\ 0,34 & 0,22 & 0,44\\ 0,54 & 0,04 & 0,42\end{pmatrix},$$

$$P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)=\begin{pmatrix}0,12 & 0,74 & 0,14\\ 0,34 & 0,22 & 0,44\\ 0,54 & 0,04 & 0,42\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,3\\ 0,0 & 0,6 & 0,4\\ 0,7 & 0,0 & 0,3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,12\cdot 0,3+0,74\cdot 0,0+0,14\cdot 0,7 & 0,12\cdot 0,4+0,74\cdot 0,6+0,14\cdot 0,0 & 0,12\cdot 0,3+0,74\cdot 0,4+0,14\cdot 0,3\\ 0,43\cdot 0,3+0,22\cdot 0,0+0,44\cdot 0,7 & 0,34\cdot 0,4+0,22\cdot 0,6+0,44\cdot 0,0 & 0,34\cdot 0,3+0,22\cdot 0,4+0,44\cdot 0,3\\ 0,54\cdot 0,3+0,04\cdot 0,0+0,42\cdot 0,7 & 0,54\cdot 0,2+0,04\cdot 0,6+0,42\cdot 0,0 & 0,54\cdot 0,3+0,04\cdot 0,4+0,42\cdot 0,3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,134 & 0,492 & 0,374\\ 0,410 & 0,268 & 0,322\\ 0,456 & 0,240 & 0,304\end{pmatrix},$$

$$P(1)\cdot P(2)\cdot P(3)\cdot P(4)=\begin{pmatrix}0,134 & 0,492 & 0,374\\ 0,410 & 0,268 & 0,322\\ 0,456 & 0,240 & 0,304\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,4 & 0,6 & 0,0\\ 0,1 & 0,4 & 0,5\\ 0,5 & 0,0 & 0,5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,134\cdot 0,4+0,492\cdot 0,1+0,374\cdot 0,5 & 0,134\cdot 0,6+0,492\cdot 0,4+0,374\cdot 0,0 & 0,134\cdot 0,0+0,492\cdot 0,5+0,374\cdot 0,5\\ 0,410\cdot 0,4+0,268\cdot 0,1+0,322\cdot 0,5 & 0,410\cdot 0,6+0,268\cdot 0,4+0,322\cdot 0,0 & 0,410\cdot 0,0+0,268\cdot 0,5+0,322\cdot 0,5\\ 0,456\cdot 0,4+0,240\cdot 0,1+0,304\cdot 0,5 & 0,456\cdot 0,6+0,240\cdot 0,4+0,304\cdot 0,0 & 0,456\cdot 0,0+0,240\cdot 0,5+0,304\cdot 0,5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,2898 & 0,2772 & 0,4330\\ 0,3518 & 0,3532 & 0,2950\\ 0,3584 & 0,3996 & 0,2720\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{P1}\cdot \mathrm{P2}\cdot \mathrm{P3}\cdot \mathrm{P4}=\begin{pmatrix}0.2898 & 0.2772 & 0.433\\ 0.3518 & 0.3532 & 0.295\\ 0.3584 & 0.3696 & 0.272\end{pmatrix}$$

$$(p_1(4),p_2(4),p_3(4)) = (p_1(0),p_2(0),p_3(0))\cdot p(1)\cdot p(2)\cdot p(3)\cdot p(4)=\begin{pmatrix}0.3584 & 0.3696 & 0.272\end{pmatrix}$$

Найбільш вірогідним станом буде S_2 3% ставки.

Контрольні запитання і завдання

1. Визначення випадкового процесу з дискретним часом.
2. Визначення випадкового процесу з безперервним часом

3. Визначення дискретного випадкового процесу

4. Визначення Марківського ланцюга.

5. Визначення ймовірностей стану для дискретного випадкового процесу з дискретним часом.

6. Що таке перехідні ймовірності та ймовірності стану?

7. Визначення однорідного Марківського ланцюга.

8. Як можна визначити значення перехідних ймовірностей?

9. Як обчислюються ймовірності стану для однорідного Марківського ланцюга?

10. Визначення неоднорідного Марківського ланцюга.

11. У чому полягає відмінність неоднорідного і однорідного Марківського ланцюга?

12. Що означає вектор початкового розподілу ймовірностей?

13. Як обчислюються ймовірності стану для неоднорідного Марківського ланцюга на k-му кроці?

14. Чи є стохастичною матрицею добуток декількох стохастичних матриць?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Якщо за будь-яких $i \neq j$; i, j = 1, 2, ..., n щільність ймовірностей переходів не залежить від часу t, λ ij = λ ij (t), то Марківський процес є:

а) неоднорідним;

б) однорідним;

в) частково визначеним;

г) частково невизначеним;

д) невизначеним.

2. При виконанні нормувальної умови Pi1 (t) + Pi2 (t) + ... + Pin (t) = 1 і ймовірність переходу системи S в інший j-й стан точно в момент часу t дорівнює:

а) 0,25;

б) 0,5;

в) 0,75;

г) 1,00;

д) 0;

3. Якщо хоча б одне λ ij змінюється з часом t, то Марківський процес називається:

а) неоднорідним;

б) однорідним;

в) частково визначеним;

г) частково невизначеним;

д) невизначеним.

4. Щільністю ймовірності переходу системи S зі стану Si в стан Sj в момент часу t називається величина:

а) $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$;

б) $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t - 1}$;

в) $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 1} \dfrac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$;

г) $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 1} \dfrac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t - 1}$;

д) $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to \infty} \dfrac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$.

5. За допомогою щільності ймовірності стану λ ij, i, j = 1, 2, ..., n можна визначити:

а) кількість станів Pi (t), i = 1, 2, ... n;

б) кількість переходів системи з одного стану в інший;

в) момент часу, в який система змінила свій стан;

г) загальну кількість часу, що необхідно для повернення системи у початковий стан;

д) ймовірності станів Pi (t), i = 1, 2, ... n.

Практичні завдання

Задача 6.1

Стани банку $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$ та $\mathbf{s_3}$ характеризуються відповідними процентними ставками 17%, 19% і 25%, які встановлюються на початку року і не змінюються до наступного року. Перехідні ймовірності постійні. Охарактеризуйте процес, що протікає в системі, спрогнозуйте яка ставка буде у 2015 року, якщо у 2011 році процентна ставка була 17%, а розмічений граф станів системи наданий на рисунку 6.4:

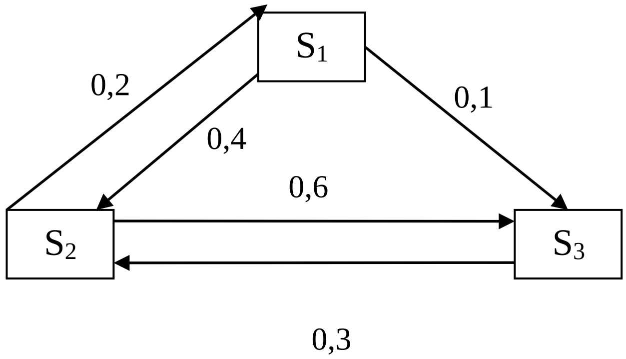


Рисунок 6.4 – Розмічений граф станів системи

ТЕМА 7. ДИСКРЕТНИЙ МАРКІВСЬКИЙ ПРОЦЕС З БЕЗПЕПЕРВНИМ ЧАСОМ

7.1 Основні поняття дискретного марківського процесу з безперервним часом

7.2 Визначення ймовірності стану для однорідного дискретного марківського процесу з безперервним часом

7.3 Система рівнянь Колмогорова для обчислення граничних ймовірностей стану

7.1 Основні поняття дискретного марківського процесу з безперервним часом

Випадковий процес, що протікає в системі, називається **процесом з безперервним часом**, якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу.

Нехай $S_1, S_2, ..., S_n$ –стани системи S.

Ймовірність $p_i(t) = p\ (S_i\ (t))$, $i = 1, 2, ..., n$, $t \geq 0$ події $S_i\ (t)$ складається в тому, що система в момент часу t перебуває в стані S_i, називається **ймовірністю і -го стану системи в момент часу t**.

Ймовірність стану $p_i(t)$ є **ймовірнісною функцією** часу $t \geq 0$.

Дискретний марківський процес з безперервним часом вважається **повністю визначеним**, якщо знайдені всі ймовірності стану $p_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Події $S_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ є несумісними, утворюють повну групу подій і

$$\forall t > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} P_i(t) = 1. \qquad (7.1)$$

Нехай $P_{ij}(t)$ ймовірності переходу системи S у момент часу t зі стану Si в стан S_j при $i \neq j$ і ймовірності затримки, якщо $i = j$.

Якщо в момент часу t система знаходиться в і-му стані, то можна вважати, що в цей момент часу відбулась затримка стану і, тобто $P_{ii}(t) = 1$.

З урахуванням виконання нормувальної умови $P_{i1}(t) + P_{i2}(t) + ... + P_{in}(t) = 1$ ймовірність переходу системи S в інший j-й стан **точно в момент часу t** дорівнює нулю $Pij\ (t) = 0$, $i \neq j$.

Ймовірності переходу для систем з безперервним часом вже не є тими характеристиками, які визначають процес змін у системі S, на відміну від систем з дискретним часом в яких ймовірності переходу є визначальними характеристиками.

У процесах з безперервним часом замість перехідних ймовірностей розглядаються **щільності ймовірності переходу** λ_{ij} зі стану S_i в стан S_j.

Щільності ймовірності переходу визначаються наступним чином.

Нехай $P_{ij}(t;\ \Delta t)$, $i \neq j$, $\Delta t > 0$ ймовірність того, що система S, яка знаходиться в момент часу t в стані S_i, за проміжок часу $[t,\ t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$ перейде в інший ($i \neq j$) стан.

Рівність $P_{ij}\ (t; \Delta t) = 0$, $(i \neq j)$ буде виконуватися у наступних випадках:

– система S в момент часу t не перебуває в стані S_i;

– система S в момент часу t перебуває в стані S_i, але за час [t, t + Δ t] переходить в стан S_k, який відмінний від стану $S_j (j \neq k)$;

– система S в момент часу t перебуває в стані S_i і залишається в цьому ж стані в проміжок часу [t, t + Δt].

Для індексів i = j $P_{ii}(t, \Delta t) = 0$, i = 1, 2, ..., n так як переходу в інші стани не відбувається.

Щільністю ймовірності переходу системи S зі стану S_i в стан S_j в момент часу t називається величина

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t}, \quad (7.2)$$

або

$$P_{ij}(t; \Delta t) \approx \lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t \text{ , при } \Delta t \to 0. \quad (7.3)$$

Щільності ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$, залежать від часу, невід’ємні, на відміну від ймовірності можуть бути більше 1, $\lambda_{ii}(t) = 0$, i = 1, 2, ..., n.

7.2 Визначення ймовірності стану для однорідного дискретного марківського процесу з безперервним часом

Якщо за будь-яких $i \neq j$; i, j = 1, 2, ..., n щільність ймовірностей переходів не залежить від часу t, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$, то марківський процес з безперервним часом називається **однорідним.** Якщо хоча б одне λ_{ij} змінюється з часом t, то процес називається **неоднорідним.**

Граф станів марківського процесу з безперервним часом, із зазначенням щільності ймовірності переходу λ_{ij} називається розміченим.

Приклад 7.1

Розмічений граф станів марківського однорідного процесу з безперервним часом

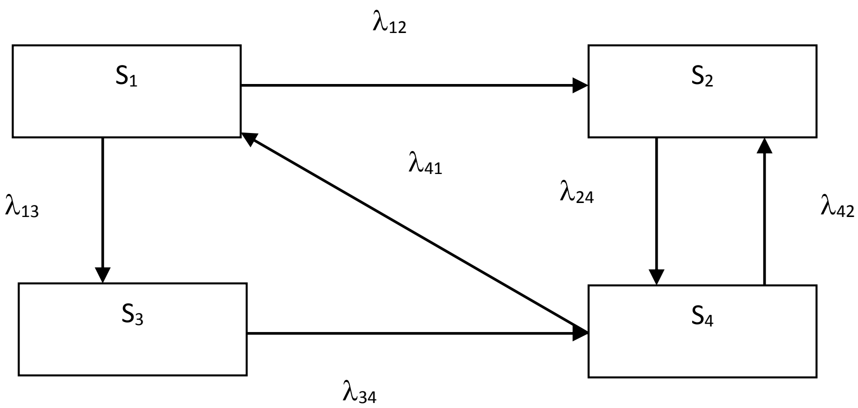


Рисунок 7.1 – Граф станів системи з безперервним часом

Щільності ймовірностей переходів можуть бути представлені у вигляді квадратної матриці.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}, \text{ де } \lambda_{11} = \lambda_{22} = \dots = \lambda_{nn} = 0. \quad (7.4)$$

Щільності ймовірності стану λ_{ij}, i, j = 1, 2, ..., n є характеристикою дискретного марківського випадкового процесу з безперервним часом за допомогою яких можна визначити ймовірності станів $P_i(t)$, i = 1, 2, ... n.

Теорема 7.1

Ймовірності станів $P_i(t)$, i = 1, 2, ..., n є рішенням системи диференційних рівнянь

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) \cdot P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} \cdot P_j(t), \; i = 1, \dots, n, \; t \geq 0. \quad (7.5)$$

Доказ:

Нехай моменту часу t дано малий приріст $\Delta t > 0$. Розглянемо подію $S_i(t + \Delta t)$, яка у тому, що в момент часу $t + \Delta t$ система S буде знаходитися в стані S_i, що може статися у разі настання однієї з подій:

- A_i (t, Δt), яка полягає в тому, що в момент часу t система S була в стані S_i і за час Δ t не вийшла з нього;
- B_i (t, Δt), яка полягає в тому, що в момент часу t система S знаходилася в одному з станів S_j, j = 1, 2, ... n, $i \neq j$ і за час Δ t перейшла в стан Si.

Обидві події несумісні, утворюють повну групу подій і за теоремою додавання ймовірностей:

$$P_i(t + \Delta t) := P(S_i(t + \Delta t)) = P(A_i\,(t, \Delta t)) + P(B_i(t, \Delta t)). \quad (7.6)$$

Подія A_i (t, Δt) є добутком двох залежних подій: $S_i(t)$, яка у тому, що в момент часу t система S перебувала в стані S_i, і події $C_i(t, \Delta t)$, що складаються в тому, що за час Δt система S не вийшла зі стану S_i. За теоремою множення ймовірностей залежних подій:

$$P(A_i(t, \Delta t)) = P\,(S_i(t)) \cdot P(C_i(t, \Delta t) / S_i(t)) = P_i(t) \cdot P(C_i(t, \Delta t) / S_i(t)), \quad (7.7)$$

де P (Si (t)) = Pi(t) – ймовірність події $S_i(t)$, тобто ймовірність події S_i в момент t;

$P(C_i(t, \Delta t)/S_i(t))$ – умовна ймовірність події $C_i(t, \Delta t)$ за умови, що подія $S_i(t)$ вже настала.

Для обчислення умовної ймовірності $P(C_i(t, \Delta t) / S_i(t))$, розглянемо подію $\overline{C_i(t,\Delta t)}$, що протилежна події $C_i(t, \Delta t)$ і складається в тому, що за час Δ t система S вийде з i-го стану S_i, що є сумою подій $D_{ij}(t, \Delta t)$, j = 1, 2, ..., n, $j \neq i$, що за час Δt система перейде із S_i в S_j.

Події $D_{ij}(t, \Delta t)$, j = 1, 2, ..., $n_j \neq i$ несумісні, і для умовних ймовірностей, за умови, що $S_i(t)$ наступило:

$$P\left(\overline{C_i(t,\Delta t)} / S_i(t)\right) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} P\left(D_{ij}(t,\Delta t) / S_i(t)\right) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} P_{ij}(t,\Delta t). \quad (7.8)$$

Підставимо $\lambda_{ij}(t)$, враховуючи однорідність процесу:

$$P\left(\overline{C_i(t,\Delta t)}/S_i(t)\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\cdot\Delta t\,. \qquad (7.9)$$

Тоді протилежну подію

$$P\left(C_i(t,\Delta t)/S_i(t)\right)=1-P\left(\overline{C_i(t,\Delta t)}/S_i(t)\right)=1-\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\lambda_{ij}\Delta t\,. \qquad (7.10)$$

Підставляючи в (7.10) знайдемо ймовірність події A_i (t, Δ t):

$$P\left(A_i(t,\Delta t)\right)=P_i(t)-\left(\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\lambda_{ij}\right)\cdot P_i(t)\cdot\Delta t\,. \qquad (7.11)$$

Для обчислення ймовірності події B_i (t, Δ t) розглянемо подію $E_j(t, \Delta t)$, j = 1, 2, ..., n, j ≠ i, яка у тому, що в момент часу t система S вже перебувала в S_j , і, за час Δt перейшла в стан S_i.

Події E_j (t, Δt) являють добуток двох залежних подій: подія $S_j(t)$ складається в тому, що в момент часу t перебувала в S_j, і події $D_{ij}(t, \Delta t)$, що складається в тому, що за час Δt система S зі стану S_j перейде в стан S_i. За теоремою множення ймовірностей для залежних подій і враховуючи рівність $P_{ij}(t,\Delta t)\underset{\Delta t\to 0}{=}\lambda_{ij}\cdot\Delta t$:

$$\begin{aligned}P\left(E_j(t,\Delta t)\right)&=P\left(S_j(t)\right)\cdot P\left(D_{ij}(t,\Delta t)/S_j(t)\right)= \qquad j=1,\dots,n\ j\neq i\\&=P_j(t)\cdot P_{ij}(t,\Delta t)=P_j(t)\cdot\lambda_{ij}\cdot\Delta t\end{aligned} \qquad (7.12)$$

Подія $B_i(t, \Delta t)$ є сумою несумісних подій $E_j(t, \Delta t)$, j = 1, ..., n і за теоремою додавання ймовірностей отримаємо:

$$P\left(B_i(t,\Delta t)\right)=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}P\left(E_j(t,\Delta t)\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}P_j(t)\right)\cdot\Delta t\,. \qquad (7.13)$$

Підставляючи (7.11) і (7.12) в (7.13) отримаємо:

$$P_i(t+\Delta t)=P_i(t)-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)\cdot P_i(t)\cdot\Delta t+\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ji}\cdot P_j(t)\right)\cdot\Delta t\,, \qquad (7.14)$$

або

$$\frac{P_i(t+\Delta t)-P_i(t)}{\Delta t}=-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\lambda_{ji}\cdot P_j(t)\,. \qquad (7.15)$$

Граничний перехід дає диференціальне рівняння для визначення функції $P_i(t)$:

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}\lambda_{ji}\cdot P_j(t)\,. \qquad (7.16)$$

Враховуючи, що λ_{ii} = 0, одержимо рівняння системи (7.17):

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}\cdot P_j(t)\,. \qquad (7.17)$$

P(t) є функцією однієї незалежної змінної, тому (7.4) є система n однорідних звичайних лінійних диференційних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами.

Якщо випадковий процес неоднорідний, то це означає, що хоча б один з коефіцієнтів λ_{ij} є функцією часу.

7.3 Система рівнянь Колмогорова для обчислення граничних ймовірностей стану

Система рівнянь (7.17) називається **системою диференційних рівнянь Колмогорова.**

Для складання системи диференційних рівнянь Колмогорова існують два правила

Правило I_складання системи диференційних рівнянь Колмогорова за розміченим графом станів.

У лівій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$, в правій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$, суми $-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ щільності ймовірності переходу λ_{ij}, що виводять систему із стану S_i, на ймовірність цієї події зі знаком "-", плюс суму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}P_j(t)$ добутку λji*Pj (t) щільності ймовірності переходу λ_{ji}, що переводять систему в стан S_i, на ймовірність станів P_j (t).

Приклад 7.2

Для розміченого графа станів системи S попереднього прикладу

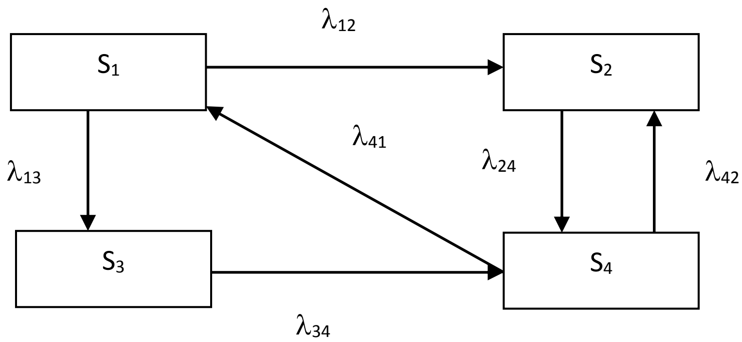


Рисунок 7.2 – Граф станів системи

Система диференційних рівнянь Колмогорова має вигляд:

$$\begin{cases}\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12}+\lambda_{13})\cdot P_1(t)+\lambda_{41}\cdot P_4(t)\\ \frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda_{24}\cdot P_2(t)+\lambda_{12}\cdot P_1(t)+\lambda_{42}\cdot P_4(t)\\ \frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda_{34}\cdot P_3(t)+\lambda_{13}\cdot P_1(t)\\ \frac{dP_4(t)}{dt} = -(\lambda_{41}+\lambda_{42})\cdot P_4(t)+\lambda_{24}\cdot P_2(t)+\lambda_{34}\cdot P_3(t)\end{cases} \quad (7.18)$$

Правило II складання системи диференційних рівнянь Колмогорова за матрицею щільності ймовірностей переходів.

У лівій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$, в правій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$, суми $-\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ щільності ймовірності переходу λ_{ij} i-го рядка матриці Λ на ймовірність $P_i(t)$ стану S_i зі знаком "-", плюс суму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}P_j(t)$ добутків $\lambda_{ji}P_j(t)$ елементів λ_{ji} i -го стовпця на відповідні ймовірності $P_j(t)$.

Приклад 7.3

Нехай дана матриця щільності ймовірностей переходів.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1.5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді система диференційних рівнянь Колмогорова буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dP_1(t)}{dt} = -5 \cdot P_1(t) + 6 \cdot P_2(t) + 1.5 \cdot P_3(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = -6 \cdot P_2(t) + 2 \cdot P_1(t) + 4 \cdot P_3(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = -5.5 \cdot P_3(t) + 3 \cdot P_1(t) \end{cases}$$

Для вирішення системи необхідно також завдання початкового розподілу ймовірностей, наприклад, якщо в початковий момент часу система S перебувала в стані S_m, то

$$P_1(0) = 0,\ P_2(0) = 0,\ \ldots,\ P_m(0) = 1,\ P_{m+1}(0) = 0,\ \ldots,\ P_n(0) = 0 \qquad (7.19)$$

За таких умов система диференційних рівнянь Колмогорова представляє систему в нормальній формі Коші (система диференційних рівнянь першого порядку дозволених щодо похідної).

Контрольні запитання і завдання

1. Визначення Марківського дискретного процесу з безперервним часом і його відмінність від процесу з дискретним часом.
2. Як визначається ймовірність стану системи для Марківського випадкового процесу з безперервним часом?
3. Визначення щільності ймовірності переходу системи з одного стану в інші.
4. Визначення однорідного і неоднорідного Марківського дискретного процесу з безперервним часом.
5. Як будується розмічений граф станів для Марківського випадкового процесу з безперервним часом?
6. Як будується система диференційних рівнянь Колмогорова?
7. Правило складання системи диференційних рівнянь Колмогорова за розміченим графом станів.
8. Правило складання системи диференційних рівнянь Колмогорова за матрицею щільності ймовірностей переходу.

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Як можуть бути представлені щільності ймовірностей:

а) у вигляді графіка;

б) у вигляді таблиці;

в) у вигляді векторів;

г) у вигляді матриці;

д) у вигляді відрізків.

2. Система диференціальних рівнянь Колмогорова має наступну формалізацію:

а) $\frac{dP_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) / P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} \cdot P_j(t)$;

б) $\frac{dP_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} \cdot P_j(t)$;

в) $\frac{dP_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} \cdot P_{ij}(t)$;

г) $\frac{dP_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} + P_j(t)$;

д) $\frac{dP_i(t)}{dt} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) / P_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ji} / P_j(t)$.

3. За 1 правилом складання системи диференційних рівнянь Колмогорова за розміченим графом станів необхідно:

а) У лівій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$, в правій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) P_i(t)$;

б) У лівій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) P_i(t)$, в правій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$;

в) У лівій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$, в правій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) P_i(t)$;

г) У лівій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$, в правій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$.

4. За 2 правилом складання системи диференційних рівнянь Колмогорова за матрицею щільності ймовірностей переходів необхідно:

а) у лівій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$, в правій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$;

б) у лівій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$, в правій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$;

в) у лівій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$, в правій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$;

г) у лівій частині записати добуток $-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)P_i(t)$, в правій частині записати похідну $\frac{dP_i(t)}{dt}$.

Практичні завдання

Задача 7.1

Запишіть систему рівнянь Колмогорова та вектор розподілу ймовірностей станів системи в початковий момент часу, якщо відомо, що у початковий момент часу система знаходилася у стані **s_2**, а матриця щільностей ймовірностей переходів системи має наступний вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 8 ПУАСОНІВСЬКІ ПОТОКИ ПОДІЙ

8.1 Основні визначення пуассонівського стаціонарного потоку
8.2 Основні характеристики пуассонівського стаціонарного потоку
8.3 Основні визначення пуассонівського нестаціонарного потоку
8.4 Основні характеристики пуассонівського нестаціонарного потоку
8.5 Основні формули обчислення ймовірностей різних подій для пуассоновського потоку

8.1 Основні визначення пуассонівського стаціонарного потоку

Потоком подій називається послідовність подій, що наступають одна за іншою в якісь, загалом, випадкові моменти часу.

Події в потоці називаються однорідними, якщо їх розрізняють тільки за моментами їх настання, в іншому випадку події в потоці називаються **неоднорідними**.

Потоки однорідних подій графічно можна представити у вигляді точок на часовій осі, де t_1, t_2, ... відповідають моментам часу настання подій.

Рисунок 8.1 – Графічне зображення потоку подій

Потік подій називається **регулярним**, якщо події в ньому наступають послідовно, через заздалегідь строго визначені проміжки часу.

Потік подій називається **потоком без післядії (потоком без пам'яті)**, якщо для будь-якої пари проміжків часу, що не перетинаються, число подій за один з них не залежить від числа подій за інший проміжок, тобто відсутність післядії означає, що послідовні події в потоці наступають незалежно один від одного.

Регулярний потік не має властивості відсутності післядії, тому післядія породжується його регулярністю.

Потік подій називається **ординарним**, якщо ймовірністю настання за малий проміжок часу більше однієї події можна знехтувати в порівнянні з імовірністю настання не більше однієї події.

У ординарному потоці події за досить малий проміжок часу або не наступають взагалі, або відбуваються по одній.

Потік подій називається **стаціонарним**, якщо ймовірність настання тієї чи іншої події за який-небудь проміжок часу залежить тільки від довжини проміжку часу і не залежить від моменту його початку, тобто в стаціонарному потоці імовірнісні характеристики не залежать від часу.

Потік подій, що має властивість відсутності післядії і ординарності, називається **пуассонівским.**

Стаціонарний пуассонівський потік називається **найпростішим**.

Середнє число подій потоку, що наступають в одиницю часу, називається **інтенсивністю або середньою щільністю потоку**.

Інтенсивність потоку позначається inП.

Інтенсивність найпростішого потоку in П = λ = const.

Інтенсивність нестаціонарного пуассонівського потоку in П = λ (t).

Кілька потоків називаються **порівнянними за інтенсивністю**, якщо інтенсивність жодного з них не перевищує суми інтенсивностей решти.

Порівнянні за інтенсивностями потоки мають властивість, яка полягає в тому, що сумарний потік, утворений накладенням досить великого числа потоків можна вважати найпростішим, тобто таким, що володіє властивістю стаціонарності, ординарності, відсутності післядії.

8.2 Основні характеристики пуассонівського стаціонарного потоку

Нехай заданий найпростіший потік з інтенсивністю λ = const. Характеристика потоку – дискретна випадкова величина X(τ) , чисельно рівна числу подій. що наступає за проміжок часу τ , X (τ) може приймати значення m = 1, 2, ...

Нехай P_m (τ) – ймовірність того, що за проміжок часу τ в потоці настане рівно m подій.

Теорема 8.1.

У найпростішому потоці з інтенсивністю λ випадкове число подій X(τ), що наступають за проміжок часу τ, розподілено за законом Пуассона:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}, \ m=1,2,\ldots \tag{8.1}$$

Математичне сподівання і дисперсія дорівнюють:

$$M[X(\tau)] = D[X(\tau)] = \lambda\tau. \tag{8.2}$$

Середньоквадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma[X(\tau)] = \sqrt{\lambda\tau}. \tag{8.3}$$

Доказ:

В теорії ймовірності, ймовірність P_m (τ) настання рівно m подій в найпростішому потоці визначають за формулою Пуассона:

$$P_m(\tau) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \ \ m=1, 2\ldots \tag{8.4}$$

де a – математичне сподівання випадкової величини X (τ).

Для кожного випадку:

$$a=M[X(\tau)]=\lambda(\tau). \tag{8.5}$$

$$D[X(\tau)]=a=\lambda\tau. \tag{8.6}$$

Підстановка в (8.4) дає формулу (8.1).

Слідство 8.1

Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ справедливі твердження:

1. Імовірність того, що за проміжок часу не настане жодної події $X(\tau)=0$ тобто ділянка τ буде вільна

$$p(X(\tau)=0)=e^{-\lambda\tau}. \qquad (8.7)$$

2. Імовірність того, що за проміжок часу τ настане менш k (k = 1, 2, ...) подій $X(\tau)<k$.

$$p(X(\tau)<k)=e^{-\lambda\tau}\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \quad k=1,2,\ldots \qquad (8.8)$$

3. Імовірність того, що за проміжок часу τ настане не менш k подій $(X(\tau)\geq k)$

$$p(X(\tau)\geq k)=1-e^{-\lambda\tau}\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(\lambda\tau)^m}{m!} \quad k=1,2,\ldots \qquad (8.9)$$

4. Імовірність того, що за проміжок часу τ настане хоча б одна подія

$$p(X(\tau)\geq 1)=1-e^{-\lambda\tau}. \qquad (8.10)$$

5. Інтенсивність потоку λ дорівнює математичному очікуванню $M[X(1)]$ випадкової величини $X(1)$.

Елементом ймовірності появи події в найпростішому потоці називається ймовірність $p_1(\Delta t)$ появи події за елементарний проміжок часу Δt.

Теорема 8.2.

Для елемента ймовірності появи події справедлива наближена формула:

$$p_1(\Delta t)\approx\lambda\cdot\Delta t, \quad \Delta t\to 0. \qquad (8.11)$$

Доказ:

Елемент ймовірності появи події $p_1(\Delta t)$ є ймовірність $p(X(\Delta t)\geq 1)$. За формулою (8.10), заміною $\tau=\Delta t$:

$$p_1(\Delta t)=1-e^{-\lambda\Delta t}. \qquad (8.12)$$

Розкладання в степеневий ряд виразу $e^{-\lambda\Delta t}$ за ступенями $(-\lambda\Delta t)$ дає.

$$e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+\frac{(-\lambda\Delta t)^2}{2!}-\frac{(-\lambda\Delta t)^3}{3!}+\ldots, \qquad (8.13)$$

або

$$e^{-\lambda\Delta t}\approx 1-\lambda\Delta t. \qquad (8.14)$$

Підставляючи цей вираз в (8.12) отримаємо формулу (8.11).

Характеристики випадкової величини $X(\tau)$ наводяться в статистичних таблицях і можуть бути використані для обчислення різних характеристик досліджуваних економічних процесів.

Характеристикою найпростішого потоку є також безперервна випадкова величина Т-проміжок часу між будь-якими сусідніми подіями потоку.

Теорема 8.3

У найпростішому потоці з інтенсивністю λ для випадкової величини Т справедливі твердження:

1) інтегральна функція розподілу F (t) = P (T <t) t ≥ 0, або ймовірність того, що між двома сусідніми подіями проміжок часу T буде менше t, дорівнює $1-e^{-\lambda t}$.

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\ t\geq 0; \tag{8.15}$$

2) диференціальна функція розподілу (щільність розподілу)

$$f(t)=F'(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}; \tag{8.16}$$

3) математичне сподівання (середній інтервал часу між двома сусідніми подіями)

$$\overline{T}=M[T]=\lambda^{-1}; \tag{8.17}$$

4) дисперсія

$$D(T)=\lambda^{-2}; \tag{8.18}$$

5) середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(T)=\lambda^{-1}. \tag{8.19}$$

Доказ:

Нехай t_0-момент настання події в потоці, відкладемо управо інтервал (t_0 + t), t> 0 (рис.8.2).

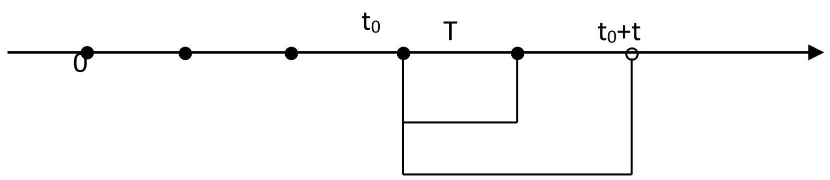


Рисунок 8.2 – Розподіл подій в потоці

Подія, яка складається у тому, що інтервал T буде менше t еквівалентна події появи хоча б однієї події на інтервалі (t_0, t_0 + t). Ймовірності цих подій рівні p(T<t)=p(X(t)≥1).

Ймовірність події p(X(t)≥1) визначається за формулою (8.10) $p(X(t)\geq 1)=1-e^{-\lambda t}$, а отже справедлива формула (8.15) $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, для t≥0. Інші формули доводяться підстановкою і обчисленнями формул.

Слідство 8.2. Вірогідність p(T≥t) того, що проміжок часу T між двома будь-якими сусідніми подіями в найпростішому потоці буде не менше t визначається за формулою:

$$P(T\geq t)=e^{-\lambda t} \qquad t\geq 0 \tag{8.20}$$

Слідство доводиться на підставі протилежності подій "T<t" и "T≥t" і рівняння:

$$P(T<t)+P(T\geq t)=1 \tag{8.21}$$

Закон розподілу називається **показовим або експоненціальним** якщо щільність ймовірності визначається (8.14)

$$f(t)=F'(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t},$$

λ – параметр цього закону.

Графіки функцій F(t) і f(t) мають вигляд

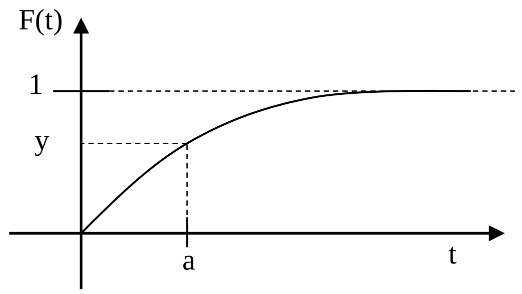


Рисунок 8.3 – Графік функцій F(t) – інтегральної функції розподілу

Інтерпретація: величина ймовірності того, що значення проміжку Т між двома сусідніми подіями в потоці виявиться в інтервалі (0, а) дорівнює у.

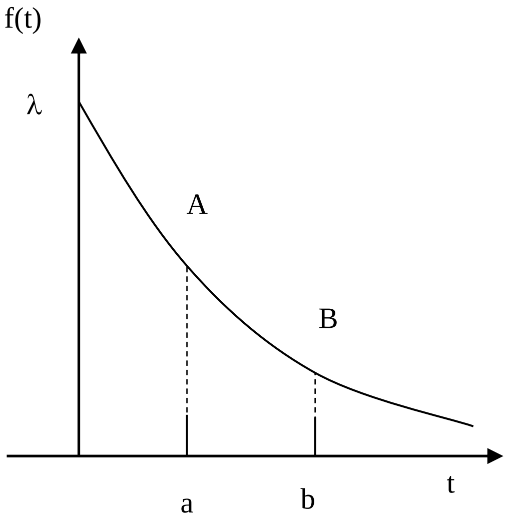


Рисунок 8.2 – Графік f(t) диференціальної функції розподілу

Інтерпретація: ймовірність того, що величина Т в потоці виявиться в інтервалі (a, b) дорівнює площі криволінійної трапеції aABb Характеристики випадкової величини Т наводяться у формі статистичних таблиць і можуть бути використані для обчислення різних економічних параметрів систем, в яких протікає пуассонівський найпростіший потік подій.

Для кращої наочності формули що характеризують випадкову величину Х (τ) представимо таблиці 8.1.

Приклад 8.1

Деяка страхова компанія виконує операції, пов'язані зі страхуванням автомобілів. Для оцінки поточного фонду компанії необхідно мати інформацію про можливі виплати за страховими полісами.

Спостереження в попередній період показали, що число вимог по виплатам за будь-який проміжок часу τ не залежить від моменту часу, а залежить тільки від тривалості проміжку, в будь-які два непересічні інтервалу вимоги надходять незалежно, а в досить малий проміжок часу надходить не більше однієї вимоги. Очікуване число вимог, що надходять у компанію за тиждень дорівнює 2.

Визначити ймовірність того, що:

1) за місяць в компанію надійде 7 вимог;

2) за місяць в компанію надійде менше 7 вимог;

3) за місяць в компанію надійде не менше 7 вимог;

4) за тиждень в компанію не надійде жодної вимоги;

5) за два тижні в компанію надійде хоча б одна вимога;

6) інтервал часу між двома вимогами буде менше 2 днів;

7) інтервал часу між двома сусідніми вимогами буде не менше 2 днів.

Згідно умов задачі потік вимог стаціонарний, має властивість відсутності післядії, ординарний, і тому є стаціонарним пуассонівським або найпростішим.

Одиниця часу тиждень.

Інтенсивність потоку λ= 2 (два в тиждень).

Нехай $X(\tau)$ – число вимог, що надходять у компанію за τ тижнів, T – проміжок часу між будь-якими двома вимогами по виплатах.

Тоді рішення задачі зводиться до наступної моделі:

1) τ=1 місяц = 4 тижні, m=7

Вірогідність $p_7(4)$ обчислюється за законом розподілу Пуассона:

$$p_7(4) = \frac{(2\cdot 4)^7}{7!} e^{-2\cdot 4} \approx 0{,}143$$

2) Вірогідність $p(X(4)<7)$ обчислюється за формлою:

$$p\big(X(4) < 7\big) = e^{-2\cdot 4} \sum_{m=0}^{6} \frac{(2\cdot 4)^m}{m!} \approx 0{,}321$$

3) Вірогідність $p(X(4)\geq 7)$ надходження не менше 7 вимог по виплатам за місяць

$$p\big(X(4) \geq 7\big) = 1 - P(X(4) < 7) = 1 - 0{,}321 \approx 0{,}679$$

4) τ=1 тиждень. Ймовірність не надходження в компанію жодної вимоги за тиждень

$$p_0(1)=e^{-2\cdot 1}\approx 0{,}135$$

5) τ=2 тижня. Вірогідність $p(X(2)\geq 1)$ надходження за два тижні хоча б однієї вимоги

$$p(X(2) \geq 1) = 1 - e^{-2\cdot 2} \approx 0{,}981$$

6) Вірогідність $p\left(T < \frac{2}{7}\right)$, інтервал T менше 2 днів

$$p\left(T < \frac{2}{7}\right) = F\left(\frac{2}{7}\right) = 1 - e^{-2\cdot\frac{2}{7}} \approx 0{,}392$$

7) Вірогідність $p\left(T \geq \frac{2}{7}\right)$ того, що T не меньше 2 днів

$$p\left(T \geq \frac{2}{7}\right) = e^{-2\cdot\frac{2}{7}} \approx 0{,}607$$

8.3 Основні визначення пуассонівського нестаціонарного потоку

Потік подій називається **нестаціонарним**, якщо ймовірність настання того чи іншого числа подій за який-небудь проміжок часу залежить не тільки від довжини цього проміжку, але і від моменту його початку.

Для нестаціонарних потоків інтенсивність λ залежить від часу t, $\lambda(t)$.

Нехай нестаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda(t)$ заданий у деякому проміжку часу $\tau>0$, t_0- початок, $t_0+\tau$ – закінчення процесу, і дискретна випадкова величина $X(t_0, \tau)$ – число подій наступаючих в потоці за період часу від t_0 до $t_0+\tau$.

8.4 Основні характеристики пуассонівського нестаціонарного потоку

Теорема 8.4

У нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ випадкова величина кількості подій за проміжок часу τ, що починаться з t_0 $X(t_0, \tau)$ разподілена по закону Пуассона:

$$p_m(t_0,\tau)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},\ m=1,2,\ldots \tag{8.22}$$

де $p_m(t_0,\tau)$ – вірогідність того, що за проміжок часу $[t_0, t_0+\tau]$ в потоці настане рівно m подій,

λ – математичне сподівання $M[X(t_0, \tau)]$ випадкової величини $X(t_0, \tau)$ і виражається формулою:

$$a=a(t_0,\tau)=M[X(t_0,\tau)]=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\lambda(t)dt \tag{8.23}$$

Дисперсія випадкової величини $X(t_0, \tau)$:

$$D[X(t_0,\tau)]=a \tag{8.24}$$

Середньоквадратичне відхилення $X(t_0, \tau)$:

$$\sigma[X(t_0,\tau)]=\sqrt{a} \tag{8.25}$$

Слідство 8.4

У нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ вірогідність того, що за проміжок часу $(t_0, t_0+\tau)$:

1. не настане жодної події

$$p(X(t_0,\tau)=0)=p_0(t_0,\tau)e^{-a} \tag{8.26}$$

2. настане менше k (k=1, 2, …) подій $X(t_0, \tau)<k$.

$$p(X(t_0,\tau)<k)=e^{-a}\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a^m}{m!}\quad k=1,2,\ldots \tag{8.27}$$

3. настане не менше k подій $X(\tau)\geq k$

$$p(X(t_0,\tau)\geq k)=1-e^{-a}\cdot\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a^m}{m!}\quad k=1,2,\ldots \tag{8.28}$$

4. настане хоча б одна подія

$$p(X(t_0,\tau)\geq 1)=1-e^{-a} \tag{8.29}$$

Елементом ймовірності появи події в нестаціонарному пуассонівському потоці називається ймовірність $p_1(t_0, \tau)$ появи події за елементарний, досить малий проміжок часу $(t_0, t_0+\Delta t)$.

На відміну від найпростішого пуассонівського потоку, в нестаціонарному пуассонівському потоці елемент ймовірності появи події залежить не тільки від довжини інтервалу Δt, але і від моменту його початку t_0.

Теорема 8.5

Для елементу ймовірності появи події за елементарний проміжок часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ в нестаціонарному пуассонівському потоці з інтенсивністю $\lambda(t)$ справедлива наближена формула:

$$P_1(t_0, \Delta t) \approx \lambda(t_0) \cdot \Delta t, \qquad (\Delta t \to 0) \tag{8.30}$$

Доказ:

Згідно формулі (8.8):

$$P_1(t_0, \Delta t) = 1 - e^{-a} \tag{8.31}$$

і формули обчислення математичного очікування

$$a = a(t_0, \Delta t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta\tau} \lambda(\tau) d\tau, \qquad a(t_0, \Delta t) \to 0 \ \text{ при } \Delta t \to 0 \tag{8.32}$$

Розкладаємо e^{-a} за ступенями a, отримаємо наближену формулу:

$$P_1(t_0, \Delta t) \approx a \approx \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \lambda(t) dt, \qquad \Delta t \to 0 \tag{8.33}$$

У силу безперервності функції $\lambda(t)$ из (8.11) отримаємо

$$P_1(t_0, \Delta t) \approx \lambda(t_0) \cdot \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \approx \lambda(t_0) \cdot \Delta t, \qquad \Delta t \to 0 \tag{8.34}$$

Характеристики випадкової величини $X(t_0, \tau)$ наводяться у формі таблиці і можуть бути використані обчислення відповідних параметрів економічних систем, в яких протікає нестаціонарний пуассонівський потік подій.

Для вивчення нестаціонарних пуассонівських потоків розглядається також випадкова величина $T(t_0)$- проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці, перше з яких відбулося в період часу t_0.

Якщо для стаціонарного потоку випадкова величина розподілена по показовому закону (λ=const), то для нестаціонарного потоку закон розподілу залежить від t_0 і від виду функції $\lambda(t)$.

Формули для обчислення характеристик випадкової величини $T(t_0)$, аналогічні результатам теореми 8.3.

8.5 Основні формули обчислення ймовірностей різних подій для пуассоновського потоку

Для кращої наочності формули що характеризують випадкову величину $X(\tau)$ представимо таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Характеристики випадкових величин

Характеристика	Формула для стаціонарного потоку	Формула для нестаціонарного потоку
інтенсивність	$\lambda = const$	$\lambda(t)$
Закон розподілу Пуассона	$p_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$, m=1,2,…	$p_m(t_0, \tau) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$, m=1,2,…
Імовірність того, що за проміжок часу не настане жодної події	$P(X(\tau) = 0) = e^{-\lambda\tau}$	$p(X(t_0, \tau) = 0) = p_0(t_0, \tau) e^{-a}$
Імовірність того, що за проміжок часу τ настане менш k (k = 1, 2, ...) подій	$P(X(\tau) < k) = e^{-\lambda\tau} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}$ k= 1, 2,…	$p(X(t_0, \tau) < k) = e^{-a} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}$ k= 1, 2,…
Імовірність того, що за проміжок часу τ настане не менш k подій	$p(X(\tau) \geq k) = 1 - e^{-\lambda\tau} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}$ k=1,2,…	$p(X(t_0, \tau) \geq k) = 1 - e^{-a} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a^m}{m!}$ k=1,2,…
Імовірність того, що за проміжок часу τ настане хоча б одна подія	$p(X(\tau) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda\tau}$	$p(X(t_0, \tau) \geq 1) = 1 - e^{-a}$
Елементом ймовірності появи події	$p_1(\Delta t) \approx \lambda \cdot \Delta t, \quad \Delta t \to 0$	$p_1(t_0, \Delta t) \approx \lambda(t_0) \cdot \Delta t, (\Delta t \to 0)$
математичне сподівання випадкової величини	M[X(τ)]=λτ	$a = a(t_0, \tau) = M[X(t_0, \tau)] = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$
Дисперсія випадкової величини	D[X(τ)]=a=λτ	$D[X(t_0, \tau)]=a$
Середньоквадратичне відхилення	$\sigma[X(\tau)] = \sqrt{\lambda\tau}$	$\sigma[X(t_0, \tau)] = \sqrt{a}$

Аналогічно складемо таблицю для випадкової величини Т-проміжок часу між будь-якими сусідніми подіями потоку (табл. 8.2).

Таблиця 8.2 – Характеристики для випадкової величини Т-проміжок часу між будь-якими сусідніми подіями потоку

Характеристика	Формула для стаціонарного потоку	Формула для нестаціонарного потоку
Інтенсивність найпростішого потоку	$\lambda = \text{const}$	$\lambda(t)$
Інтегральна функція розподілу випадкової величини Т	$F(t) = p(T < t)$ $t \geq 0$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$	$F_{T(t_0)}(\tau) = p_1\big(T(t_0) < \tau\big) = 1 - e^{-a}$ де $a = a(t_0, \tau) = M\big[X(t_0, \tau)\big] = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$
Ймовірність p(T≥t) того, що проміжок часу Т між двома сусідніми подіями в найпростішому потоці буде не менше t	$p(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ $t \geq 0$	$p\ \big(T(t_0) \geq \tau\big) = 1 - F_{T(t_0)}(\tau) = e^{-a}$
Диференціальна функція розподілу (щільність розподілу)	$f(t) = F'(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$	$f_{T(t_0)}(\tau) = f\ \ (\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau) =$ $= \frac{\partial}{\partial \tau}(1 - \cdot e^{-a}) = e^{-a}\lambda(t_0 + \tau)$
Математичне очіку-вання випадкової величини Т(τ) (серед-ній інтервал часу між двома сусідніми подіями)	$\overline{T} = M[T] = \lambda^{-1}$	$M[T(t_0)] = \int\limits_0^\infty \tau f_{T(t_0)}(\tau)d\tau =$ $= \int\limits_0^\infty \tau * e^{-a}\lambda(t_0 + \tau)d\tau$
Дисперсія випадкової величини Т	$D(T) = \lambda^{-2}$	$D[T(t_0)] = \int\limits_0^\infty \tau f_{T(t_0)}(\tau)d\tau =$ $= \int\limits_0^\infty \tau * e^{-a}\lambda(t_0 + \tau)d\tau$
Середнє квадратичне відхилення	$\sigma(T) = \lambda^{-1}$	$\sigma[T(t_0)] = \sqrt{D[T(t_0)]}$

Приклад 8.2

Розглянемо приклад аналогічний попередньому прикладу виплат за страховими полісами за період з початку листопада до кінця січня місяця. Вивчення потоку вимог показало, що потік подій є нестаціонарним пуассонівським потоком. Очікуване число вимог, що надходять у компанію, залежить від часу $\lambda(t) = t^{1/4}$.

Визначити ймовірність подій:

1) за листопад надійде 6 вимог;

2) за грудень надійде 6 вимог;

3) за січень надійде не менше 5 вимог;

4) за перші два тижні листопада не надійде жодної вимоги;

5) за другий і третій тиждень грудня не надійде хоча б одна вимога;

6) інтервал часу між двома сусідніми вимогами буде не менше 3 днів, якщо перше з них надійшло в перший день другого тижня січня;

7) інтервал часу між двома сусідніми вимогами буде менше 2 днів, якщо перше надійшло на початку 3 тижня грудня.

Потік вимог, що надходять без післядії, ординарний, але нестаціонарний, а, отже, не є найпростішим.

Одиниця часу тиждень.

Нехай $X(t_0, \tau)$- випадкове число вимог ,що надходять в компанію за час $(t_0, t_0+\tau)$,

$T(t_0)$- випадковий інтервал часу між двома сусідніми вимогами, перше з яких настало в момент часу t_0.

1) τ= 1 місяць = 4 тижні, момент настання події t_0=0, m=6

Математичне сподівання:

$$a = M[X(0,4)] = \int_0^{0+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} \cdot t^{5/4} \Big|_0^4 = \frac{4}{5} 4^{5/4} \approx 4{,}525$$

Шукана ймовірність:

$$P_6(0,4) \approx \frac{4{,}525^6}{6!} e^{-4{,}525} \approx 0{,}129$$

2) τ=1 місяць = 4 тижні, t_0=4, m=6

$$a = M[X(4,4)] = \int_4^{4+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} \cdot t^{5/4} \Big|_4^8 = \frac{4}{5}\left(8^{5/4} - 4^{5/4}\right) \approx 6{,}238$$

$$P_6(4,4) \approx \frac{6{,}238^6}{6!} e^{-6{,}238} \approx 0{,}16$$

3) τ=1 місяць = 4 тижні, t_0=8, k=5

$$a = M[X(8,4)] = \int_8^{8+4} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} \cdot t^{5/4} \Big|_8^{12} = \frac{4}{5}\left(12^{5/4} - 8^{5/4}\right) \approx 7{,}104$$

$$P(X(8,4) \ge 5) \approx 1 - e^{-7{,}104} \sum_{m=0}^{4} \frac{7{,}104^m}{m!} \approx 0{,}836$$

4) τ=2 тижня, t_0=0, m=0

$$a = M[X(0,2)] = \int_0^2 t^{1/4} dt = \frac{4}{5} \cdot t^{5/4} \Big|_0^2 = \frac{4}{5} 2^{5/4} \approx 1{,}903$$

$$P(0,2) \approx e^{-1{,}903} \approx 0{,}149$$

5) τ=2 тижня, t_0=5

$$a = M[X(5,2)] = \int_5^{5+2} t^{1/4} dt = \frac{4}{5} \cdot t^{5/4} \Big|_5^7 \approx 3{,}127$$

$$P\left(X(5{,}2)\geq 1\right)\approx 1-e^{-3{,}127}\approx 0{,}956$$

6) τ=3 дні = 3/7 тижня, t_0=9

$$a=M\left[X(9{,}3/7)\right]=\int_{9}^{9+3/7} t^{1/4}dt=\frac{4}{5}\cdot t^{5/4}\Big|_{9}^{9\frac{3}{7}}\approx 0{,}747$$

$$P\left(T(9)\geq\frac{3}{7}\right)\approx e^{-0{,}747}\approx 0{,}474$$

7) τ=2 дні = 2/7 тижня, t_0=6

$$a=M\left[X(6{,}2/7)\right]=\int_{6}^{6+2/7} t^{1/4}dt=\frac{4}{5}\cdot t^{5/4}\Big|_{6}^{6\frac{2}{7}}\approx 0{,}45$$

$$P\left(T(6)<\frac{2}{7}\right)=1-e^{-0{,}45}\approx 0{,}362$$

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте визначення потоку подій.
2. Як розуміються однорідні і неоднорідні події?
3. Властивості регулярного потоку подій.
4. Як формулюється властивість відсутності післядії для потоку?
5. Що означає ординарність потоку?
6. Як називається потік, що володіє властивостями ординарності та відсутності післядії?
7. Визначення властивостей ординарності потоку.
8. Що означає пуассонівський стаціонарний потік?
9. Що означає інтенсивність потоку?
10. Як порівнюються потоки по інтенсивності?
11. Наведіть приклади потоків, які на практиці можна наближено замінити найпростішими.
12. Який сенс дискретної випадкової величини Х (τ)?
13. Який сенс неперервної випадкової величини Т?
14. Визначення нестаціонарного потоку подій.
15. Що визначає випадкова величина Х (t0, τ)?
16. Який закон розподілу має випадкова величина Х (t0, τ)?
17. Формула обчислення випадкової величини Х (t0, τ).
18. Що визначає випадкова величина Т (t0)?
19. Чи є закон розподілу випадкової величини Т (t_0) показовим?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Події в потоці називаються однорідними, якщо:

а) їх розрізняють тільки за моментами їх настання;

б) вони наступають одночасно;

в) період їх настання однаковий;

г) їх можна розрізнити за природою формування;

д) моменти настання цих подій заздалегідь визначені.

2. Потік подій є регулярним, якщо:
а) події в ньому наступають послідовно,у будь-який проміжок часу;
б) події в ньому наступають послідовно, через заздалегідь строго певні проміжки часу;
в) події в ньому наступають регулярно, через заздалегідь строго певні проміжки часу;
г) події в ньому наступають регулярно, у будь-який проміжок часу;
д) події в ньому наступають одночасно, у будь-який проміжок часу.

3. Якщо для будь-якої пари непересічних проміжків часу число подій наступаючих за один з них не залежить від числа подій наступаючих за інший проміжок, то такий потік подій називається:
а) потік без післядії;
б) потік с післядією;
в) неоднорідний потік;
г) потік с довготривалою пам'яттю;
д) потік з короткочасною пам'яттю.

4. Інтенсивність нестаціонарного пуассонівського потоку визначається як:
а) in П $\neq \lambda$ (t);
б) in П = λ (t);
в) in П $\leq \lambda$ (t);
г) in П $\geq \lambda$ (t);
д) in П $\pm \lambda$ (t).

5. Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ, імовірність того, що за проміжок часу τ настане хоча б одна подія можна визначити як:
а) $\mathrm{P}(\mathrm{X}(\tau) \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}$;
б) $P(X(\tau) \leq 1) = 1 - e^{-\lambda\tau}$;
в) $P(X(\tau) \geq 1) = 1 - e^{-\lambda/\tau}$;
г) $P(X(\tau) \geq 1) = 1 + e^{-\lambda\tau}$;
д) $P(X(\tau) \leq 1) = 1 + e^{-\lambda\tau}$.

Практичні завдання

Задача 8.1

Число вкладів приватних осіб в банк за будь-який визначений проміжок часу, як показали попередні спостереження, не залежать від початку цього проміжку, а залежать від його тривалості. Вклади в банк в будь-які два непересічні проміжку часу робляться незалежно. У проміжки часу досить малої довжини вклади в банк надходять по одному. Середній інтервал часу між двома сусідніми вкладами дорівнює 3-м годинах.

Знайти ймовірність, з якою:

1) за 2 дня в банк буде зроблено 5 вкладів;

2) за 2 дня в банк буде зроблено менше 5-ти вкладів;

3) за 2 дня в банк буде зроблено не менше 5-ти вкладів;

4) за день в банк не буде зроблено жодного вкладу;

5) за 3 дня в банк буде зроблений хоча б один вклад;

6) проміжок часу між двома сусідніми вкладами в банк складе не менше 3-х годин.

7) проміжок часу між двома сусідніми вкладами в банк складе не менше 3-х годин.

ТЕМА 9. ЗВ'ЯЗОК ПУАССОНІВСЬКИХ ПОТОКІВ ПОДІЙ З ДИСКРЕТНИМИ МАРКІВСЬКИМИ ПРОЦЕСАМИ З БЕЗПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

9.1 Пуассонівські потоки подій і дискретні марківські процеси з безперервним часом

9.2 Зв'язок між дискретним марківським процесом з безперервним часом і пуассонівським потоком

9.1 Пуассонівські потоки подій і дискретні марківські процеси з безперервним часом

Пуассонівські потоки подій і дискретні марківські процеси з безперервним часом пов'язані між собою. Розглянемо зв'язок між пуассонівськими потоками подій і дискретними марківськими процесами з безперервним часом.

Нехай S система з дискретними станами s_1, s_2, ..., s_n, в якій протікає випадковий процес з безперервним часом. У момент часу t_0 система находиться в стані S_i і під впливом деякого пуассонівського потоку подій $П_{ij}$ інтенсивністю $\lambda(t)$ може перейти в інший стан $S_j (i \neq j)$. Процес переходу системи із стану S_i у стан S_j відбувається в момент часу $t > t_0$, як тільки настане перша подія потоку $П_{ij}$.

Теорема 9.1

Щільність ймовірностей переходу $\lambda_{ij}(t)$ системи S із стану S_i у стан S_j у момент часу t під впливом пуассонівского потоку $П_{ij}$ дорівнює інтенсивності цього потоку:

$$\lambda_{ij}(t)=\lambda(t). \tag{9.1}$$

Доказ:

Вірогідність елементарної події $P_{ij}(t, \Delta t)$ дорівнює елементу ймовірності $P_1(t, \Delta t)$ появи події в пуассонівському потоці $П_{ij}$ за час t, $t_0+\Delta t$.

$$P_{ij}(t, \Delta t)=\lambda_{ij} \cdot \Delta t \ (\Delta t \to 0). \tag{9.2}$$

$$P_1(t, \Delta t)=\lambda(t) \cdot \Delta t \ (\Delta t \to 0). \tag{9.3}$$

В силу рівності лівих частин отримаємо:

$$\lambda_{ij}(t) \cdot \Delta t=\lambda(t) \cdot \Delta t, \tag{9.4}$$

що і доказує рівність (9.1)

9.2 Зв'язок між дискретним марківським процесом з безперервним часом і пуассонівским потоком

Для того, щоб випадковий процес з безперервним часом, що протікає в системі з дискретними станами був марківським, необхідно і достатньо, щоб всі потоки подій, що переводять систему з одного стану в інший були пуассонівськими (стаціонарними або нестаціонарними).

Системи, в яких протікають дискретні марківські випадкові процеси з безперервним часом, називаються пуассонівськими системами.

Дослідження пуассонівських систем проводиться за наступним алгоритмом.

1. Дати опис кожного можливого стану системи.

2.Скласти граф станів системи, вказавши можливі безпосередні переходи системи зі стану в стан.

3.На розміченому графі станів вказати інтенсивності $\lambda_{ij}(t)$ потоку подій Π_{ij} під впливом якого відбувається цей перехід.

4.Задати початкові стани системи в момент часу t=0.

Приклад9.1

В операційному залі банку знаходяться 2 банкомати B_1 і B_2 для проведення операцій з пластиковими картками. Кожен з банкоматів незалежно може виходити з ладу.

Нехай потік відмов B_1 пуассіновський $\lambda_1=4$ відмови в квартал, B_2 – пуассонівський, $\lambda_2=3$ відмови в квартал. Потік відновлень банкоматів B_1 – пуассонівський, з інтенсивністю $\mu_1=5$ відновлень в квартал, банкомата B_2 – пуассонівський, з інтенсивністю $\mu_2=2$ відновлення в квартал. Знайти ймовірності станів у другому кварталі (t=2), якщо на початку року (t=0) B_1-працював справно, B_2 – перебував у ремонті.

Розвязання

Нехай система описується наступними станами:

S_{11} – стан, що обидва банкомати справні,

S_{12} – B_1 – справний, B_2 – ремонтується,

S_{21} – B_1 ремонтується, B_2- справний,

S_{22} – обідва банкомати ремонтуються.

(Індекс 1 – справний, 2 – ремонтується)

Побудуємо розмічений граф станів системи S.

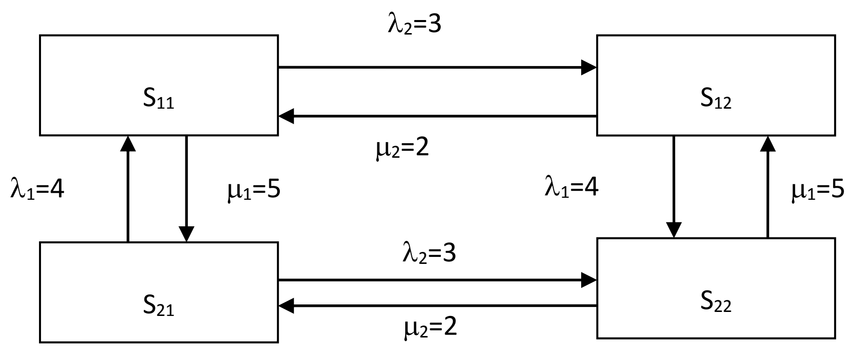


Рисунок 9.1 – Граф станів системи для двох банкоматів

Потоки відмов і ремонтів пуассонівські з постійною інтенсивністю і є найпростішими. Матриця щільності ймовірностей переходу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{431} & \lambda_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому нехтуємо переходами:

$$S_{11} \to S_{22},\ S_{22} \to S_{11},\ S_{21} \to S_{12},\ S_{12} \to S_{21}.$$

Потоки відмов і ремонтів пуассонівські, процес в системі S є марківським, з дискретними станами і безперервним часом. Система диференціальних рівнянь Колмогорова має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{11}(t)}{dt} &= -(\lambda_2 + \lambda_1)P_{11}(t) + \mu_2 P_{12}(t) + \mu_1 P_{21}(t) \\ \frac{dP_{12}(t)}{dt} &= -(\mu_2 + \lambda_1)P_{12}(t) + \lambda_2 P_{11}(t) + \mu_1 P_{22}(t) \\ \frac{dP_{21}(t)}{dt} &= -(\mu_2 + \lambda_2)P_{21}(t) + \lambda_1 P_{11}(t) + \mu_2 P_{22}(t) \\ \frac{dP_{22}(t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_1)P_{22}(t) + \lambda_1 P_{12}(t) + \lambda_2 P_{21}(t) \end{aligned}, \qquad (9.5)$$

або, підставляючи значення λ_1, λ_2, μ_1, μ_2.

$$\begin{aligned} \frac{dP_{11}(t)}{dt} &= -7 \cdot P_{11}(t) + 2 \cdot P_{12}(t) + 5 \cdot P_{21}(t) \\ \frac{dP_{12}(t)}{dt} &= 3 \cdot P_{11}(t) - 6 \cdot P_{12}(t) + 5 \cdot P_{22}(t) \\ \frac{dP_{21}(t)}{dt} &= 4 \cdot P_{11}(t) - 8 \cdot P_{21}(t) + 2 \cdot P_{22}(t) \\ \frac{dP_{22}(t)}{dt} &= 4 \cdot P_{12}(t) + 3 \cdot P_{21}(t) - 7P_{22}(t) \end{aligned}. \qquad (9.6)$$

Початковий стан системи:

$$t=0,\ P_{11}(0)=0,\ P_{12}(0)=1,\ P_{21}(0)=0,\ P_{22}(0)=0. \qquad (9.7)$$

З умови нормування n=4:

$$P_{11}(t)+P_{12}(t)+P_{21}(t)+P_{22}(t)=1, t\geq 0, \qquad (9.8)$$

$$P_{22}(t)=1 - P_{11}(t) - P_{12}(t) - P_{21}(t),\ t\geq 0. \qquad (9.9)$$

Підставляючи (9.7) в друге і третє рівняння системи (9.6), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dP_{11}(t)}{dt} &= -7 \cdot P_{11}(t) + 2 \cdot P_{12}(t) + 5 \cdot P_{21}(t) \\ \frac{dP_{12}(t)}{dt} &= -2 \cdot P_{11}(t) - 11 \cdot P_{12}(t) - 5 \cdot P_{21}(t) + 5 \\ \frac{dP_{21}(t)}{dt} &= 2 \cdot P_{11}(t) - 2 \cdot P_{12}(t) - 10 \cdot P_{21}(t) + 2 \end{aligned}. \qquad (9.10)$$

Це є неоднорідна система лінійних диференційних рівнянь першого порядку. Вирішується відповідна однорідна система, потім шукається приватне рішення методом варіації довільних сталих. Система має рішення, що задовольняє початкові умови.

$$P_{11}(t) = -0.178e^{-14t} + 0.178e^{-9t} - 0.223e^{-5t} + 0.223$$
$$P_{12}(t) = 0.178e^{-14t} + 0.267e^{-9t} + 0.223e^{-5t} + 0.332$$
$$P_{21}(t) = 0.178\,e^{-14t} - 0.178\,e^{-9t} - 0.178e^{-5t} + 0.178$$
$$P_{22}(t) = -0.178e^{-14t} - 0.267e^{-9t} - 0.178e^{-5t} + 0.267$$

За умови t=2, отримаємо

$$P_{11}(2)=0{,}223;\ P_{12}(2)=0{,}332;\ P_{21}(2)=0{,}178;\ P_{22}(2)=0{,}267$$

Найбільш ймовірний стан системи S, $P_{12}(2)=0{,}332$

Котрольні запитання і завдання

1. Як розуміється перехід системи з одного стану в інший під впливом потоку подій?

2. Який зв'язок між щільністю ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$ і інтенсивністю $\lambda(t)$ пуассонівського потоку подій?

3. У чому виражається зв'язок між пуассонівськими потоками подій і дискретними марківськими процесами з безперервним часом?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Пуассонівські потоки подій і дискретні марківські процеси з безперервним часом:

а) між собою пов'язані;

б) між собою не пов'язані;

в) залежать одне від одного;

г) не залежать одне від одного;

д) зовсім різні визначення.

2. Щільність ймовірностей переходу $\lambda_{ij}(t)$ системи S із стану S_i у стан S_j у момент часу t під впливом пуассонівского потоку Π_{ij} дорівнює:

а) дисперсії цього потоку;

б) математичному очікуванню цього потоку;

в) ймовірності цього потоку;

г) інтенсивності цього потоку;

д) середньоквадратичному відхиленню цього потоку.

3. Ймовірність елементарної події $P_{ij}(t, \Delta t)$ дорівнює:

а) $P_{ij}(t, \Delta t)=\lambda_{ij}\cdot\Delta t$ $(\Delta t\to 1)$;

б) $P_{ij}(t, \Delta t)=\lambda_{ij}\cdot\Delta t$ $(\Delta t\to 0)$;

в) $P_{ij}(t, \Delta t)=\lambda_{ij}\cdot\Delta t$ $(\Delta t\to -1)$;

г) $P_{ij}(t, \Delta t)=\lambda_{ij}+\Delta t$ $(\Delta t \to 0)$;

д) $P_{ij}(t, \Delta t)=\lambda_{ij}-\Delta t$ $(\Delta t \to 0)$.

4. Для того, щоб випадковий процес з безперервним часом що протікає в системі з дискретними станами був марківським, необхідно і достатньо, щоб всі потоки подій, що переводять систему з одного стану в інший були:

а) стаціонарними або нестаціонарними;

б) односторонніми або двосторонніми;

в) безпосередніми або опосередкованими;

г) односторонніми або опосередкованими;

д) двосторонніми або безпосередніми.

5. Системи, в яких протікають дискретні марківські випадкові процеси з безперервним часом, називаються:

а) пуассоновскими системами;

б) неоднорідними Марківськими системами;

в) процесами с дискретним часом;

г) дискретними випадковими системами;

д) системами з безперервним часом.

Практичні завдання

Задача 9.1

В операційному залі банку знаходяться 2 банкомати B_1 і B_2 для проведення операцій з пластиковими картками. Кожен з банкоматів незалежно може виходити з ладу.

Нехай потік відмов B_1 пуассіновський $\lambda_1=2$ відмови в квартал, B_2 – пуассонівський, $\lambda_2=1$ відмови в квартал. Потік відновлень банкоматів B_1 – пуассонівський, з інтенсивністю $\mu_1=3$ відновлень в квартал, банкомата B_2 – пуассонівський, з інтенсивністю $\mu_2=2$ відновлення в квартал. Знайти ймовірності станів у момент часу $t=3$, якщо у початковий момент часу $(t=0)$ обидві банкомати працювали справно.

ТЕМА 10. ФІНАЛЬНІ ЙМОВІРНОСТІ ОДНОРІДНОГО МАРКІВСЬКОГО ЛАНЦЮГА

10.1 Визначення фінальних або стаціонарних ймовірностей

10.2 Теорема про існування фінального стаціонарного режиму для однорідного марківського ланцюга з дискретним станом і дискретним часом

10.3 Регулярні марківські ланцюги

10.4 Визначення дискретних систем, у яких протікає марківський процес з безперервним часом

10.5 Існування фінальних імовірностей для дискретних систем, що перебувають під впливом марківського процесу з безперервним часом

10.6 Правила складання систем рівнянь для визначення фінальних імовірностей стану

10.1 Визначення фінальних або стаціонарних ймовірностей

В економіці часто виникають ситуації, коли необхідно вивчити тривале протікання процесу після закінчення впливу початкових умов. За певних умов може встановитися фінальний стаціонарний режим протікання процесу, при якому імовірності станів системи вже не залежать ні від часу, ні від початкового розподілу ймовірностей.

Імовірності стану у фінальному стаціонарному режимі називаються **фінальними або стаціонарними ймовірностями** і позначаються через $p_1,\dots,p_n$, а вектор $(P_1,\dots, P_n)$, координатами якого є фінальні ймовірності, називається фінальним (стаціонарним) вектором.

Нехай $(P_1(0), P_2(0), \dots, P_n(0))$ вектор початкового розподілу ймовірностей.

$$P=\begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$ – матриця перехідних імовірностей P_{ij}.

10.2 Теорема про існування фінального стаціонарного режиму для однорідного марківського ланцюга з дискретним станом і дискретним часом

Теорема 10.1

Якщо існує фінальний стаціонарний режим і, отже, існують фінальні ймовірності, то для того, щоб $P_1, P_2, \dots, P_n$ були фінальними ймовірностями необхідно й достатньо, щоб існував m-й крок такий, що:

$$\left(P_1, P_2, \dots, P_n\right)=\left(P_1(m), P_2(m), \dots, P_n(m)\right)=\left(P_1(m+1), P_2(m+1), \dots, P_n(m+1)\right). \qquad (10.1)$$

Доказ:

Достатність: Нехай існує фінальні ймовірності й m для яких справедливо (10.1). Тоді для k=m+2, одержимо:

$$\begin{aligned}&\left(P_1(m+2), P_2(m+2), \dots, P_n(m+2)\right)=\left(P_1(m+1), P_2(m+1), \dots, P_n(m+1)\right)\cdot P=\\&=\left(P_1(m), P_2(m), \dots, P_n(m)\right)\cdot P^2=\left(P_1, P_2, \dots, P_n\right).\end{aligned} \qquad (10.2)$$

Вектор (P_1, P_2, ..., P_n) не залежить від кроків, і є вектором фінальних імовірностей.

Необхідність: Нехай P_1, P_2, ..., P_n- фінальні ймовірності. Це означає, що існує m-й крок, починаючи з якого ймовірності не міняються й будуть фінальними, що означає виконання.

Фінальні ймовірності задовольняють умовам нормування:

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{m} P_k(m) = 1 . \tag{10.3}$$

Теорема 10.2

Якщо існують фінальні ймовірності, то фінальний вектор (P_1, P_2, ..., P_n) можна визначити з рівняння

$$(P_1, P_2, ..., P_n) = (P_1, P_2, ..., P_n)\cdot P, \tag{10.4}$$

де P – матриця перехідних імовірностей.

Доказ:

У силу існування фінальних імовірностей, можна знайти таке число k=m+1, що

$$\begin{aligned}(P_1, P_2, ..., P_n) &= (P_1(m+1), P_2(m+1), ..., P_n(m+1)) = \\ &= (P_1(m), P_2(m), ..., P_n(m))\cdot P = (P_1, P_2, ..., P_n)\cdot P,\end{aligned} \tag{10.5}$$

що й було потрібно довести.

10.3 Регулярні марківські ланцюги

Марківський ланцюг називається **регулярним**, якщо існує число m, таке, що будь-який елемент матриці P^m позитивний, за винятком, можливо елементів, що стоять у стовпчиках, номера яких збігаються з номерами нестійких станів системи S (станів без входів).

Приклад10.1 (нерегулярний ланцюг)

Нехай даний однорідний марківський ланцюг S з розміченим графом станів (рис. 10.1).

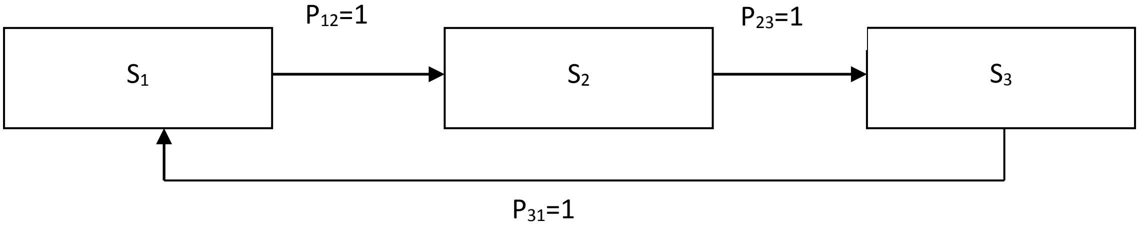


Рисунок 10.1 – Граф станів

Система S не має нестійких станів і матриця перехідних імовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Очевидно $P^4=P$, $P^5=P^2$, $P^6=P^3$, $P^7=P^4$.

Будь-яка m-я ступінь P^m матриці P перехідних імовірностей системи S містить нульові елементи, у системі немає нестійких станів, і марківський ланцюг не є регулярним.

Приклад 10.2 (регулярний ланцюг)

Нехай даний однорідний марківський ланцюг з розміченим графом станів:

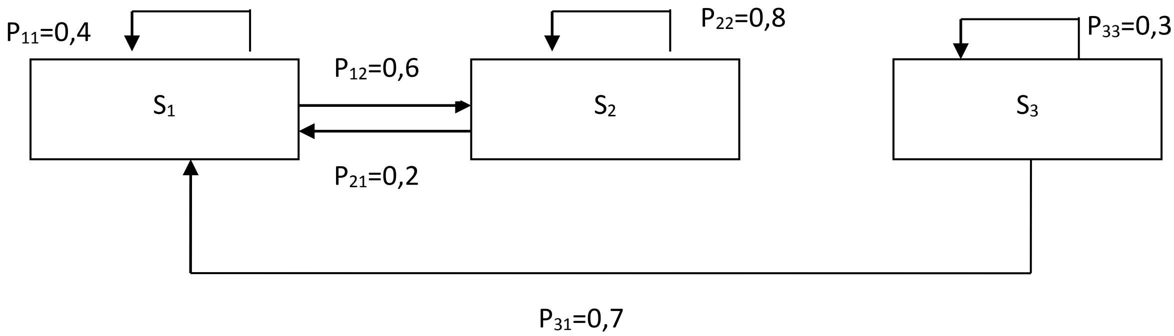


Рисунок 10.2 – Граф станів однорідного марківського ланцюга

Стан S_3 нестійкий. Матриця перехідних імовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,72 & 0 \\ 0,24 & 0,76 & 0 \\ 0,49 & 0,42 & 0,09 \end{pmatrix}$$

При m=2 кожний елемент матриці $P^m=P^2$, крім елементів 3-го стовпця, який збігається з номером нестійкого стану S_3, позитивний і тому даний марківський ланцюг регулярний.

Теорема 10.3 (про достатні умови існування граничних імовірностей)

Якщо однорідний марківський ланцюг з кінцевим числом станів регулярний, то існують фінальні ймовірності P_1, P_2, ...P_n:

$$\lim_{m\to\infty} P^m = \left.\begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_n \\ \dots & \dots & \dots \\ P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix}\right\} n - \text{строк} \cdot \qquad (10.6)$$

Фінальні ймовірності можна визначити таким чином: перевірити марківський ланцюг на регулярність, для регулярного марківського ланцюга вектор фінальних імовірностей визначається з рівняння (10.4).

Приклад 10.3

Марківський ланцюг із прикладу регулярний й згідно з теоремою 10.3 існують фінальні ймовірності P_1, P_2, P_3, які визначимо з рівняння (10.3) при n=3 і матриці P, що задається рівнянням (10.4).

$$(P_1, P_2, P_3) = (P_1, P_2, P_3) \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$(P_1, P_2, P_3) = (0,4P_1 + 0,2P_2 + 0,7P_3; 0,6P_1 + 0,8P_2; 0,3P_3),$$

$$\begin{cases} P_1 = 0,4P_1 + 0,2P_2 + 0,7P_3 \\ P_2 = 0,6P_1 + 0,8P_2 \\ P_3 = 0,3P_3 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 0,6P_1 - 0,2P_2 = 0 \\ -0,6P_1 + 0,2P_2 = 0 \\ P_3 = 0 \end{cases},$$

з першого рівняння системи

$$P_1 = \frac{1}{3} P_2. \tag{10.7}$$

Вектор $\left(P_1 = \frac{1}{3} P_2; P_2; 0 \right)$ – загальний розв'язок рівняння (10.5), що залежить від довільного параметра P_2. Згідно умови нормування $P_1+P_2+P_3=1$, звідки одержуємо:

$$P_2 = 1 - P_1. \tag{10.8}$$

Підставляючи (10.8) в (10.7) одержимо, що вектор фінальних імовірностей стану системи:

$$(P_1, P_2, P_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0 \right),$$

причому гранична ймовірність нестійкого стану S_3 $P_3=0$.

Приклад 10.4 (існування граничних імовірностей для нерегулярного марківського ланцюга)

Система S має розмічений граф станів:

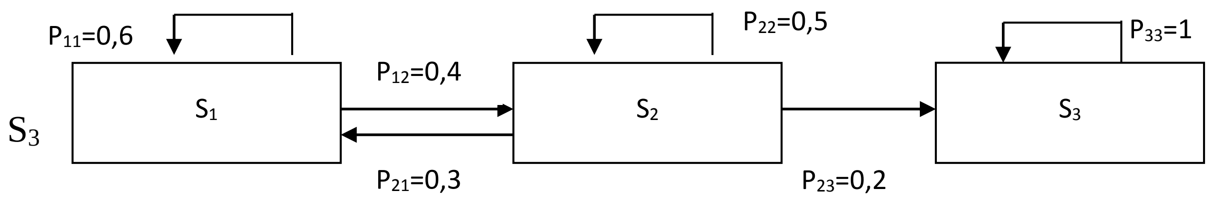


Рисунок 10.3 – Граф

Система S, граф якої представлений на рис 10.3, має поглинаючий стан S_3, а тому рано чи пізно туди попадета залишиться в ньому. Для даної системи фінальні ймовірності $P_1=P_2=0$, $P_3=1$. Система S не є регулярною, стані S_1 і S_2 не є нестійкими, але елементи матриці рівні 0.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 10.5

Поведінка ринку цінних паперів виявляє наступну тенденцію: угоди, у яких ціни зростають, переміняються угодами, у яких ціни падають. Спостереження показали, що умовна ймовірність зростання цін після попереднього періоду їх падіння дорівнює 0,65, а умовна ймовірність падіння цін після попереднього періоду їх зростання рівна 0,6.

Визначимо відповідні стани, побудуємо їхній розмічений граф, випишемо матрицю перехідних імовірностей і знайдемо фінальні ймовірності станів.

У якості системи *S* будемо розглядати ринок цінних паперів. Тоді система *S* може перебувати тільки у двох станах:

s_1— падіння цін,

s_2 — зростання цін, і, отже, що протікає в системі *S* процес є дискретним.

Майбутній стан, у який перейде система *S*, залежить від стану, у якому вона перебуває в даний момент часу; тому цей процес є марківським.

Будемо припускати, що моменти часу t_1 t_2, t_3, ... настільки близькі один до одного, що між ними система S не змінює свого стану й, отже, процес, що протікає в системі S, з певною погрішністю можна вважати процесом з дискретним часом.

Ймовірності 0,65 і 0,6, дані в умові прикладу, є, очевидно (див., імовірностями p_{12} і p_{21}.

У системі протікає дискретний процес, умовні ймовірності P_{12}= 0,65; P_{21}=0,6; P_{11}= 1-P_{12}=1-0,65=0,35; P_{22}= 1-P_{21}=1-0,6 = 0,4.

Розмічений граф станів:

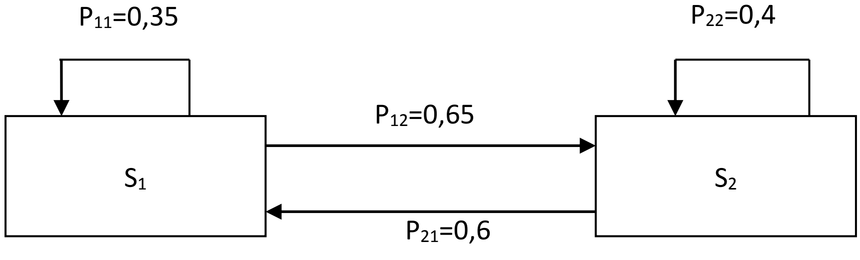


Рисунок 10.4 – Граф системи

Матриця перехідних імовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці P позитивні, система S регулярна й має фінальні ймовірності P_1, P_2 станів S_1 і S_2.

$$(P_1, P_2) = (P_1, P_2) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}35 & 0{,}65 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix},$$

$$(P_1, P_2) = \left(0{,}35P_1 + 0{,}6P_2 ; 0{,}65P_1 + 0{,}4P_2\right),$$

або $\begin{cases} P_1 = 0{,}35P_1 + 0{,}6P_2 \\ P_2 = 0{,}65P_1 + 0{,}4P_2 \end{cases}$; $\begin{cases} 0{,}65P_1 - 0{,}6P_2 = 0 \\ -0{,}65P_1 + 0{,}6P_2 = 0 \end{cases}$.

Рівняння пропорційні, додамо умову нормування, одержимо:

$\begin{cases} 0{,}65P_1 - 0{,}6P_2 = 0 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases}$; P_1=0,48; P_2=0,52.

Фінальні ймовірності падіння й росту цін 0,48 і 0,52 і не залежать від початкового стану ринку.

10.4 Визначення дискретних систем, у яких протікає марківський процес з безперервним часом

Нехай система S з можливими дискретними станами S_1, S_2,... S_n є під впливом марківського процесу з безперервним часом.

Нехай усі потоки подій під впливом яких відбуваються переходи станів системи є найпростішимиі потоками подій (стаціонарні пуассонівські). Інтенсивність потоків λ_{ij}=const (i,j=1,...,n).

Нехай $P_i(t)$, i=1,...,n імовірності станів S_i системи S у момент часу t. Фінальні ймовірності станів:

$$p_i = \lim_{t \to \infty} p_i(t) \ \ (i=1,..,n). \tag{11.1}$$

Умови існування фінальних імовірностей визначається теоремою:

10.5 Існування фінальних імовірностей для дискретних систем, що перебувають під впливом марківського процесу з безперервним часом

Теорема 10.4

Якщо число станів системи S кінечне, система S – ергодична, усі потоки, що породжують переходи станів, – є найпростіші, то існують фінальні ймовірності станів, які не залежать ні від часу, ні від початкового стану системи S.

Якщо фінальні ймовірності існують, то для них виконуються умови нормування $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Фінальна ймовірність p_i має сенс середнього відносного часу перебування системи S у стані S_i після переходу системи в стаціонарний режим. Характеристики $\overline{T_i}$ - середній час перебування системи S у стані S_i, є математичне очікування величини T_i, що визначає час однократного перебування системи S у стані S_i.

$\overline{v_i}$ – середній час перебування системи S поза станом S_i, або математичне очікування випадкової величини v_i, – часу однократного перебування системи S поза станом S_i.

Фінальна ймовірність P_i перебування системи S у стані S_i..

$$P_i = \frac{\overline{T_i}}{\overline{T_i} + \overline{v_i}}, \text{ (i= 1,2,... n)} \tag{11.2}$$

Приклад 10.6

Нехай система S перебуває в одному з можливих станів S_1, S_2, S_3, S_4 з фінальними ймовірностями P_1=0.4, P_2=0.1, P_3= 0.3, P_4=0.2. Це означає, що після встановлення стаціонарного режиму, система S 0,4 інтервалу часу буде перебувати в стані S_1, 0,1 в S_2, 0,3 в S_3, 0,2 в S_4. Обчислення фінальних імовірностей P_i, i=1,2,...,n проводиться по формулі (11.1) для ймовірностей отриманих із системи диференційних рівнянь Колмогорова для дискретних систем з безперервним часом. Можна зробити іншим способом, виконавши перехід для системи диференційних рівнянь Колмогорова, враховуючи, що в стаціонарному режимі ймовірності стають const, похідні в правій частині стають рівними 0, одержимо однорідну лінійну систему алгебраїчних рівнянь для p_i, i=1,..,n:

$$-\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) \cdot p_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} p_j = 0 \quad i = 1,\dots,n\,, \tag{11.3}$$

де $\lambda_{ii} = 0,\ i = 1,\dots,n$, визначник системи буде дорівнювати:

$$\Delta = \left\| \begin{bmatrix} -(\lambda_{12} + \ .. + \lambda_{1n}) & \lambda_{21} & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23} + \ .. + \lambda_{24}) & \lambda_{n2} \\ .. & .. & .. \\ \lambda_{1n} & \lambda_{2n} & -(\lambda_{n1} + \ .. + \lambda_{n,n+1}) \end{bmatrix} \right\| . \tag{11.4}$$

Сума елементів кожного стовпця визначника рівна 0. Сума рядків визначника рівна 0, отже рядки лінійно залежні, що виходить $|\Delta = 0|$, отже однорідна система має нескінченну множину розв'язків (p_1,..., p_n), з яких вибирається, той яке задовольняє умовам нормування.

10.6 Правила складання систем рівнянь для визначення фінальних імовірностей стану

Три правила складання системи рівнянь (11.3).

1. Правило складання системи (11.3) по розміченому графу станів системи S, i-те рівняння складається так: зі знаком мінус записується добуток: $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\right) \cdot p_i$, суми $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}$ всіх щільностей імовірностей переходів λ_{ij}, відповідних до стрілок, що виходять із i-го стану Si, помножену на фінальну

ймовірність p_i, стану S_i плюс суму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_j$, добутків щільностей імовірностей переходів λ_{ij}, відповідних до стрілок, що входять у стан S_i зі стану S_j на фінальні ймовірності p_j станів S_j.

2. Правило складання системи (11.3) по розміченому графі станів системи S. Систему (11.3) можна записати у вигляді: $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_i = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j$ i = 1,.n. Сума $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_i$ добутків $\lambda_{ij}p_i$ щільностей імовірностей переходів λ_{ij}, відповідних до стрілок, що входять зі стану S_i стрілкам, на фінальні ймовірності p_i цього стану S_i дорівнює сумі $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j$ добутків $\lambda_{ji}p_j$ щільностей імовірностей переходів λ_{ji}, що відповідають вхідним у стан S_i стрілкам зі стану S_j на відповідні фінальні ймовірності p_j станів S_j

3. Правило складання системи (11.3) по матриці щільностей імовірностей переходів. Для запису i-го рівняння системи (11.3) по матриці щільностей імовірностей треба суму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}p_i$ добутків $\lambda_{ij}p_i$ елементів i -ой рядка матриці перехідних імовірностей на фінальну ймовірність p_i дорівняти сумі добутків елементів i-го стовпця на відповідні фінальні ймовірності p_j.

Приклад10.7

Аналіз ринку цінних паперів показав, що ринкова ціна однієї акції може коливатися в межах від 1 до 10 грн.

У якості системи розглянемо одну акцію. Нехай можливі чотири стани системи:

S_1 – ціна від 1грн. до 4грн.

S_2 – ціна від 4грн. до 7грн

S_3 – ціна від 7грн. до 9грн

S_4 – ціна від 9грн. до 10грн.

Переходи з одного стану в інше відбуваються із щільностями ймовірностей, які практично не змінюються згодом.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Довгостроковий прогноз вимагає відповіді на запитання: чи варто купляти акцію за ціною 6 грн?

У системі S протікає однорідний марківський випадковий процес із безперервним часом. Потік, що породжує переходи є найпростішим потоком. Система S ергодична. Для визначення фінальних імовірностей складемо систему рівнянь Колмогорова.

$$-4*P_1 + 3*P_3 = 0$$

$$4*P_1 - 10*P_2 + 2*P_3 = 0$$
$$10*P_2 - 6*P_3 + 4*P_4 = 0$$
$$P_3 - 4*P_4 = 0$$

Розв'язок системи $P_1 = 3*P_4$, $P_2 = 2*P_4$, $P_3 = 4*P_4$, залежить від одного вільного параметра P_4. Серед приватних розв'язків системи рівнянь виберемо те яке задовольняє умові нормування, підставивши значення P_1, P_2,P_4.

$P_4 = 0.1$, $P_1 = 0.3$, $P_2 = 0.2$, $P_3 = 0.4$

Довгостроковий прогноз ринкової ціни акції показує, що в режимі, що встановився, найбільш імовірної ціна за акцію буде перебувати в межах від 7 до 9грн, тобто акції придбати варто.

Контрольні запитання і завдання

1. Що визначає фінальний стаціонарний режим?
2. Визначення фінальних імовірностей стану системи.
3. Необхідні й достатні умови існування фінальних імовірностей.
4. Векторно-матричне рівняння для визначення фінальних імовірностей.
5. Визначення регулярного марківськой ланцюга.
6. Чи існують фінальні вірогідності для регулярного однородного марківського ланцюга?
7. Визначення дискретного процесу.
8. Визначення однорідного дискретного процесу.
9. Визначення процесу з безперервним часом.
10. Визначення фінальних імовірностей стану системи в якій протікає однорідний, дискретний марківський процес із безперервним часом.
11. Як визначаються фінальні ймовірності для системи S?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Імовірності стану у фінальному стаціонарному режимі називаються:

а) фінальними або стаціонарними ймовірностями;

б) абсолютними ймовірностями;

в) нестабільними ймовірностями;

г) регулярними ймовірностями.

2. Якщо існує число m, таке, що будь-який елемент матриці P^m позитивний, за винятком, можливо елементів, що стоять у стовпчиках, номера яких збігаються з номерами нестійких станів системи S (станів без входів), тоді такий марківський ланцюг назівається:

а) нерегулярним;

б) регулярним;

в) однорідним;

г) неоднорідним;

д) фінальним.

3. Фінальні ймовірності P_1, P_2, ...P_n існують, якщо однорідний марківський ланцюг з кінцевим числом станів є:

а) нерегулярним;
б) однорідним;
в) регулярним;
г) неоднорідним;
д) дискретним.

4. Фінальні ймовірності можна визначити таким чином:

а) перевірити марківський ланцюг на нерегулярність;
б) побудувати граф станів системи;
в) побудувати матрицю перехідних ймовірностей;
г) записати систему диференційних рівнянь Колмогорова;
д) перевірити марківський ланцюг на регулярність.

Практичні завдання

Задача 10.1

Компанія з прокату автомобілів у місті видає автомобілі напрокат в трьох пунктах міста: А, В, С. Клієнти можуть повертати автомобілі в будь-який з трьох пунктів. Аналіз процесу повернення автомобілів із прокату протягом року показав, що клієнти повертають автомобілі в пункти А, В, С у відповідності з наступними ймовірностями (таблиця 10.1):

Таблиця 10.1 – Вихідні данні

Пункти видання	Пункти прийому автомобілів		
	А	В	С
А	0,8	0,2	0
В	0,2	0	0,8
С	0,2	0,2	0,6

Охарактеризувати процес, що протікає в системі. Побудувати розмічений граф станів системи. Знайти ймовірності станів в сталому режимі. Визначити пункт прокату, у якого більш доцільно будувати станцію з ремонту автомобілів.

ТЕМА 11. ПРОЦЕСИ ЗАГИБЕЛІ ТА РОЗМНОЖЕННЯ

11.1 Визначення процесу загибелі й розмноження
11.2 Фінальні ймовірності процесу загибелі й розмноження
11.3 Процеси гибелі та розмноження з n вузлами

11.1 Визначення процесу загибелі й розмноження

Марківський процес, що протікає в системі S з кінцевим числом станів, називається процесом **загибелі** й **розмноження** якщо граф її станів має структуру

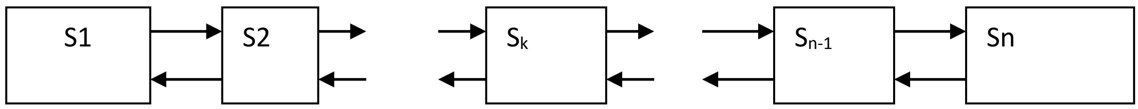


Рисунок 11.1 – Граф станів процесу гибелі та розмноження

Специфіка графа полягає в тому, що кожний зі станів $S_2,...S_k,...S_{n-1}$ зв'язаний стрілками переходу із сусідніми станами за винятком S_1 і S_n.

Система S, у якій протікає процес загибелі й розмноження може з будь-якого свого стану безпосередньо перейти тільки в один із сусідніх станів.

Процес переходу «розмноження» $\longrightarrow$ $\longrightarrow$
процес переходу «загибель» $\longleftarrow$ $\longleftarrow$

Приклад 11.1

Вхід на станцію метрополітена обладнаний системою із п'яти турнікетів. При виході з ладу одного з турнікетів решта продовжують нормально функціонувати. Вхід на станцію перекривається, якщо вийдуть з ладу всі турнікети. Потік відмов кожного турнікета При виході з ладу кожний турнікет починає відразу ремонтуватися. Побудуємо граф станів системи та знайти її граничні ймовірності.

Маємо процес загибелі та розмноження. Стани системи:
A0 – всі турнікети – справні;
A1 – один турнікет ремонтується, чотири – справні;
A2 – два турнікети ремонтується, три – справні;
A3 – три турнікети ремонтується, два – справні;
A4 – чотири турнікети ремонтується, один – справний;
A5 – всі турнікети ремонтуються.
Граф станів системи представлено на рис. 11.2.

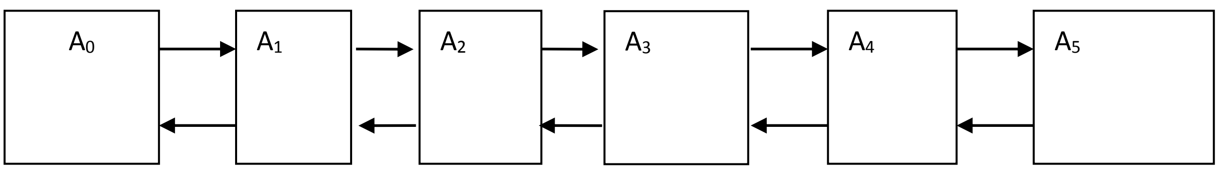


Рисунок 11.2 – Граф станів процесу гибелі та розмноження системи турнікетів метрополітену

Нехай процес загибелі й розмноження має розмічений граф станів.

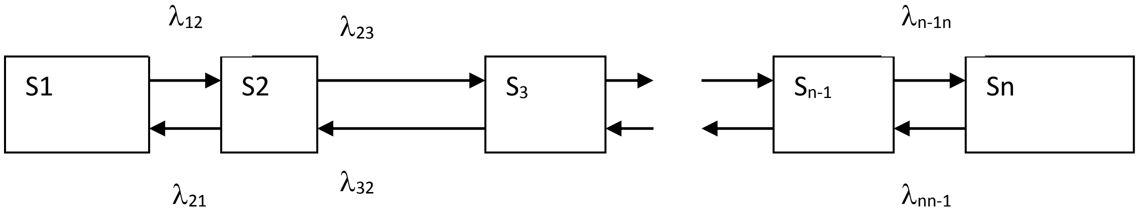


Рисунок 11.3 – Розмічений граф станів процесу гибелі та розмноження

Матриця щільностей ймовірностей переходу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & 0 & \lambda_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & 0 & \lambda_{n-2} & 0 \\ \dots & \dots & \lambda_{n-1} & 0 & \lambda_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Наддіагональ

Діагональ

Піддіагональ

Система диференційних рівнянь Колмогорова для визначення ймовірностей стану має вигляд:

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t) \\ p_k'(t) = -(\lambda_{k,k-1} + \lambda_{k,k+1}) p_k(t) + \lambda_{k-1,k} p_{k-1}(t) + \lambda_{k+1,k} p_{k+1}(t), k = 2,\dots, n-1. \\ p_n'(t) = -\lambda_{n,n-1} p_n(t) + \lambda_{n-1,n} p_n(t) \end{cases} \quad (11.1)$$

У випадку стаціонарного пуассонівського процесу $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$. Для розв'язку системи (11.1) слід задати вектор початкового розподілу ймовірностей стану ($p_1(0)$, ..., $p_n(0)$), що задовольняє умові нормування: $p_1(0)+p_2(0)+...+p_n(0)=1$. Система S загибелі й розмноження є ергодичною системою, і для неї існують фінальні ймовірності стану p_1, ..., p_n.

11.2 Фінальні ймовірності процесу загибелі й розмноження

Теорема 11.1

Фінальні ймовірності p_1, ..., p_n процесу загибелі й розмноження з безперервним часом можна обчислити за формулами:

$$\begin{cases} p_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right)^{-1}, \\ p_k = \alpha_k \cdot p_1 \end{cases} \quad (11.2)$$

де

$$\alpha_k = \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{23} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k-1k}}{\lambda_{k\,k-1}\lambda_{k-1k-2} \ldots \lambda_{21}}. \tag{11.3}$$

Доказ:

Складемо по якому або із правил систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0 \\ -(\lambda_{k,k-1} + \lambda_{k,k+1})p_k + \lambda_{k-1,k}p_{k-1} + \lambda_{k+1,k}p_{k+1} \quad k = 2,\ldots,n-1 \\ -\lambda_{n,n-1}p_n(t) + \lambda_{n-1,n}p_n(t) = 0 \end{cases}. \tag{11.4}$$

Матриця коефіцієнтів системи:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & -\lambda_{21} & \lambda_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & -\lambda_{32} - \lambda_{34} & \lambda_{43} & 0 \\ \ldots & \ldots & \lambda_{n-3n-2} & -\lambda_{n-2n-3} & \lambda_{n-1n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1n} & -\lambda_{nn-1} \end{pmatrix}. \tag{11.5}$$

Над матрицею виконаємо елементарні перетворення, послідовне додавання рядків і доповнивши систему умовою нормування одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda_{12}p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0 \\ -\lambda_{23}p_k + \lambda_{32}p_3 = 0 \\ -\lambda_{n-2n-1}p_{n-2} + \lambda_{n-1n-2}p_{n-1} = 0 \\ -\lambda_{n-1,n}p_{n-1} + \lambda_{n-1n}p_n = 0 \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \end{cases}. \tag{11.6}$$

Послідовно вирішуючи рівняння системи, одержимо:

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1 = \alpha_2 p_1. \tag{11.7}$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} p_1 = \alpha_3 p_1. \tag{11.8}$$

...

$$p_n = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23} \ldots \lambda_{n-1n}}{\lambda_{n\,n-1}\lambda_{n-1n-2} \ldots \lambda_{21}} p_1 = \alpha_n p_1. \tag{11.9}$$

Для одержання формули в першому рядку скористаємося умовою нормування:

$$p_1 + \alpha_2 p_1 + \ldots + \alpha_n p_1 = 1, \tag{11.10}$$

звідки

$$p_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right)^{-1}. \tag{11.11}$$

Якщо нумерацію станів системи починати з 0, то:

$$\begin{cases} P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{-1} \\ P_k = \alpha_k \cdot P_0 \end{cases}. \qquad (11.12)$$

Приклад 11.2

Ринкова ціна однієї акції акціонерного товариства може коливатися в межах від 1000 до 2000 грн. Нехай S система, що полягає з однієї акції з можливими станами:

S_1- ціна однієї акції від 1000 до 1200 грн.

S_2- ціна однієї акції від 1200 до 1400 грн.

S_3- ціна однієї акції від 1400 до 1600 грн.

S_4- ціна однієї акції від 1600 до 1800 грн.

S_5- ціна однієї акції від 1800 до 2000 грн.

Матриця щільностей імовірностей переходів має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Необхідно спрогнозувати ринкову ціну акції й визначити доцільність придбання акції за ціною 1700 грн.

Процес дискретний марківський, з безперервним часом, однорідний. Розмічений граф стану має вигляд:

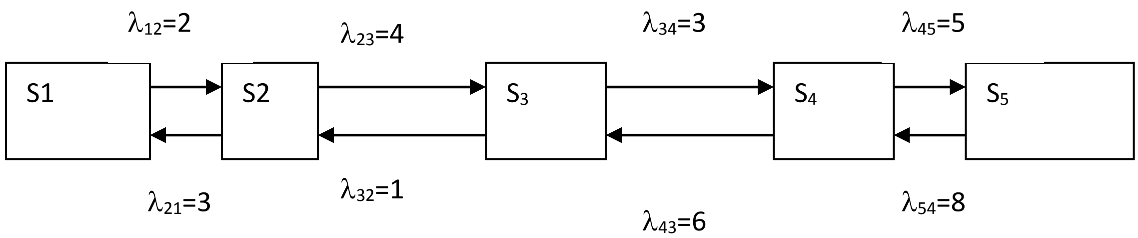


Рисунок 11.4 – Розмічений граф станів процесу гибелі та розмноження

Даний процес має вигляд процесу загибелі й розмноження, для якого існують фінальні ймовірності стану p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

Визначимо значення коефіцієнтів:

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{32}\lambda_{21}} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{8}{3}$$

$$\alpha_4 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\lambda_{43}\lambda_{32}\lambda_{21}} = \frac{2\cdot4\cdot3}{6\cdot1\cdot3} = \frac{4}{3}$$

$$\alpha_5 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}\lambda_{45}}{\lambda_{54}\lambda_{43}\lambda_{32}\lambda_{21}} = \frac{2\cdot4\cdot3\cdot5}{8\cdot6\cdot1\cdot3} = \frac{5}{6}$$

По формулах (11.2) і (11.3) одержимо:

$$p_1 = \left(1 + \sum_{k=2}^{5}\alpha_k\right)^{-1} = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6}\right)^{-1} = \frac{2}{13}$$

$$p_2 = \alpha_2 \cdot p_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{13} = \frac{4}{39}$$

$$p_3 = \alpha_3 \cdot p_1 = \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{13} = \frac{16}{39}$$

$$p_4 = \alpha_4 \cdot p_1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{13} = \frac{8}{39}$$

$$p_5 = \alpha_5 \cdot p_1 = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{13} = \frac{5}{39}$$

Найбільш імовірний стан:

$$p_3 = \frac{16}{39},$$

що відповідає стану S_3 – ціні акції від 1400 до 1600 грн.

Відповідно до отриманих результатів придбання акцій підприємства за ціною 1700 грн недоцільно.

11.3 Процеси гибелі та розмноження з n вузлами

Розглянемо один із спеціальних видів процесу загибелі і розмноження.

Нехай система S складається з n «вузлів». Як приклад «вузлів» можна розглянути комп'ютери, банкомати, верстати і т.д. Кожен з «вузлів» незалежно від інших може «відмовляти» (тобто виходити з ладу). Будемо це теоретично інтерпретувати так. На кожен вузол діє найпростіший «потік відмов», подіями якого є відмови вузла. У проміжку між двома сусідніми відмовами вузол працює безвідмовно. Середній час безвідмовної роботи кожного вузла позначимо через $\overline{T_\delta}$ Якщо вузол справний, то при появі першого після цього моменту події потоку відмов, що діють на даний вузол, вузол виходить з ладу. Проте, доцільно розглядати «весь» потік відмов, оскільки це дасть нам можливість говорити про його інтенсивності.

Вузол, що відмовив, відразу починає відновлюватися (ремонтуватися). Будемо вважати, що на кожен вузол діє найпростіший «потік відновлень», подіями якого є відновлення (закінчення ремонту). В інтервалі між двома сусідніми відновленнями вузол знаходиться в ремонті. Середній час процесу відновлення (ремонту) позначимо через $\overline{T_в}$. Вузол, що ремонтується, відновлюється при появі першої події потоку відновлень, що впливає на цей вузол. Незважаючи на це, так само, як і у випадку потоку «відмов», розглядається «весь» потік відновлень, який виправдовує розгляд інтенсивності цього потоку.

Пронумеруємо стану системи S по числу відмовили вузлів:

S_0- вузлів, що відмовили,. немає, всі n вузлів справні;

S_1 - 1 вузол відмовив (відновлюється), решта n -1 вузлів справні;

S_2 - 2 вузла відмовили (відновлюються), решта n-2 вузла справні;

…..

S_{n-1} - n -1 вузлів відмовили (відновлюються), 1 вузол справний;

Sn - всі n вузлів відмовили (відновлюються).

Граф станів системи S представлений на рис 11.5.

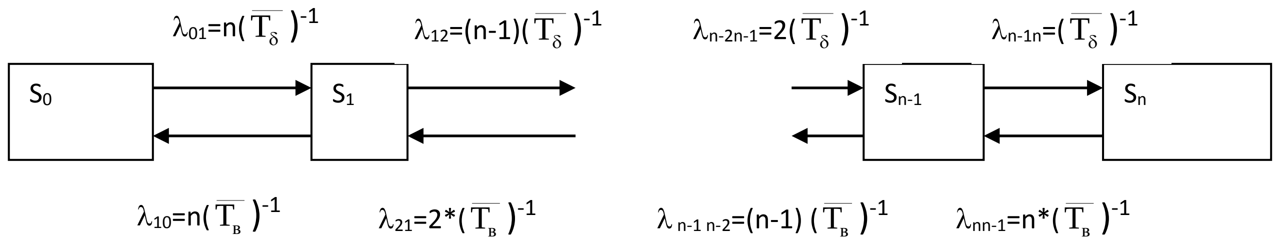


Рисунок 11.5 – Граф станів системи S

Фінальні ймовірності p_1, ..., p_n станів системи S виражаються за формулами (11.2), (11.3) через щільності ймовірностей переходів системи зі стану в стан. Але іноді середні часи безвідмовної роботи $\overline{T_\delta}$ і процесу відновлення $\overline{T_в}$ вузла практично підрахувати легше, ніж щільності ймовірностей переходів. Тому виникає задача вирази фінальних ймовірностей через середні часи $\overline{T_\delta}$ і $\overline{T_в}$. Вирішення цієї задач і в наступній теоремі.

Теорема 11.2

Для фінальних ймовірностей p_1, ..., p_n справедливі наступні формули

$$p_k = C_n^k\left(\frac{\overline{T_в}}{\overline{T_\delta}}\right)^k\left(1+\frac{\overline{T_в}}{\overline{T_\delta}}\right)^{-n},\ k = 0,1,2,..n, \tag{11.13}$$

де

$$C_n^k = \frac{n(n-1)*...*(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{11.14}$$

Число сполучень з n по k.

Приклад 11.3

У групі фінансово-економічної інформації фінансової компанії використовується три комп'ютери, кожен з яких незалежно від інших може виходити з ладу. Потік відмов комп'ютера - найпростіший. Середній час безвідмовної роботи комп'ютера $\overline{T_\delta}$= 120 годин. Що вийшов з ладу комп'ютер негайно починає ремонтуватися (відновлюватися). Потік відновлень найпростіший. Середній час ремонту комп'ютера $\overline{T_в}$ = 6 годин.

Знайдемо середню ефективність роботи групи фінансово-економічної інформації, якщо при трьох функціонуючих комп'ютерах вона дорівнює 100%, при двох - 60%, при одному - 30%, а при непрацюючих комп'ютерах - 10%.

В якості системи S розглянемо сукупність трьох комп'ютерів. Стани системи S пронумеруємо по числу комп'ютерів, які відмовили: S_k – k комп'ютерів відмовили (находяться в ремонті), а 3 – k працюють, k = 0,1,2,3. Дана ситуація цілком вкладається в розглянуту вище модель - процесу загибелі і розмноження, якщо в якості «вузла» вважати комп'ютер і покласти n = 3. Тому формули (11.13) при n= 3 дають можливість відразу підрахувати фінальні ймовірності p_0, p_1 p_2, p_3 станів системи S:

$$p_0 = \left(1+\frac{6}{120}\right)^{-3} = 0.8638$$

$$p_1 = C_3^1\left(\frac{6}{120}\right)^1 0.8638 = 3*0.05*08638 = 0.1296$$

$$p_2 = C_3^2\left(\frac{6}{120}\right)^2 0.8638 = 3*0.0025*08638 = 0.0065$$

$$p_3 = C_3^3\left(\frac{6}{120}\right)^3 0.8638 = 1*0.000125*08638 = 0.0001$$

Таким чином, в сталому фінальному стаціонарному режимі найімовірніше (p_0 = 0,8638, k = 1, 2, 3), що всі три комп'ютера будуть справно працювати.

Щоб підрахувати середню ефективність роботи ґрупи фінансово-економічної інформації, розглянемо дискретну випадкову величину X, що представляє собою середню ефективність роботи цієї групи в кожному з станів S_0, S_1, S_2, S_3 виражену в%. Тоді в силу умови прикладу ряд розподілу випадкової величини X буде виглядати так:

X	100%	60%	30%	10%
P	p_0	p_1	p_2	p_3

Тобто випадкова величина X може прийняти значення 100% з імовірністю p_0 = 0,8638; 60% з імовірністю p_1 = 0,1296; 30% з імовірністю p_2 = 0,0065 і 10% з імовірністю p_3 = 0,0001.

Середня ефективність роботи системи S дорівнює математичному очікуванню випадкової величини X:

$$M[X] = p_0*100\% + p_1*60\% + p_2*30\% + p_3*10\% = 0.8638*100\% + 0.1296*60\% +$$
$$+0.0065*30\% + 0.0001*10\% = 94.352\%$$

Таким чином ефективність роботи групи фінансово-економічної інформації стаціонарному режимі роботи комп’ютерів достатньо висока – 94 %.

Контрольні запитання і завдання:

1. Визначення процесу загибелі й розмноження.
2. Які характерні ознаки графа станів системи загибелі й розмноження?
3. Який вид має матриця щільностей імовірностей переходу для процесу загибелі й розмноження?
4. Формули розрахунків фінальних імовірностей для процесу загибелі й розмноження.

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Система S, у якій протікає процес загибелі й розмноження може з будь-якого свого стану безпосередньо перейти
   а) в будь-який стан системи;
   б) тільки в один із сусідніх станів;
   в) не має переходів;
   г) тільки один раз в будь-який стан системи.
2. Система S, у якій протікає процес загибелі й розмноження
   а) має стани без входу;
   б) має стани без виходу;
   в) не має фінальних ймовірностей;
   г) є ергодичною.
3. В матриці щільностей ймовірностей переходів процесу гибелі та розмноження процес гибелі відображається:
   а) головною діагоналлю;
   б) наддіагоналлю;
   в) піддіагоналлю;
   г) у стовпцях;
   д) у рядках.

Прикладні завдання

Задача 11.1

Дайте характеристику процесу, що протікає в системі S, знайдіть ймовірності станів в стаціонарному режимі для процесу, граф якого показаний на рис.11.6.

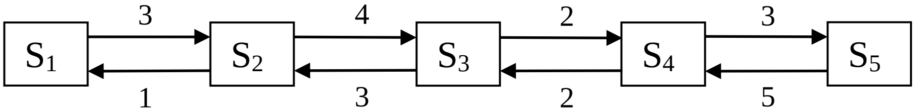


Рисунок 11.6 – Граф станів системи S

ТЕМА 12 ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

12.1 Загальна характеристика системи масового обслуговування

12.2 Класифікація системи масового обслуговування та їхні основні характеристики

12.3 Одноканальна система масового обслуговування з відмовами

12.4 Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами

12.5 Одноканальна система масового обслуговування з обмеженою чергою

12.6 Одноканальна система масового обслуговування з необмеженою чергою

12.7 Багатоканальна система масового обслуговування з обмеженою чергою

12.8 Багатоканальна система масового обслуговування з необмеженою чергою

12.1 Загальна характеристика системи масового обслуговування

При економіко-математичному моделюванні досить часто доводиться мати справу із системами, які називаються системами масового обслуговування (СМО). Прикладами таких систем можуть бути: телефонні станції, ремонтні майстерні, каси, магазини, телефонні станції, ремонтні майстерні, довідкові бюро, і т.д.

Кожна СМО складається з деякої кількості обслуговуючих елементів, які називаються каналами обслуговування (лінії зв’язку, прибори, робочі місця, залізничні шляхи, ліфти і т.п.). Системи масового обслуговування можуть бути **одноканальними та багатоканальними**.

Кожна СМО призначена для обслуговування деякого потока заявок, що надходять до СМО у випадкові моменти часу. Обслуговування заявок продовжується деякий (випадковий) час, після чого канал звільняється і є готовим до роботи з наступною заявкою.

Заявкою називають попит на задовільнення деякої потреби. Випадковий характер потока заявок приводить до того, що у деякі проміжки часу на вході СМО накопичуються заявки, стають у чергу на обслуговування, або отримують відмову.

Кожна СМО, залежно від кількості каналів та їхньої продуктивності, мають деяку пропускну спроможність, що дозволяє їй більш або менш успішно опрацьовувати заявки.

Предмет теорії масового обслуговування – з’ясування залежності між характером потока заявок, кількістю каналів, їхньою продуктивністю, правилами роботи СМО та ефективністю обслуговування.

Як характеристики ефективності обслуговування можуть використовуватися різні величини та функції, наприклад:

- середня кількість заявок, що можуть обслуговуватися СМО в одиницю часу;
- середній відсоток заявок, що отримують відмову в обслуговування;

- ймовірність того, що не буде стояти у черзі, а зразу буде прийнята до обслуговування;

- середній час очікування у черзі;

- середня кількість заявок, що знаходяться у черзі, і т.д.

Випадковий характер потоку заявок, а загалом і часу обслуговування, приводить до того, що у СМО буде відбуватися випадковий процес. Математичний аналіз роботи СМО досить полегшується, якщо випадковий процес є марківським. Тоді є можливість досить просто описати роботу СМО за допомогою апарата звичайних диференціальних рівнянь (у граничному випадку – лінійних алгебраїчних) і виразити в явному вигляді основні характеристики ефективності обслуговування через параметри СМО та потока заявок. Для цього необхідно, щоб всі потоки були пуасонівськими та марківськими (без післядії). Якщо ці потоки не є пуасонівськими, математичний аналіз систем стає набагато складнішим. Однак, апарат «марківської» теорії масового обслуговування може стати в нагоді і тоді, коли процес, що відбувається у СМО, відрізняється від марківського – з його допомогою характеристики ефективності СМО можуть бути оцінені наближено. Є сенс наголосити на тому, що чим складніша СМО, чим більше в ній каналів, тим точнішими виявляються наближені формули, які отримані за допомогою марківської теорії.

12.2 Класифікація системи масового обслуговування та їхні основні характеристики

Системи масового обслуговування можуть бути двох типів.

Системи з відмовами. У таких системах заявка, яка надходить у момент, коли всі канали зайняті, отримує «відмову», покидає СМО та надалі не обслуговується.

Системи з очікуванням (з чергою). У таких системах заявка, яка надходить у момент, коли всі канали зайняті, стає у чергу та очікує, поки не звільниться один з каналів.

Обслуговування у системах з очікуванням може бути «упорядкованим» (заявки обслуговуються у порядку надходження) та «неупорядкованим» (заявки обслуговуються у випадковому порядку). Окрім того, у деяких СМО застосовується так зване «обслуговування з пріоритетами», коли деякі заявки обслуговуються у першу чергу.

Системи з чергою поділяються на системи з необмеженим очікуванням та системи з обмеженим очікуванням.

У **системах з необмеженим очікуванням** кожна заявка, яка надходить у момент, коли всі канали зайняті, стає у чергу. Будь-яка заявка, що надходить у СМО, рано чи пізно буде обслужена.

У **системах з обмеженим очікуванням** на перебування системи у черзі накладаються ті чи інші обмеження. Ці обмеження можуть стосуватися довжини черги, часу перебування заявки у черзі, загального часу перебування заявки у СМО і т.д.

Залежно від типу СМО, при оцінці її ефективності можуть застосовуватися різні характеристики. Наприклад, для СМО з відмовами однією з найважливіших характеристик є **абсолютна пропускна спроможність** – середня кількість заявок, яку може обслужити система за одиницю часу.

Разом з абсолютною, часто використовується **відносна пропускна спроможність СМО** – відношення середньої кількості заявок, що обслуговуються системою за одиницю часу, до середньої кількості заявок, що надходить за цей час.

При аналізі СМО з відмовами використовуються й інші характеристики, а саме:

- середня кількість зайнятих каналів;
- середній відносний час простою системи та окремого канала і т.д.

Очевидно, для СМО з необмеженим очікуванням як абсолютна, так і відносна пропускна спроможність втрачають сенс, оскільки кожна заявка рано чи пізно буде обслужена. Проте для такої СМО є важливими такі характеристики:

- середня кількість заявок у черзі;
- середня кількість заявок у системі (у черзі та під обслуговуванням);
- середній час очікування заявки у черзі;
- середній час перебування заявки у системі (у черзі та під обслуговуванням) та інші.

Для СМО з обмеженим очікуванням цікавими є обидві групи характеристик: як абсолютна та відносна пропускна спроможності, так і характеристики очікування.

Для аналізу процесу, що відбувається у СМО, важливо знати основні параметри системи: кількість каналів n, інтенсивність потоку заявок λ, продуктивність кожного канала (середня кількість заявок μ, що обслуговується каналом за одиницю часу), умови утворення черги (обмеження, якщо вони є). Зауважимо, що всі потоки, які переводять систему з одного стану у інший, будемо вважати пуасонівськими.

12.3 Одноканальна система масового обслуговування з відмовами

Одноканальна СМО з відмовами є найпростішою з усіх задач теорії масового обслуговування. Граф станів зображений на рис.12.1.

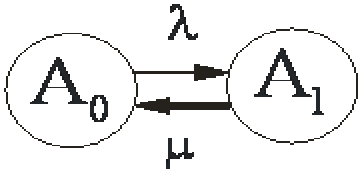


Рисунок 12.1 – Граф станів одно канальної СМО

Система може знаходитися в одному з двох станів:

A_0 – канал вільний,

A_1 – канал зайнятий.

Із стану A_0 у стан A_1 систему переводить потік заявок з інтенсивністю λ, а з стану A_1 у стан A_0 – потік обслуговування з інтенсивністю μ.

Складемо диференціальні рівняння Колмогорова для системи:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0 + \mu\ p_1;$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0 - \mu\ p_1. \tag{12.1}$$

Враховуючи, що

$$p_0 + p_1 = 1, \tag{12.2}$$

візьмемо із системи рівнянь (12.1) лише перше та підставимо в нього залежність (12.2):

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\mu + \lambda)\, p_0 + \mu\ . \tag{12.3}$$

Це рівняння природньо розв’язувати при початкових умовах $p_0(0) = 1$ $p_1(0) = 0$ (у початковий момент канал вільний). Результатом опрацювання рівняння є $p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$ Граничні значення для ймовірностей ($t \to \infty$):

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\ . \tag{12.4}$$

Неважко помітити, що для одноканальної СМО з відмовами p_0 є ні чим іншим, як відносною пропускною спроможністю Q (p_0 – ймовірність того, що у момент t канал вільний, тобто заявка, що надійшла у систему, буде обслужена; а значить, для даного моменту часу середнє відношення кількості обслужених заявок до кількості тих, що надійшли, також дорівнює p_0): $Q = p_0$. При $t \to \infty; Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Знаючи відносну пропускну спроможність Q, знайдемо абсолютну пропускну спроможність:

$$A = \lambda Q,\ Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}. \tag{12.5}$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні заявки:

$$p_{\text{від}} = 1 - Q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\ . \tag{12.6}$$

12.4 Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами

Розглянемо n-канальну СМО з відмовами. Стани системи:

A_0 – всі канали вільні;

A_1 – зайнятий один канал, інші – вільні;

A_2 – зайняті два канали, інші – вільні;

A_3 – зайняті три канали, інші – вільні;

A_k – зайняті k каналів, інші – вільні;

A_n – зайняті всі канали.

Граф станів СМО показаний на рис. 12.2.

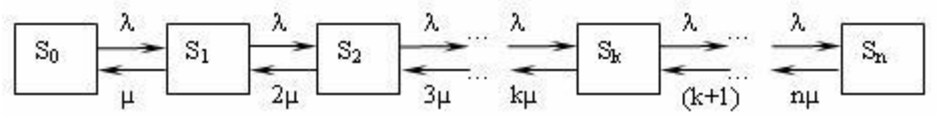


Рисунок 12.2 – Граф станів СМО з відмовами

З рис. 12.2 видно, що процес, який відбувається у системі, є частковим випадком процесу знищення та розмноження.

Граничний розподіл ймовірностей станів можна обчислити, поклавши $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (ρ − коефіцієнт завантаження системи):

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0;\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0;...;\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \qquad (12.7)$$

Отримані формули називаються формулами Ерланга. Ґрунтуючись на формулах Ерланга, визначають показники ефективності СМО:

$$A = \lambda(1 - p_n), Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - p_n;$$

$$p_{\hat{a}^{3}\ddot{a}} = p_n, \bar{n} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_n), \qquad (12.8)$$

де $\bar{n}$ – середня кількість зайнятих каналів (один зайнятий канал обслуговує в середньому за одиницю часу μ заявок; середня кількість зайнятих каналів отримується діленням А на μ).

Приклад 12.1

На залізничному вокзалі працює три аптечних кіоски. Якщо клієнт підходить до кіоску, коли вони зайняті, то він відходить без обслуговування. Середня кількість клієнтів, що звертаються до кіосків протягом часу складає 20. Середній час на обслуговування клієнту складає 6 хвилин. Визначити основні характеристики ефективності функціонування кіосків в граничному режимі: ймовірність отримання відказу, ймовірність що клієнт буде обслужений, середнє число клієнтів А, що обслуговується протягом часу, середнє число зайнятих обслуговуванням кіосків.

Розв'язування

Дана система може розглядатися як багатоканальна СМО з відмовами, оскільки на вокзалі пасажири не будуть очікувати обслуговування.

Параметри системи:

n= 3;

λ = 20 (осіб/годину);

μ = 1/$T_{обс}$ = 1/6=10 (осіб/годину);

ρ = λ/ μ = 20/10 =2.

Розрахуємо граничні характеристики СМО, згідно формул 12.7.

Ймовірність того, що всі кіоски вільні складе:

$$p_0 = \left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+.\frac{\rho^3}{3!}\right)^{-1} = \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+.\frac{2^3}{3!}\right)^{-1} = 0.158.$$

Ймовірність того, що зайнятий один кіоск складає:

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}; p_0 = \frac{2}{1!}*0.158 = 0.316.$$

Ймовірність того, що зайняті два кіоски складає:

$$p_1 = \frac{\rho^2}{2!}; p_0 = \frac{4}{2!}*0.158 = 0.316.$$

Ймовірність того, що зайняті три кіоски складає:

$$p_1 = \frac{\rho^3}{3!}; p_0 = \frac{8}{3!}*0.158 = 0.211.$$

Перевірка нормувального рівняння

0,158+0,316+0,316+0,211= 1.

Середня кількість зайнятих каналів складає

$$\bar{n} = \frac{A}{\mu} = \rho(1-p_n) = 20*(1-0.211) = 15.810\,.$$

Ймовірність того, що клієнта не буде осбужено складе ймовірність того, що всі кіоски зайняті, тобто 0,211.

Ймовірність того, що клієнт буду обслужений визначається

$$Q = 1 - p_n = 1 - 0.211 = 0.789.$$

тобто 79 клієнтів зі 100 буде обслужено

Абсолютна пропускна можливість СМО, тобто середнє число клієнтів, яке обслуговується в одиницю часу, складає

$$A = \lambda Q = 20*0.789 = 15.78.$$

Але це значення можна підрахувати і наступним чином

$$A = \mu\bar{n} = 10*15.810 = 15.81.$$

Розбіжність в дробній частині пов'язана з помимками розрахунків та округленням під час розрахунків.

12.5 Одноканальна система масового обслуговування з обмеженою чергою

Розглянемо найпростішу з усіх можливих СМО з очікуванням – одноканальну систему (n=1), на яку надходить потік заявок з інтенсивністю λ, інтенсивність обслуговування заявок позначимо через μ. Заявка, що надходить у момент, коли канал зайнятий, стає у чергу та очікує обслуговування.

У цьому пункті розглядається система з обмеженою кількістю місць у черзі (m). Граф станів такої системи зображений на рис.12.3, де:

A_0 – канал вільний;
A_1 – канал зайнятий, черги немає;
A_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть у черзі;
………………………………………………
A_k – канал зайнятий, k-1 заявки стоять у черзі;
………………………………………………
A_{m+1} – канал зайнятий, m заявок стоять у черзі.
Таким чином СМО може знаходитись в m+2 станах.

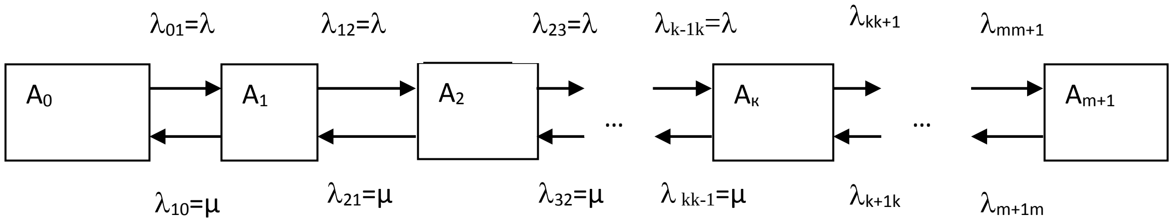


Рисунок 12.3 – Граф одноканальної СМО з відмовами

Схема, що зображена на рис.12.3, є схемою загибелі та розмноження. Запишемо для неї граничні ймовірності:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^{m+1}\right)^{-1};$$
$$p_1 = \rho p_0;\ p_2 = \rho^2 p_0;...;\ p_k = \rho^k p_0;...;\ p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0, \tag{12.9}$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (ρ – коефіцієнт завантаження системи).

Звернемо увагу, що вираз у дужках формули (12.5) є геометричною прогресією з першим членом 1 та знаменником ρ, тоді:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}};$$
$$p_1 = \rho p_0;\ p_2 = \rho^2 p_0;...;\ p_k = \rho^k p_0;...;\ p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0. \tag{12.10}$$

Ці формули є вірними при $\rho \neq 1$. Якщо $\rho = 1$, то сума геометричної прогресії дорівнює $m+2$, а $p_0 = \dfrac{1}{m+2}$.

Визначимо характеристики СМО:

ймовірність відмови $p_{відм} = p_{m+1} = \dfrac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$;

відносна пропускна спроможність

$$Q = 1 - p_{відм} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}};$$

абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q$;

середня кількість заявок, що знаходяться у черзі

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}; \tag{12.11}$$

середня кількість заявок, що знаходяться на обслуговуванні

$$\overline{\omega} = 0 * p_0 + 1 * (1 - p_0) = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}};$$

середня кількість заявок, що знаходяться у СМО, $\overline{k} = \overline{r} + \overline{\omega}$;

середній час очікування заявки у черзі

$$\overline{t_{оч}} = \frac{\rho \ (1 - \rho^{m}(m + 1 - m\rho))}{\mu(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)};$$

порівнюючи цю формулу з формулою (12.7), маємо

$$\overline{t_{оч}} = \frac{1}{\rho\mu} * \overline{r} = \frac{\overline{r}}{\lambda};$$

середній час перебування заявки у системі

$$\overline{t_{сист}} = \overline{t_{оч}} + \frac{Q}{\mu} = \frac{\overline{r}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}.$$

Приклад 12.2

Автозаправна станція (АЗС) є СМО з одним каналом обслуговування (одна колонка). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше трьох автомобілів одночасно (m=3). Якщо у черзі вже знаходиться три авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїжджає повз. Потік машин, що надходять для заправки, має інтенсивність λ=1 (авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому 1,25 хв. Визначити основні характеристики системи.

Розв'язування

Вкажемо спочатку основні характеристики

$$\mu = \frac{1}{1.25} = 0.8; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0.8} = 1.25.$$

За формулами (12.5):

$$p_0 = \frac{1 - 1.25}{1 - 3.05} \approx 0.122; \; p_1 = 1.25 * 0.122 = 0.152; \; p_2 = (1.25)^2 0.122 = 0.191;$$

$$p_3 = (1.25)^3 0.122 = 0.238; \; p_4 = (1.25)^4 0.122 = 0.297.$$

Ймовірність відмови $p_{відм} = p_4 = 0.297.$

Відносна пропускна спроможність $Q = 1 - p_{відм} = 1 - 0.297 = 0.703.$

Абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q = 0.703.$

Середня кількість авто у черзі

$$\overline{r} = \frac{1.25^2(1 - 1.25^3(3 + 1 - 3.75))}{(1 - 1.25^5)(1 - 1.25)} = 1.56.$$

Додаючи до цієї величини середню кількість автомобілів, що знаходяться під обслуговуванням $\overline{\omega} = \frac{1.25 - 1.25^5}{1 - 1.25^5} = 0.88$ отримуємо середню кількість машин, що знаходяться на території АЗС $\overline{k} = \overline{r} + \overline{\omega} \approx 2.44.$

Середній час очікування автомобіля у черзі $\overline{t_{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = 1.56$ (хв).

Середній час перебування заявки у системі $\overline{t_{\tilde{n}\grave{e}\tilde{n}\grave{o}}} = 1.56 + \frac{0.703}{0.8} = 2.44.$

12.6 Одноканальна система масового обслуговування з необмеженою чергою

У попередньому пункті розглядалася одноканальна СМО з обмеженою кількістю місць у черзі. Тепер знімемо це обмеження, тобто спрямуємо m до нескінченності. При цьому кількість можливих станів системи стане нескінченною, а граф буде мати вигляд, що показаний на рис.12.4.

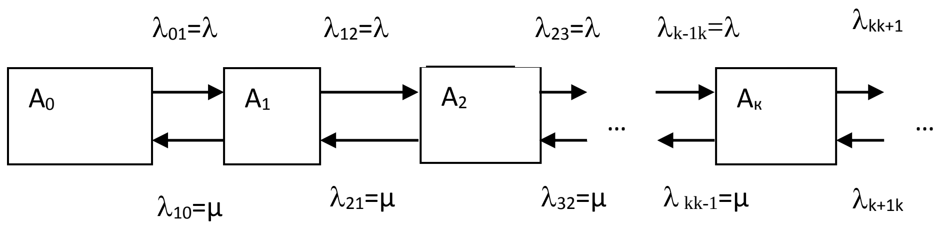


Рисунок 12.4 – Граф СМО з необмеженою чергою

Отримаємо ймовірності станів СМО з необмеженою чергою шляхом граничного переходу (при $m \to \infty$) з формул (12.5). При цьому вираз у дужках першої формули є сумою нескінченної кількості членів геометричної прогресії. Ця сума збігається тільки тоді, коли прогресія є нескінченно спадною, тобто при $\rho<1$. Можна строго довести, що $\rho<1$ є умова, при якій у СМО з очікуванням існує граничний усталений режим; при $\rho>=1$ такого режима не існує, а черга при $t \to \infty$ зростає безкінечно.

Припустимо, що $\rho<1$, тобто граничний режим існує. Спрямуємо у формулах (12.10) $m \to \infty$ та отримаємо граничні ймовірності:

$p_0 = 1 - \rho;$

$p_1 = \rho(1-\rho);$

$p_2 = \rho^2(1-\rho);$

....

$p_k = \rho^k(1-\rho);$

....

За відсутності обмежень по довжині черги кожна заявка, що надійшла до системи, отримає обслуговування, тому $Q = 1$, абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q = \lambda$

Середня кількість заявок, що знаходяться у черзі:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}.$$

Середня кількість заявок, що знаходяться під обслуговуванням:

$\overline{\omega} = \rho.$

Середня кількість заявок, що знаходяться у СМО:

$\overline{k} = \overline{r} + \overline{\omega} = \dfrac{\rho}{1-\rho}.$

Середній час очікування заявки у черзі:

$\overline{t_{оч}} = \dfrac{1}{\mu} * \dfrac{\rho}{1-\rho}.$

Середній час перебування заявки у системі:

$\overline{t_{сист}} = \dfrac{1}{\mu} * \dfrac{\rho}{1-\rho} + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\mu} * \dfrac{1}{1-\rho}.$

12.7 Багатоканальна система масового обслуговування з обмеженою чергою

Розглянемо n-канальну СМО з обмеженнями, в яку надходить потік заявок інтенсивністю λ, інтенсивність обслуговування для одного канала μ; кількість місць у черзі m.

Стани такої системи:

A_0 –всі канали вільні;

A_1 –один канал зайнятий, інші вільні;

A_2 – два канали зайняті, інші вільні;

………………………………………..

A_k – k каналів зайняті, інші вільні;

………………………………………..

A_n – зайняті всі n каналів;

A_{n+1} – зайняті всі n каналів, одна заявка стоїть у черзі;

…………………………………………………………

A_{n+r} – зайняті всі n каналів, r заявок стоять у черзі;

……………………………………………………...

A_{n+m} – зайняті всі n каналів, m заявок стоять у черзі.

Граф станів представлений на рис.12.5.

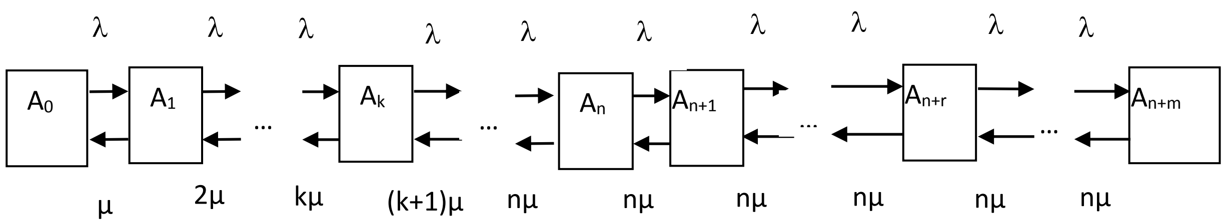


Рисунок 12.5 – Граф станів n-канальну СМО з обмеженнями

Граф на рис. 12.5 є схемою загибелі та розмноження, для якої розв’язок у загальному вигляді вже отримано. Граничні ймовірності станів системи при позначці $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ мають вигляд:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{nn!} + \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!}\right)^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0; \ldots; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0; p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p_0; p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0; \ldots; p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0$$

Якщо просумувати останні m членів першої формули як геометричну прогресію зі знаменником $\frac{\rho}{n}$, то:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} * \frac{\rho / n - (\rho / n)^{m+1}}{1 - \rho / n}\right)^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0; \ldots; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0; p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{nn!} p_0; p_{n+2} = \frac{\rho^{n+2}}{n^2 n!} p_0; \ldots; p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0. \quad (12.12)$$

Характеристики ефективності обслуговування мають такі вирази:

1) ймовірність відмови $p_{\text{â³ä}} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} * p_0$;

2) відносна пропускна спроможність $Q = 1 - p_{\text{â³äì}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} * p_0$;

3) абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q$;

4) середня кількість заявок, що знаходяться у черзі:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{nn!} * \frac{1 - (m+1)\chi^m + m\chi^{m+1}}{(1-\chi)^2} \text{ де } \chi = \frac{\rho}{n};$$

5) середня кількість зайнятих каналів:

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0\right);$$

6) середня кількість заявок, що знаходяться у СМО:

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z};$$

7) середній час очікування заявки у черзі:

$$\overline{t_{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda};$$

8) середній час перебування заявки у системі

$$\overline{t_{\text{ñèñò}}} = \overline{t_{\text{î÷}}} + \frac{Q}{\mu}.$$

Приклад 12.3

Автозаправна станція (АЗС) є СМО з двома каналами обслуговування (дві колонки). Ділянка біля АЗС допускає перебування біля станції не більше трьох автомобілів одночасно (m=3). Якщо у черзі вже знаходиться три авто, то черговий автомобіль, що прибуває до станції, у чергу не стає, а проїджає повз. Потік машин, що прибувають для заправки, має інтенсивність λ=2 (авто/хв). Процес заправки продовжується у середньому 2 хвилини. Визначити основні характеристики системи.

Розв’язування. Маємо n=2, m=3, λ=2, μ=1/$\overline{t_{оч}}$=1/2, ρ=4, χ =ρ/n=2 За формулами (12.7,12.8) знаходимо:

$$p_0 = \left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \ldots + \frac{4^2}{2!} * \frac{2-(2)^4}{1-2}\right)^{-1} = \frac{1}{125} = 0.008.$$

Ймовірність відмови

$$p_{відм} = p_{n+m} = p_5 = \frac{4^5}{2^3 2} * p_0 = 64 * p_0 = 0.512.$$

Відносна пропускна спроможність

$$Q = 1 - p_{відм} = 0.488.$$

Абсолютна пропускна спроможність

$$A = \lambda Q = 0.976 \text{ (авто/хв)}.$$

Середня кількість зайнятих каналів (колонок)

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{0.976}{0.5} = 1.952.$$

(тобто майже увесь час обидві колонки зайняті).

Середня кількість машин у черзі

$$\bar{r} = \frac{4^3}{2*2*125} * \frac{1-(4)2^3 + 3*2^4}{(1-2)^2} = \frac{16}{125} * 17 = 2.18.$$

Середній час очікування у черзі

$$\overline{t_{оч}} = \frac{2.18}{2} = 1.09 \text{ (хв)}.$$

Середній час перебування машини на АЗС

$$\overline{t_{сист}} = \overline{t_{оч}} + \frac{Q}{\mu} = \overline{t_{оч}} + Q * \overline{t_{об}} = 1.09 + 0.976 = 2{,}07.$$

12.8 Багатоканальна система масового обслуговування з необмеженою чергою

Граф станів СМО з необмеженою чергою зображений на рис.12.6

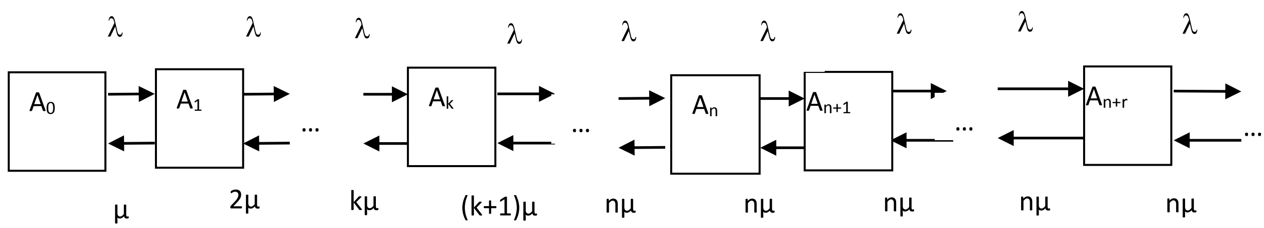


Рисунок 12.6 – Граф станів СМО з необмеженою чергою

Ця задача є граничним варіантом ($m \to \infty$) задачі, яка розглядалася у попередньому параграфі. Ймовірності станів отримаємо з формул (12.12) граничним переходом ($m \to \infty$). Зауважимо, що сума відповідної геометричної прогресії збігається при $\chi = \frac{\rho}{n} < 1$ і є розбіжною при $\chi \ge 1$; відповідно, стаціонарний режим буде існувати при $\chi < 1$, а при $\chi \ge 1$ черга буде нескінченно зростати. Припустимо, що $\chi < 1$ і спрямуємо у формулах (12.12) величину m до нескінченності. Отримаємо вирази для граничних ймовірностей станів:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + ... + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{1}{1-\chi}\right)^{-1};$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0 (1 \le i \le n); \qquad (12.13)$$

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r n!} p_0 (r \ge 1).$$

Оскільки кожна заявка рано чи пізно буде обслужена, то $p_{\text{від}} = 0$, $Q = 1$ $A = \lambda$.

Середня кількість заявок у черзі

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{nn!(1-\chi)^2}.$$

а середній час очікування

$$\overline{t_{\text{оч}}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Середня кількість зайнятих каналів

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho,$$

а середня кількість заявок у СМО

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}.$$

Приклад 12.4

Квиткові каси обслуговуються k касирами. Потік пасажирів, які бажають придбати квитки, є найпростішим з інтенсивністю λ пасажирів за годину. Час обслуговування розподілено за показниковим законом. Середній час обслуговування дорівнює t хв. Визначити, чи існує стаціонарний режим роботи квиткових кас; ймовірність того, що пасажир застане всіх касирів зайнятими; середню кількість пасажирів у черзі за квитками; середню кількість пасажирів у касах; середній час перебування пасажирів у черзі; середній час перебування пасажирів у касах.

Розв'язування

Нехай n=5, λ=5, t=12. Розглядаємо квиткові каси як багатоканальну СМО з необмеженою чергою. Інтенсивність потока заявок λ=20 (пас/год).

Інтенсивність потока обслуговування однієї заявки $\mu = \frac{1}{t} = \frac{60}{12} = 5$ (1/год).

Коефіцієнт завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{5} = 4.$

Відношення коефіцієнта завантаження до кількості каналів $\chi = \frac{\rho}{n} = \frac{4}{5} = 0.8 < 1$, таким чином для даної системи існує граничний розподіл ймовірностей станів. За формулами (12.13) обчислюємо ці ймовірності:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{5*5!} * \frac{1}{1-\chi}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \ldots + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{5*5!} * \frac{1}{1-0.8}\right)^{-1} = 0.013;$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0 = 0.052; \; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0 = 0.104; \; p_3 = \frac{\rho^3}{3!} p_0 = 0.139;$$

$$p_4 = \frac{\rho^4}{4!} p_0 = 0.139; \; p_5 = \frac{\rho^5}{5!} p_0 = 0.111.$$

Ймовірність того, що пасажир застане всіх касирів зайнятими:

$$p_{зан} = p_5 + p_6 + p_7 + \ldots = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) =$$

$$= 1 - (0.013 + 0.052 + 0.104 + 0.139 + 0.139) = 0.553.$$

Показники ефективності роботи СМО:

1) середня кількість пасажирів у черзі

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{nn!(1-\chi)^2} = \frac{4^6 * 0.013}{5*120*(1-0.8)^2} = 2.218;$$

2) середній час перебування пасажира у черзі

$$\overline{t_{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2.218}{20} = 0.110(год) = 6,654(хв);$$

3) середня кількість зайнятих кас $\bar{z} = \rho = 4$;

4) середня кількість пасажирів у касах $\bar{k} = \bar{r} + \bar{z} = 2,218 + 4 = 6,218$

Контрольні запитання і завдання:

1. Опишіть основні параметри, якими задається система масового обслуговування.
2. Предмет теорії масового обслуговування.
3. Наведіть основні характеристики ефективності системи масового обслуговування.
4. На які класи поділяються системи масового обслуговування.
5. Опишіть одноканальну СМО з відмовами.
6. Опишіть багатоканальну СМО з відмовами.
7. Опишіть одноканальну СМО з обмеженою чергою.
8. Опишіть одноканальну СМО з необмеженою чергою.
9. Опишіть багатоканальну СМО з обмеженою чергою.
10. Опишіть багатоканальну СМО з необмеженою чергою.

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Відношення середньої кількості заявок, що обслуговуються системою за одиницю часу, до середньої кількості заявок, що надходить за цей час – це

а) відносна пропускна спроможність СМО;

б) ймовірності станів;

в) абсолютна пропускна спроможність;

г) середня кількість заявок у СМО.

2. Середня кількість заявок, яку може обслужити система за одиницю часу – це

а) відносна пропускна спроможність СМО;

б) ймовірності станів;

в) абсолютна пропускна спроможність;

г) середня кількість заявок у СМО.

3. Середній час перебування заявки у системі визначається формулою:

а) $\bar{r} = \dfrac{\rho^{n+1} p_0}{nn!(1-\chi)^2}$;

б) $\bar{z} = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho$;

в) $\overline{t_{\text{î÷}}} = \dfrac{1}{\mu} * \dfrac{\rho}{1-\rho}.$;

г) $\overline{t_{\text{ñèñò}}} = \dfrac{1}{\mu} * \dfrac{\rho}{1-\rho} + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\mu} * \dfrac{1}{1-\rho}$;

д) $\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$.

Прикладні завдання

Задача 12.1.

Автоматична телефона станція забезпечує не більш ніж 10 телефонних перемов одночасно. Середня тривалість розмови дорівнює 2 хвилини. Виклики настають в середньому через дві хвилини. Визначити:

– ймовірність того що заявка буде обслугована;

– ймовірність відмови;

– абсолютну пропускну спроможність СМО;

– середнє значення зайнятих каналів.

Задача 12.2.

Універсам отримує ранні овочі та зелень з теплиць фермерського господарства. Машини з товаром прибувають в універсам в невизначений час. У середньому прибуває λ автомашин в день. Підсобні приміщення та обладнання для підготовки овочів до продажу дозволяють обробити і зберігати товар обсягом не більше м автомашин одночасно. В універсамі працюють н фасувальників, кожен з яких в середньому може обробити товар з однієї машини протягом tобсл дня. Визначити ймовірність обслуговування приходить автомашини Робс. Яка повинна бути ємність підсобних приміщень m1, щоб ймовірність обслуговування була б більше або дорівнює заданій величині, тобто Робс.> Р * обс.

Визначити числові значення якщо $\lambda = 3$; $t_{обс} = 0,5$; $n = 2$; $m = 2$, $P^*_{обс} = 0,92$.

ТЕМА 13. ТЕОРІЯ НЕЧІТКИХ МНОЖИН ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

13.1 Основні поняття нечітких множин

13.2 Операції над нечіткими множинами

13.3 Множини рівня нечітких множин..

13.4 Рішення багатокритеріальних задач на нечіткій множині альтернатив.

Для більш детального розгляду цього розділу доцільно ознайомитись з основами теорії множин що використовується для розгляду даної теми (див додаток А).

У описі великої кількості об’єктів зазвичай повинен міститися деякий чіткий критерій, який дозволяє робити обґрунтований висновок про приналежність або, навпаки, про неприналежність кожного даного елементу до множини. Проте часто при спробах математичного опису, наприклад, складних систем соціально-економічного, політичного, техніко-економічного і навіть іноді суто технічного характеру мова теорії звичних великих кількостей виявляється недостатньо гнучкою. Інформація про подібні системи найчастіше буває сформульовано з використанням нечітких з точки зору математики понять природної мови, які неможливо або дуже складно математично формалізувати за допомогою апарату звичайних великих кількостей.

13.1 Основні поняття нечітких множин

На противагу класичній (чіткій) теорії множин, в якій використовують закон Архімеда про виключення третього, згідно з яким будь-який елемент належить або не належить множині, в теорії нечітких множин елемент може належати множині на половину, на чверть, на шістнадцять відсотків тощо.

Л. Заде запропонував узагальнити розуміння функції приналежності, щоб вона могла приймати не тільки зазначені граничні значення 0 і 1, але й довільні значення з інтервалу [0, 1], відображаючи можливість приналежності якогось елемента x множині A з яким-небудь ступенем, меншим за одиницю. Таким чином з'явилося поняття нечітких множин і почала розвиватися їх теорія. Розглянемо основні її поняття та положення. З цією метою введемо в розгляд деяку універсальну множину X, яка буде позначатися символом $X = \{x\}$, де x – її довільний елемент.

Нечітку множину A в X визначають як сукупність пар вигляду:

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}, \tag{13.1}$$

де X – універсальна множина (базова шкала);

$\mu_A(x)$ – функція належності нечіткої множини A, яка відображає $X \to [0,1]$.

З цього означення випливає, що звичайні (класичні) множини становлять підклас класу нечітких множин. Адже звичайну множину B можна також визначити як сукупність пар вигляду $(x, \mu_B(x))$, де характеристична функція $\mu(x)$ може набувати тільки значення (нуль чи одиницю), тобто

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in B \\ 0, \text{ якщо } x \notin B \end{cases}. \tag{13.2}$$

Отже, поняття нечіткої множини ширше, ніж поняття звичайної множини, оскільки функція належності першої з них може бути, взагалі кажучи, довільною функцією або навіть довільним відображенням.

Значення $\mu_A(x)$ функції належності для конкретного значення x називають мірою приналежності цього елемента нечіткій множині A. Ця функція визначає суб'єктивну міру впевненості експерта про те, що задане конкретне значення базової шкали x відповідає нечіткій множині A. Міру належності не можна ототожнювати з ймовірністю, тому що невідома функція розподілу, немає повторюваності експериментів. Значення цієї функції можуть бути знайдені тільки за допомогою опитування експертів, їхнього досвіду та інтуїції. Оскільки нечітка множина цілком описується своєю функцією належності, то іноді використовуватимемо цю функцію для позначення нечіткої множини. Під час проведення економічного аналізу із застосуванням теорії нечітких множин найбільш поширеними в практичному використанні є два способи формування функції належності: трапецієподібний та трикутний. Форми нечітких чисел, які використовують у цих випадках для опису невизначених параметрів, називають трапецієподібною та трикутною. Ми зазначали про трикутні нечіткі числа. Це такі числа, референт-функції яких є лінійними.

Під час завдання нечітких чисел використовують експертну інформацію про параметр. До неї належать назва параметра q і діапазон $[\underline{q}, \overline{q}]$ зміни його значень, кількість лінгвістичних термів, з допомогою яких оцінюють цей параметр і назва кожного з цих термів.

Чисельне значення функції $\mu_c(x)$ для кожного конкретного елемента x визначає ступінь приналежності цього даного елемента нечіткій множині C.

Приклад13.1

Можна навести множина студентів третього курсу, серед яких є й такі, хто має академічну заборгованість за другий курс. Саме наслідком цієї обставини є їх фактична ступінь приналежності множині студентів третього курсу, що є меншою одиниці, причому, чим більше заборгованостей у студента, тим менше значення функції його приналежності цій множині. Є очевидним, що одночасно цих студентів можна з деяким значенням функції приналежності $0 < \mu_c < 1$ вважати також і студентами другого курсу, принаймні до ліквідації ними наявної академічної заборгованості.

Приклад 13.2

Ще одним показовим прикладом, який досить наочно пояснює сутність нечіткої множини і її природу, може служити множина моментів часу доби, які утворюють день. При цьому під «вдень» можна домовитися розуміти світлий час доби. Тут, по-перше, вже міститься суб'єктивність визначення, оскільки різні люди з різними мірками підходять до того, що слід вважати «світлим часом». По-друге, початок і закінчення дня як світлого часу доби істотно залежать від погоди, оскільки в хмарний день темніє помітно раніше. По-третє, початок і закінчення дня в ще більш істотній залежності від пори року. Дійсно, в червні тривалість дня майже вдвічі більше, ніж у грудні.

Приймемо, що день починається о восьмій годині ранку і закінчується о вісімнадцятій. Покажемо на рис. 13.1, як цьому часовому інтервалу відповідає постійне значення функції приналежності множини моментів часу, відповідно $\mu(\tau) = 1$ Будемо вважати також, що ніч починається в двадцять годин і закінчується о шостій годині ранку.

Іншими словами, на часових інтервалах від 0 до 6 годин і від 20 до 24 годин значення функції приналежності множини моментів часу, що відповідають дню $\mu(\tau) = 0$, Від шести ж до восьми годин ранку, як і від вісімнадцяти до двадцятої години значення функції приналежності відповідних моментів часу до множини «день»будуть лежати в інтервалі [0, 1].

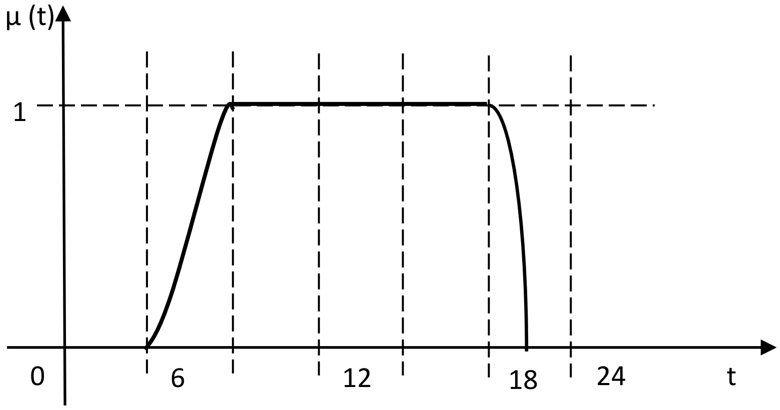
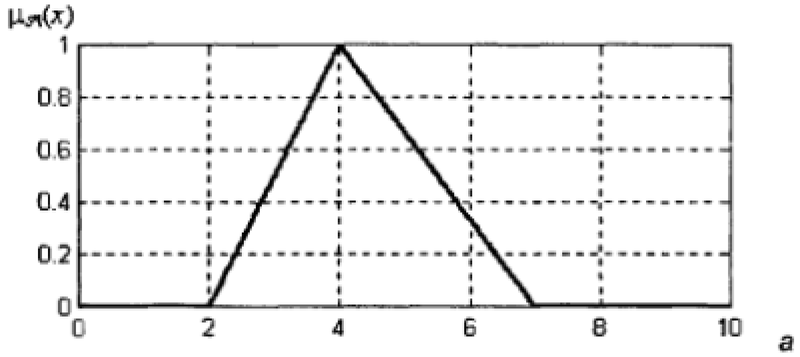


Рисунок 13.1 – Функція приналежності моментів часу доби множини 'день'

Формальне визначення нечеткої множини (13.1) не накладалися ніяких обмежень на вибір конкретної функції приналежності для его подання. Однак на практиці зручно використовувати ті з них, які допускають аналітичне представлення у вигляді деякої простої математичної функції. Це спрощує не тільки відповідні чисельні розрахунки, а й скорочує обчислювальні ресурси, необхідні для зберігання окремих значень цих функцій приналежності. Необхідність типізації окремих функцій приналежності також обумовлена наявністю реалізацій відповідних функцій в розглянутих далі інструментальних засобах.

В якості первого типу функцій приналежності розглянемо функції, які, як випливає з їх назви, складаються з відрізків прямих ліній, утворюючи безперервную або кусочно-безперервну функцію. Найбільш характерним прикладом таких функцій є "трикутна" (рис. 13.2, а) і "трапецієвидна" (рис. 13.2, б) функції приналежності. У нашому випадку кожна з цих функцій задана на универсумом X = [0, 10], в якості якого обраний замкнутий інтервал дійсних чисел. В загальному випадку вибір універсуму може бути довільним і не обмежений ніякими правилами.



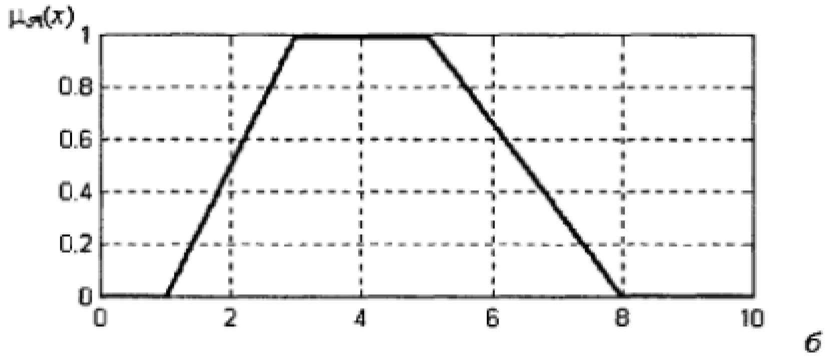


Рисунок 13.2 – Графіки функцій приналежності трикутної (а) та трапецієвидної (б)

Перша з цих функцій приналежності в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{\Delta}(x,a,b,c)=\begin{cases}0, \ \ x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b; \\ \dfrac{c-x}{c-b}, b\le x\le c; \\ 0, c\le x; \end{cases} \tag{13.3}$$

де a, b, c – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: $a\le b\le c$.

Щодо конкретної функції, зображеної на рис. 13.2, а, значення параметрів рівні: a = 2, b = 4. c = 7. Як неважко помітити, параметри a і c характеризують основу трикутника, а параметр b – його вершину.

Трапецієвидна функція приналежності в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_T(x,a,b,c,d)=\begin{cases}0,\ \ x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a},a\le x\le b;\\ 1,b\le x\le c;\\ \dfrac{d-x}{d-c},c\le x\le d;\\ 0,d\le x;\end{cases} \tag{13.4}$$

де a, b, c, d – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: $a \le b \le c \le d$.

Стосовно конкретної функції, зображеної на рис. 13.2, б, значення параметрів рівні: a = l, b = 3, c = 5, d = 8. Як неважко помітити, параметри a і d характеризують нижню основу трапеції, а параметри b і c – верхню основу трапеції.

Ці функції використовуються для завдання таких властивостей множин, які характеризують невизначеність типу: "приблизно дорівнює", "середнє значення", "розташоване в інтервалі", "подібний об'єкту", "схожий на предмет" і ін.

Z- подібні і S- подібні функції приналежності

Ці функції приналежності також отримали свою назву по виду кривих, які представляють їх rpaфiкi. Перша з функцій цієї групи називається Z¬ подібною кривою або сплайн-функцією і в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_Z(x,a)=\begin{cases}1,\ \ x<a;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right),a\le x\le b;\\ 0,b<x;\end{cases} \tag{13.5}$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b.

Графік цієї функції для деякої нечеткої множини А і універсуму X = [0, 10] зображений на рис. 13.3, а, при цьому значення параметрів відповідно рівні a = 3, b = 6.

Сплайн-функція може бути також задана іншим виразом:

$$f_\Delta(x,a,b,c)=\begin{cases}1,\ \ x\le a;\\ 1-2*\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2,a\le x\le \dfrac{a+b}{2};\\ 2*\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right),\dfrac{a+b}{2}\le x\le b;\\ 0,b\le x;\end{cases} \tag{13.6}$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b.

Графік цієї функції для деякої нечіткої множини A і універсуму X = [0,10] зображений на рис. 13.3, б, при цьому значення параметрів відповідно рівні a = 3, b = 6.

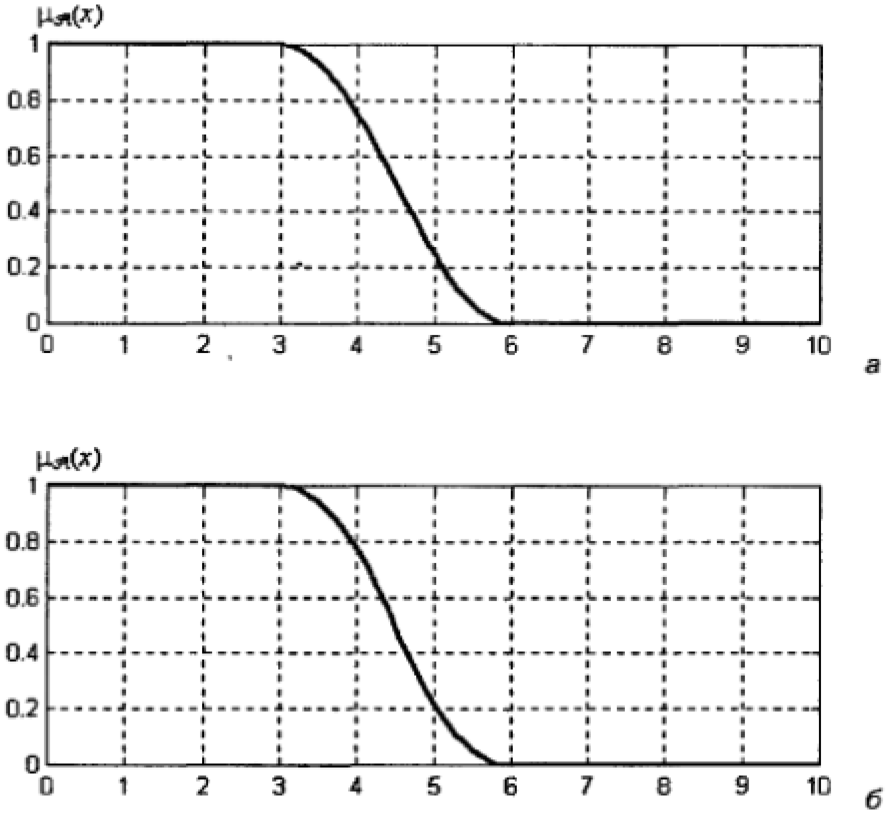


Рисунок 13.3 – Графіки Z-образних функцій приналежності

Ці функції використовуються для подання таких властивостей нечітких множин, які характеризуються невизначеністю типу: "мала кількість", "невелике значення", "незначна величина", "низька собівартість продукції", "низький рівень цін або доходів", "низька процентная ставка" і багатьох інших. Спільним для всіх таких ситуацій є слабка ступінь прояви тієї або іної якісної або кількісної ознаки. Особливість нечіткого моделювання при цьому полягає в поданні відповідних нечітких множин за допомогою незростаючої функцій приналежності.

Друга з функцій аналізованої ґруппи називається S – образною кривою або сплайн-функцією і в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{S_1}(x,a,b)=\begin{cases}0, \;\; x<a;\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right), a\le x\le b;\\ 1, b<x;\end{cases} \qquad (13.7)$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b.

Графік цієї функції для нечеткої множини A і універсуму X = [0, 10] зображений на рис. 13.4, а.

Сплайн-функція може бути також задана іншим виразом:

$$f_{S_2}(x,a,b)=\begin{cases}0, \;\; x\le a;\\ 2*\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^2, a<x\le \dfrac{a+b}{2};\\ 1-2*\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^2, \dfrac{a+b}{2}<x\le b;\\ 1, b\le x;\end{cases} \tag{13.8}$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b.

Графік цієї функції для нечеткої множини A і універсуму X = [0, 10] зображений на рис. 13.4, б, при цьому значення параметрів відповідно рівні a = 3, b = 6.

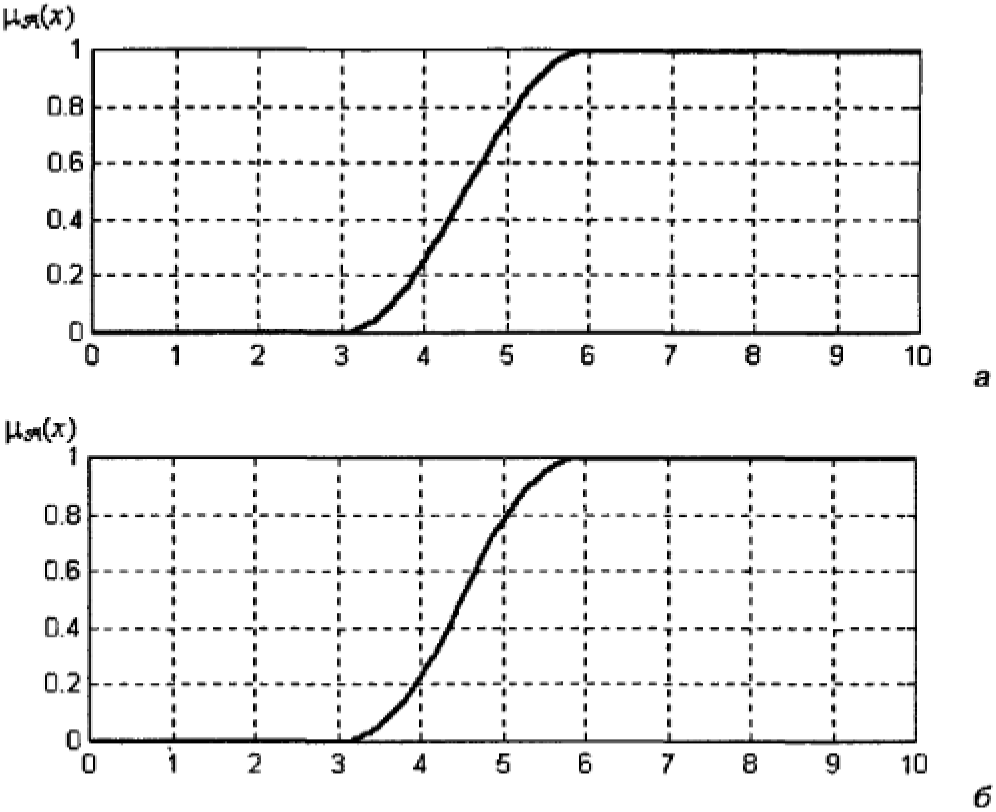


Рисунок 13.4 – Графіки S-образних функцій приналежності f_{S_1}, f_{S_2}

До типу S- подібної і одночасно Z- подібної функцій приналежності може бути віднесена так звана сігмоідальна функція (сігмоід), яка в загальному випадку задається аналітично наступним виразом:

$$f_{S_3}(x,a,b)=\frac{1}{1+e^{-a(x-b)}}, \qquad (13.9)$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b, а е – основа натурального логаріфму, яке ініціює завдання відповідної експоненціаль ной функції. При цьому у разі а> 0 може бути отримана S-подібна функція приналежності, а в разі а <0 – Z-подібна функція приналежності.

Графіки цієї функції для нечіткої множини A і універсуму X = [0, 10] зображені на рис. 13.5. При цьому S-подібної функції приналежності відповідають значення параметрів а = 3, b = 6 (рис. 13.5, а), а Z-подібної функції приналежності відповідають значення параметрів а = -3, b = 6 (рис. 13.5, б).

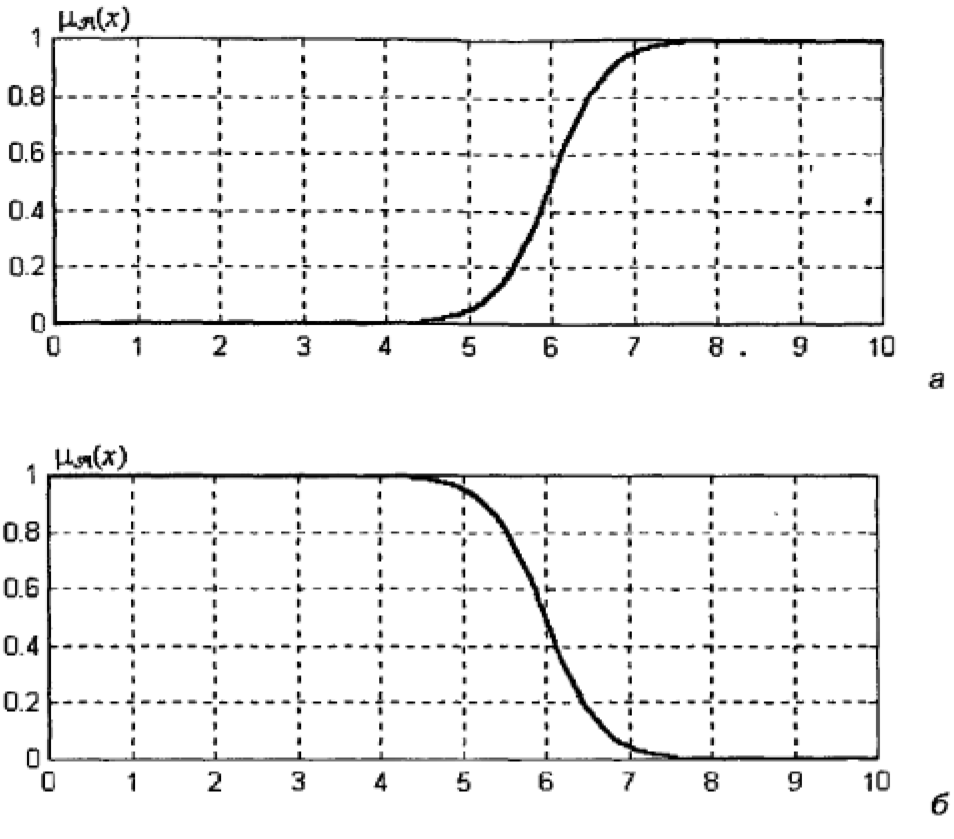


Рисунок 13.5 – Графіки S-подібних функцій приналежності $f_{S_{3_1}}$ для значень параметрів a=3, b=6(а), a=-3, b=6 (б)

Розглянуті S–подібні функції використовуються для представлення таких нечетких множин, які характеризуються невизначеністю типу: "велика кількість", "велике значення", "значна величина", "високий рівень доходов і цін", "висока норма прибутку", "висока якість послуг"," високий сервіс обслуговування" і багатьох інших. Спільним для всіх таких ситуацій є високий ступінь прояви явища того або іншого якісної або кількісної ознаки. Особливість нечіткого моделювання при цьому полягає в поданні відповідних нечітких множин за допомогою монотонно зростаючих функцій приналежності.

Як приватні випадки Z- і S-подібних кривих зручно розглядати так звану лінійну Z-подібну функцію (рис. 2.15, а) і лінійну S-подібну функцію (рис. 2.15, б). Перша з цих функцій в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{\downarrow}(x,a,b)=\begin{cases}0, \ \ x\le a;\\ \dfrac{b-x}{b-a}, a<x<b;\\ 1, b\le x;\end{cases} \tag{13.10}$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b.

Графік функції для нечіткої множини A і універсуму X = [0, 10] зображений на рис. 13.6, а, при цьому значення параметрів відповідно рівні a = 3, b = 6.

Друга з цих функцій в загальному випадку може бути задана аналітично наступним виразом:

$$f_{\uparrow}(x,a,b)=\begin{cases}0, \ \ x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a<x<b\\ 1, b\le x\end{cases} \tag{13.11}$$

де a, b – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: a < b.

Графік цієї функції для нечіткої множини A і універсуму X = [0, 10] зображений на рис. 13.6, б, при цьому значення параметрів відповідно також дорівнюють a = 3, b = 6.

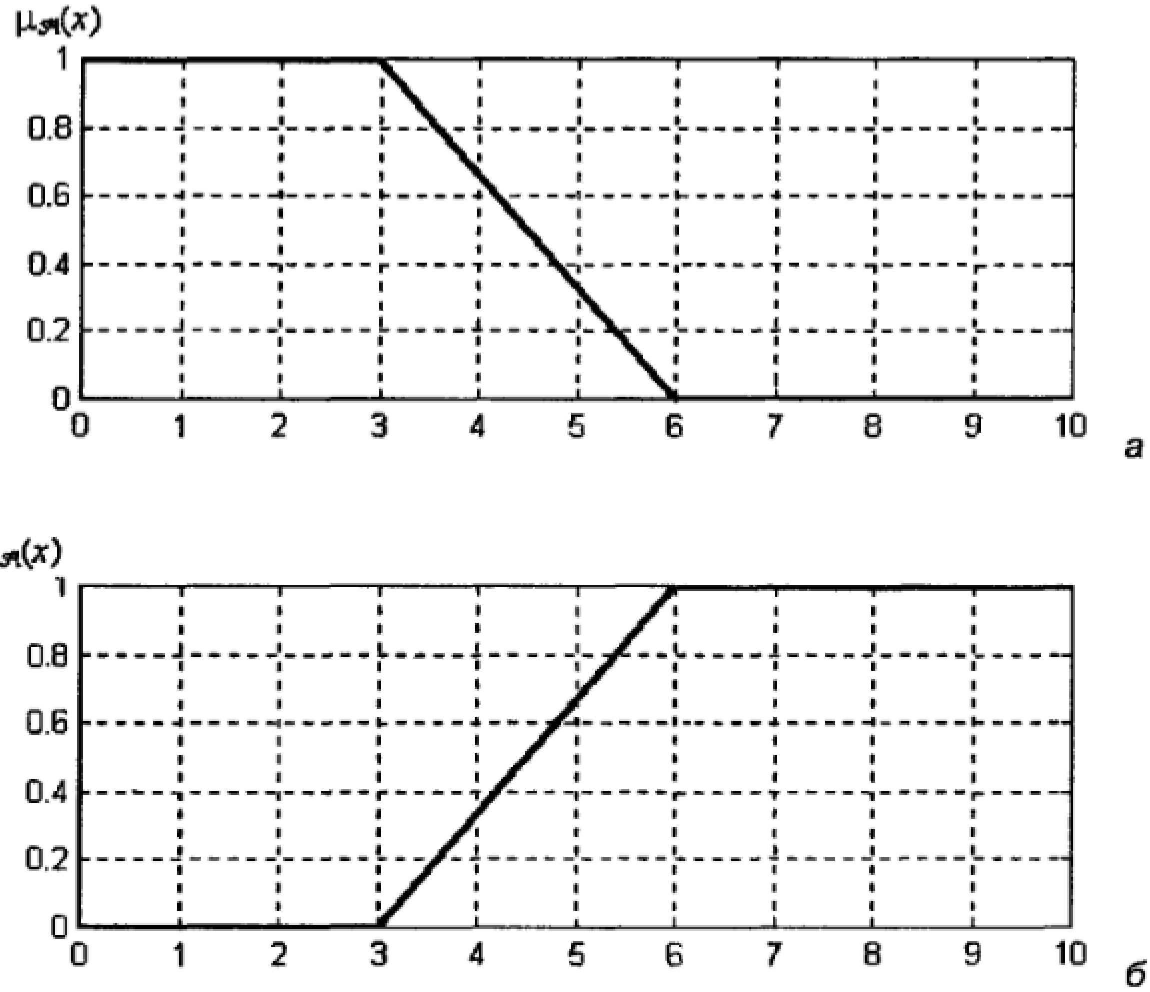


Рисунок 13.6 – Графіки Z-подібної функції (а) і лінійної S-подібної функцій (б) приналежності приналежності для значень параметрів a=3, b=6

Дані функції приналежності породжують нормальні опуклі нечіткі множини з кордонами (a, b).

Слід зауважити, що дані лінійні Z– і S–подібні функції можуть бути використані для побудови трикутної і трапецієвидної функції приналежності, що розглянуті вище. Зокрема трикутна функція приналежності виходить як композиція лінійної Z-подібної і лінійної S-подібної функцій за такою формулою:

$$f_{\Delta}(x;a,b,c) = \min_{x \in X}\{f_{\downarrow}(x;a,b), f_{\uparrow}(x;b,c)\}, \qquad (13.12)$$

де a, b, c – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: $a \le b \le c$.

У виразі (13.12) використовується операція взяття мінімуму (позначена знаком min) з усіх значень, зазначених в фігурних дужках через кому. При цьому якщо відповідні функціональні значення залежать від деякої незалежної змінної (в нашому випадку від x), то під знаком мінімуму явно вказується діапазон або множина значень цієї змінної (в нашому випадку – універсум).

Трапецієвидна функція приналежності виходить як композиція двох лінійних Z-подібної і S-подібної функцій за такою формулою:

$$f_{\Delta}(x;a,b,c,d)=\min_{x\in X}\{f_{\downarrow}(x;a,b),f_{\uparrow}(x;c,d)\},\qquad(13.13)$$

де a, b, c, d – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: $a \le b < c \le d$.

П-подібні функції приналежності. До даного типу функцій приналежності можна віднести цілий клас кривих, які за своєю формою нагадують дзвін, сглажену трапецію або букву "П".

Перша з подібних функцій так і називається – П-подібна функція, і в загальному випадку задається аналітично наступним виразом:

$$f_{\Pi}(x;a,b,c,d)=f_{S}(x;a,b)*f_{Z}(x;c,d),\qquad(13.14)$$

де a, b, c, d – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані відношенням: $a \le b < c \le d$, а знак добутку позначає звичайний арифметичний добуток значень відповідних функцій.

При цьому можуть бути використані будь-які з розглянутих вище z- і s-подібних функцій. Зокрема, якщо використовувати функції f_{S1}таf_{Z1} то отримаємо П-функцію $f_{\Pi1}$, графік якої для нечеткої множини A і універсуму X = [0, 10] зображений на рис. 13.7.

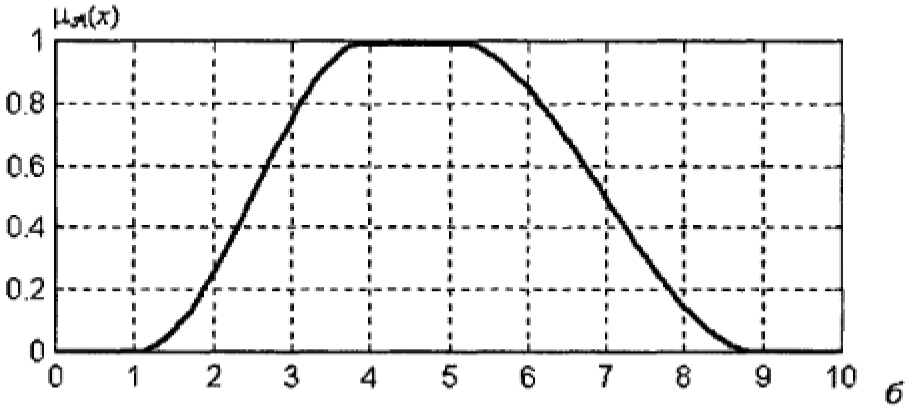


Рисунок 13.7 – Графік П-подібної функції приналежності

Нечітка множина називається **пустою,** якщо її функція приналежності дорівнює нулю на всій універсальній множині X. Іншими словами, нечітка множина буде пустою, якщо жоден з елементів множини X не належить до нечіткої множини з позитивним значенням, $\mu\varnothing(x)$ тобто:

$$\mu_{\varnothing}(x)=0, \forall x \in X.\qquad(13.15)$$

Скориставшись змістовним аспектом прикладу з попереднього визначення, зазначимо, що нечітка множина студентів даної групи третього курсу, які одночасно належать і до числа студентів другого курсу, перетворюєся в порожню множину, коли всі ці студенти ліквідують всі свої академічні борги за другий курс.

Носієм suppA нечіткої множини A називається звичайна множина, яка задовольняє таким умовам: підмножина універсальної множини X, для елементів якого значення функції приналежності

$$\mu(x)>0.\qquad(13.16)$$

Приклад розглянемо нечітку множину
$B = \{(x_1,0{,}7),(x_2,0),(x_3,0{,}4),(x_4,0{,}8),(x_5,0),(x_6,0{,}1),(x_7,0{,}9),(x_8,0{,}2),(x_9,0),(x_{10},0)\}.$

Відповідно до визначення, її носієм буде звичайна множина

$$\text{supp } B\{x_{1,}x_3, x_4, x_6, x_7, x_8\}.$$

Нечітка множина А називається **нормальною**, якщо для його функції приналежності виконується дотримується умова:

$$\sup_{x\in X} \mu a(x) = 1. \tag{13.17}$$

В іншому випадку нечітку множину А прийнято вважати субнормальною.

Приклад13.3

На рис. 13.8 максимальне значення функції приналежності $\mu_A(x)$ нечіткої множини А дорівнює одиниці, таким чином вона відповідає умові нормальної нечіткої множини А. У той же час значення функції приналежності $\mu_B(x)$ не досягають одиниці ні для якого елементу х, тобто вона відповідає субнормаль ній нечіткій множині В.

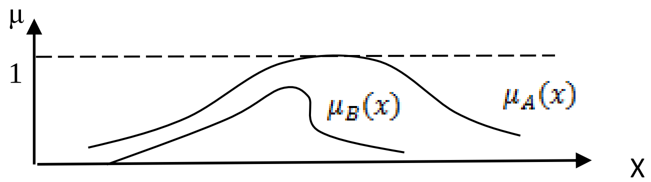


Рисунок 13.8 – Функції приналежності нормальної А і субнормальної В нечітких множин

Розглянемо тепер дві нечіткі множини А і В на універсальній множині X. Нехай відповідні їх функції приналежності будуть $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$

Нечітка **множина А включає в себе нечітку множину В** то бто $B \subseteq A$ або $A \supseteq B$, якщо виконується нерівність

$$\mu_в(x) \le \mu_а(x), \tag{13.18}$$

для будь-якого $x \in X$.

Поняття включення наочно можна проілюструвати за допомогою графіків функцій приналежності на рис. 13.9 $\mu_A(x)$

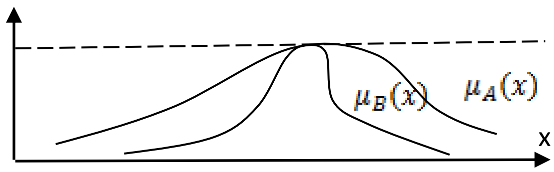


Рисунок 13.9 – Функцій приналежності нечітких множин А і В

13.2. Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини за визначенням є певне узагальнення поняття звичайних (чітких) множин, операції над ними також можуть розглядатися як відповідне узагальнення понять операцій над звичайними множинами. Для того, щоб ввести поняття операцій, надалі будемо розглядати дві нечіткі множини А і В на універсальній множині Х з заданими відповідно їх функціями належності, рівними відповідно $\mu_а(x)$ та $\mu_в(x)$

Об'єднанням нечітких множин А і В на універсальній множині Х називається таке нечітка множина С функція приналежності якої має наступний вигляд:

$$\mu_c(x) = \mu_a \cup \mu_b(x) = \max\{\mu_a(x), \mu_b(x)\}. \qquad (13.19)$$

Наочне уявлення про операції об'єднання нечітких множин і про спосіб обчислення функції належності дає її геометрична інтерпретація, представлена на рис. 13.10.

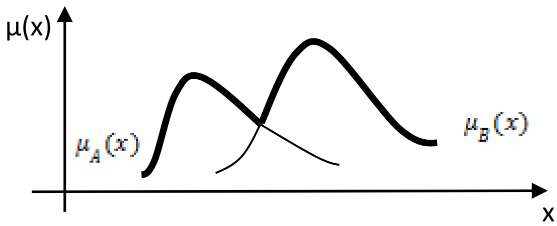


Рисунок 13.10 – Функція приналежності об'єднання нечітких множин

Вона свідчить про те, що графік функції приналежності нечіткої множини, що представляє собою результат об'єднання двох нечітких множин, можна отримати як верхня обвідна графіків функцій приналежності вихідних множин.

Операцію об'єднання нечітких множин неважко узагальнити на випадок довільного числа n цих множин як:

$$\mu_c(x0) = \max\left(\mu_a(x), \mu_b(x), \ldots \mu_d(x)\right). \qquad (13.20)$$

Цілком очевидно, що графік цієї функції також буде представляти собою верхн. обвідне графіків функцій приналежності всіх вихідних множин.

Поряд з наведеним вище визначенням операції об'єднання нечітких множин, в літературі зустрічається і іноді використовують інший його варіант обєднання, відповідно до якого об'єднанням нечітких множин А і В на універсальній множині Х називають нечітку множину С $= A \cup B$ з функцією приналежності, правило обчислення якої має такий вигляд:

$$\mu_c = \mu_\alpha \cup \mu_b(x) = \begin{cases} \mu_a(x) + \mu_b(x) \text{ ÿêùî } \mu_a(x) + \mu_b(x) \le 1; \\ 1, \text{ÿêùî } \mu_a(x) + \mu_b(x) \ge 1. \end{cases} \qquad (13.21)$$

Перетином нечітких множин А і В на універсальній множині Х називається нечітка множина $C = A \cap B$ з функцією приналежності, що обчислюється у відповідності з наступним правилом:

$$\mu_c(x) = \mu_a(x) \cap \mu_b(x) = \min\{\mu_a(x), \mu_b(x)\}. \qquad (13.22)$$

Наочне уявлення про операції перетину нечітких множин А і В і про спосіб обчислення функції приналежності її результату С $= A \cap B$ можна отримати за допомогою геометричної інтерпретації, представленої на рис. 13.11.

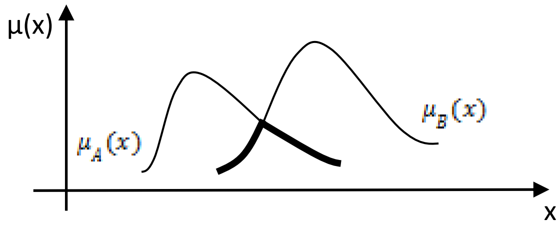


Рисунок 13.11 – Функція приналежності перетину нечітких множин

Цей рисунок переконливо свідчить про те, що графік функції приналежності нечіткої множини, що представляє собою результат перетину двох нечітких множин, може бути отриманий як нижня обвідна графіків функцій приналежності вихідних множин.

Операцію перетину нечітких множин неважко узагальнити на випадок довільного числа n цих множин A_i з функціями приналежності $\mu_i A$ Дійсно, для $C = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ функція приналежності може бути отримана як:

$$\mu_c(x) = \min\{\mu_{a1}(x), \mu_{a2}(x), ...\mu_{an}(x)\}. \qquad (13.23)$$

Цілком очевидно також, що графік цієї функції і в цьому випадку буде представляти собою нижню обвідну графіків всіх n функцій приналежності вихідних множин.

Як і для випадку операції об'єднання двох нечітких множин, поряд з наведеним вище визначенням перетину нечітких множин, в літературі іноді зустрічається і знаходить своє практичне застосування і той його варіант, згідно з яким перетином нечітких множин A і B на універсальній множині X називають такуе нечітку множина $C = A \cap B$, правило обчислення функції належності для якої має наступний вигляд:

$$\mu_c(x) = \mu_\alpha \cap \mu_b(x) = \mu_a(x) \cdot \mu_b(x). \qquad (13.24)$$

Доповненням нечіткої множини A на універсальній множині X називається нечітка множина A з функцією приналежності, що обчислюється у відповідності з наступним правилом:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X. \qquad (13.25)$$

Якщо скористатися графіками функцій приналежності нечітких множин A та $\bar{A}$ як геометричною інтерпретацією операції доповнення, як це наведено на рис. 13.12, можна прийти до таких двох цікавих висновків.

По-перше, графік функції приналежності $\mu_{\bar{A}}(x)$ доповнення $\bar{A}$ нечіткої множини A до універсальної множини X виявляється симетричним графіком вихідної функції приналежності $\mu_A(x)$ щодо горизонтальної прямої з ординатою y = 0,5.

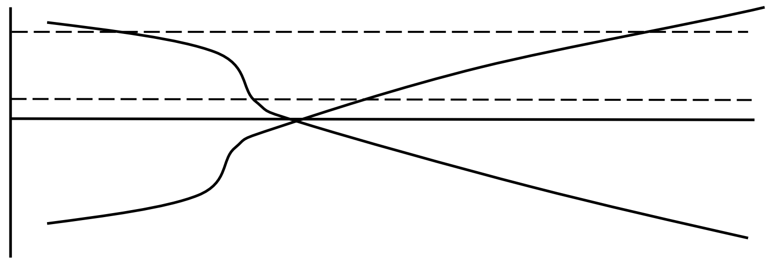


Рисунок 13.12 – Функція приналежності доповнення А нечіткої множини

По-друге, на відміну від звичайних множин, виявляється, що $A \bigcap A \neq \varnothing$ тобто в універсальній множині X існують елементи, які одночасно належать і множині А, і його доповненню $\bar{A}$ до X, і навіть значення функцій приналежності для деяких з них можуть бути однаковими, якщо вони рівні 0,5.

Різницею нечітких множин А і В на деякій універсальній множині X називається така нечітка множина С $= A \setminus B$ функція приналежності якої обчислюється відповідно до правила, що має такий вигляд:

$$\mu_c(x) = \mu_a(x) \setminus \mu_b(x) = \begin{cases} \mu_a(x) - \mu_b(x), \text{якщо}\, \mu_a(x) > \mu_b(x) \\ 0, \text{якщо}\, \mu_a(x) \leq \mu_b(x). \end{cases} \quad (13.26)$$

Декартовим добутком $A_1 * A_2 * ... A_n$ нечітких множин $A_1, A_2, ... A_n$ на множинах $X_1, X_2, .. X_n$ називається нечітка множина А на декартовому добутку $X = X_1 * X_2 * ... * X_n$ елементами якого є набори $(x_1, x_2, ... x_n)$, а функція їх приналежності має вигляд

$$\mu_a(x) = \min_{x \in X}\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), ..., \mu_{A_n}(x)\}. \quad (13.27)$$

Для двовимірного випадку графічна інтерпретація декартового добутку нечітких множествA_1 і A_2 на відповідних множинах X_1 іX_2 може бути представлена за допомогою рис. 13.13.

Сенс такого визначення функції належності декартового добутку нечітких множин полягає в тому, що фактична можливість прийняття рішення визначається найменшою з можливостей елементів даного набору.

Приклад13.4

В ситуації вибору раціонального варіанту необхідного людині товару у просторі параметрів "ціна-якість" зазвичай виходить з наявних фінансових ресурсів, тобто обирається за мінімаотну ціну.

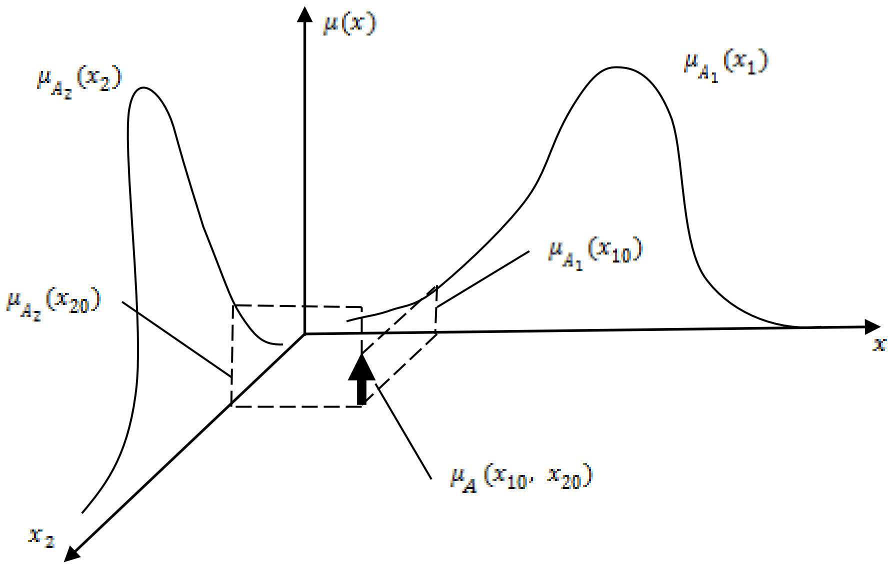


Рисунок 13.13 – Визначення функції приналежності декартового добутку нечітких множин

Опуклою комбінацією нечітких множин A_1, A_2, …, A_n на множині X називається нечітка множина A, функція приналежності якої має вигляд:

$$\mu_a(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_1\mu_a(x), \tag{13.28}$$

причому

$$\lambda_i>0, a\sum_{s=1}^{n}\lambda_i=1. \tag{13.29}$$

Поняття опуклої комбінації нечітких множин використовується в задачах прийняття рішень в умовах кількох нечітких обмежень. Слід зазначити, що для звичайних множин поняття опуклої комбінації не має сенсу.

Операції **концентрування CON і розтягування DIL** нечіткої множини A визначаються наступним чином:

$$\mathrm{CON}\,A=A^{\alpha}$$
$$\mathrm{DIL}\,A=A^{1/\alpha}, \tag{13.30}$$

де α > 1 – коефіцієнт концентрації (або, відповідно, розтягнення), а функції приналежності відповідних нечітких множин мають вигляд

$$\mu_{A^{\alpha}}(x)=\mu_A^{\alpha}(x)=(\mu_A(x))^{a};$$
$$\mu_{A^{1/\alpha}}(x)=\mu_A^{1/a}(x)=(\mu_A(x))^{1/a}. \tag{13.31}$$

Графічно зміст цих операцій можна продемонструвати за допомогою рис.13.14.

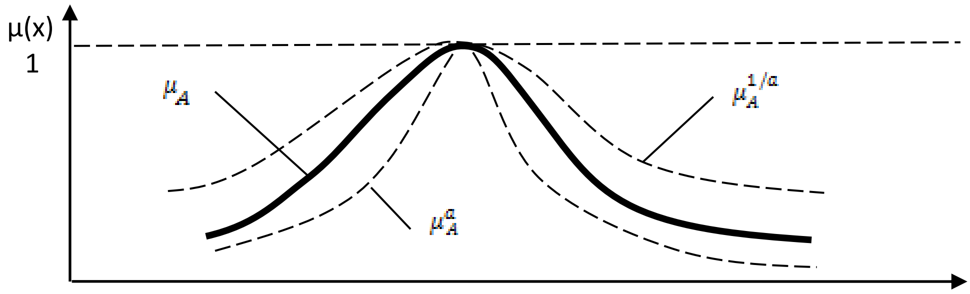


Рисунок 13.14 – Геометрична інтерпритація операцій концентрування та стягнення нечітких множин

Зміст полягає в тому, що операція концентрування CON A знижує ступінь нечіткості опису множини A, а операція розтягування DIL A підвищує ступінь його нечіткості. У реальних задачах прийняття рішень застосування операції концентрування може означати, що в розпорядження експерта або особи, яка приймає рішення, надійшла деяка додаткова інформація про ситуацію, і ця інформація дозволяє частково зняти наявну невизначеність і дає можливість більш чітко описати дану нечітку множинуь можливих альтернатив.

Операція стягнення, навпаки, використовується для моделювання ситуацій, пов'язаних з втратою інформації або відсутністю своєчасного її поновлення, що збільшує ступінь нечіткості ситуації, а отже, і невизначеності прийняття рішення.

13.3. Множини рівня нечітких множин

Множина рівня α нечіткої множини A на даній вихідній універсальній множині X називається звичайна множина A_a, що складається з елементів, ступінь приналежності яких множині A є не меншою числа α. Іншими словами:

$$A_a = \{x : x \in X, \mu_A(x) \geq a\} \tag{13.32}$$

Геометричною інтерпретацією поняття множини рівня може служити рис. 13.15.

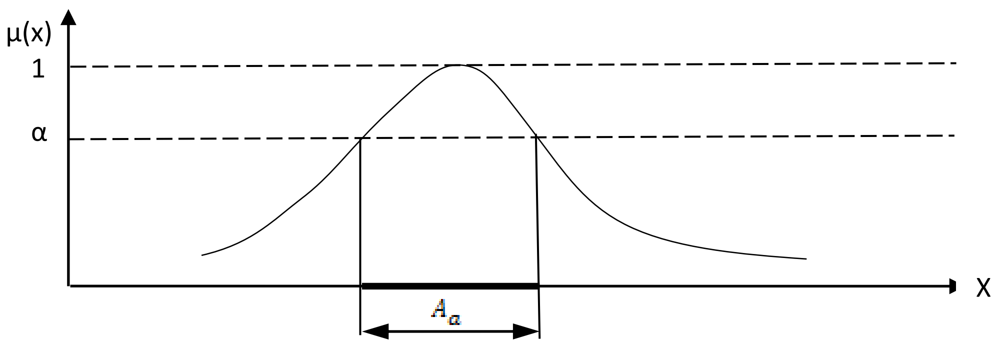


Рисунок 13.15 – Множина рівня α нечіткої множини A

Видається цілком очевидним, що носієм supp A деякої нечіткої множини A може вважатися його множина ненульового рівня.

Нехай А і В-нечіткі множини деякої вихідної множини X. Розглянемо множину рівня α їх об'єднання $(A \cup B)_a$ та перетину $(A \cap B)_a$ і покажемо їх взаємозв'язок з множинами $A\,и\,B$ рівня множина тобто з A_α и B_α. За допомогою геометричної ілюстрації цих операцій, наведеної відповідно на рис.13.16 і 13.17, легко переконатися в тому, що:

$$(A \cup B)_a = A_a \cup B_a; \qquad (13.33)$$
$$(A \cap B)_a = A_a \cap B_a.$$

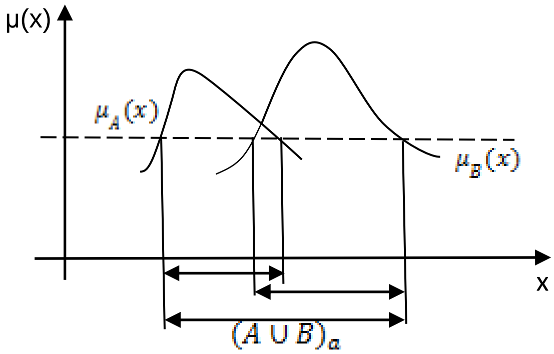


Рисунок 13.16 – Множина рівня об'єднання нечітких множин

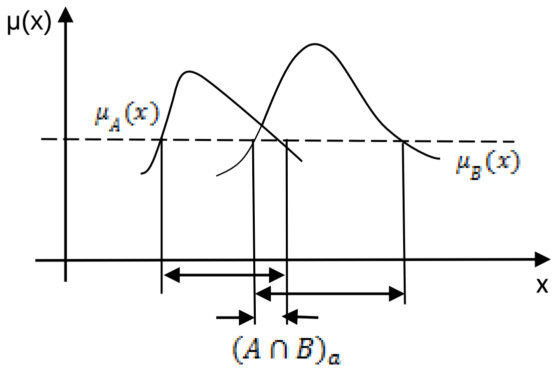


Рисунок 13.17 – Множина рівня перетину нечітких множин

У зв'язку з введенням поняття множини рівня є доцільним зробити наступні зауваження:

По-перше, якщо $(A_1 * A_2 * .... * A_n)_a$ - множина рівня декартового добутку $(A_1 * A_2 * .... * A_n)_a$ нечітких множин, $A_1, A_2, ..., A_n$ то з визначення самого декартового добутку цілком очевидно випливає, що множина рівня $\boldsymbol{\alpha}$ декартового добутку нечітких множин дорівнює декартовому добутку множин рівня відповідних нечітких множин, тобто:

$$(A_1 * A_2 * ... A_n)_q = (A_1)_a * (A_2)_a * ... * (A_n)_a. \qquad (13.34)$$

По-друге, множина Аα рівня α будь-який опуклої комбінації $A_1, A_2, ... A_n$ нечітких множин містить перетин множин рівня всіх цих множин, тобто:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)_a \supset A_a. \qquad (13.35)$$

По-третє, при вирішенні задач управління та прийняття рішень в цілому ряді випадків зручно користуватися розкладанням нечіткої множини А за її множинами рівнів, тобто поданням її у вигляді об'єднання нечітких множин

$$\mathrm{A} = \bigcup_{a} a * \mathrm{A}_a, \qquad (13.36)$$

де $\mu_{a\,Aa} = a * \mu_A$. При цьому об'єднання нечітких множин $a * A_э$ береться, відповідно до визначення, по різним $a = \overline{0,1}$.

13.4. Рішення багатокритеріальних задач на нечіткій множині альтернатив

У реальній практичній діяльності та повсякденному житті людина часто стикається з необхідністю вирішення різних завдань, в яких потрібно максимізувати деяку цільову функцію по цілому ряду критеріїв. Подібні завдання прийнято відносити до класу багатокритеріальних оптимізаційних задач, і їх рішення є досить складною проблемою. Справа в тому, що окремі критерії можуть бути суперечливими і навіть мати протилежний зміст.

Існуючі підходи до вирішення подібних завдань об'єднують ідеї певного узгодження вимог, передбачених різними критеріями. Зазвичай це досягається вибором деякого компромісного варіанту, при якому значення цільової функції не по одному з критеріїв не досягає максимуму, однак по кожному з них воно виявляється в певному сенсі цілком прийнятним з точки зору ступеня задоволення декількох різним (а, можливо, і всім) критеріям.

Ще більш складний випадки є багатокритеріальні задачі, які вирішуються в умовах невизначеності і відносяться до класу нечітких. При цьому нечіткість завдання може бути обумовлена нечіткістю мети і відповідним нечітким описом цільової функції. Нечіткими можуть бути множини альтернатив, раціональний вибір з яких і є вирішенням завдання, а також множини обмежень. Нарешті, нечіткість завдання може бути наслідком і нечіткості самих критеріїв оптимальності.

Розглянемо задачу вибору альтернативи x з їх множини $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ якщо цей вибір здійснюється на основі ступеня відповідності альтернатив деякої сукупності вимог, що визначаються системою m різних критеріїв $C_1, C_2, ..., C_m$. В такому випадку кожному критерію C_i може бути поставлено у відповідність нечітка множина:

$$A_{C_i} = \{\mu_{C_i}(x_1), \mu_{C_i}(x_2), ..., \mu_{C_j}(x_n)\}. \qquad (13.37)$$

Тут величина $\mu_{C_i}(x_j) \in [0,1]$ і є оцінкою альтернативи x_j за критерієм C_i. Іншими словами, вона виступає характеристикою ступеня її відповідності вимозі, що визначається аналізованим критерієм C_i.

Видається цілком природним, що рішенням вихідної задачі буде така альтернатива x, яка найбільшою мірою задовольняє вимогам всієї сукупності критеріїв. Звідси випливає, що вирішальне правило D вибору найкращої альтернативи може бути представлено як знаходження перетину відповідних нечітких множин

$$D = A_{C_1} \cap A_{C_2} \cap \ldots \cap A_{C_m} . \tag{13.38}$$

Відповідно до визначення операції перетину нечітких множин функція приналежності шуканого рішення знаходиться як

$$\mu_D(x_j) = \min_{i=1,n}(\mu_{A_{C_i}}(x_j)), j = \overline{1,n} . \tag{13.39}$$

Таким чином, в якості найкращої повинна бути обрана та з альтернатив x_j^*, для якої значення функції приналежності $\mu_D(x_j)$ виявиться максимальним. Тобто

$$\mu_D(x_j^*) = \max_{j=1,n}(\mu_D(x_j)) . \tag{13.40}$$

Саме ця альтернатива і є рішенням вихідної задачі, оскільки вона найбільшою мірою задовольняє вимогам всієї сукупності розглянутих критеріїв.

При вирішенні багатокритеріальних оптимізаційних задач ситуація помітно ускладнюється, якщо критерії оптимізації мають різну ступінь важливості (або значимості). В цих випадках виникає необхідність узгодження критеріїв з урахуванням ступеня важливості кожного з них. Тут на основі застосування методів знаходження екстремуму функції кількох змінних використовуються різні способи згортки критеріїв.

Відзначимо, що в розглянутій задачі всі критерії C_i передбачалися рівноправними, тобто мають однакову важливість. Однак у практиці управління та прийняття рішень нерідко зустрічаються ситуації, коли потрібно вирішувати багатокритеріальну оптимізаційну задачу в умовах різної важливості критеріїв C_i досягнення максимуму цільової функцією. У подібних випадках кожним критерієм, доцільно поставити у відповідність деякий ваговий коефіцієнта $\lambda_i \geq 0$, причому

$$i = \overline{1,m} \;\; і \;\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1 . \tag{13.41}$$

Природно, чим більшою є важливість критерію, тим більше значення приписується його вагового коефіцієнту.

З урахуванням цього вирішальне правило D вибору найкращої альтернативи в умовах багатокритеріальної задачі з нерівнозначними критеріями C_i, що мають вагові коефіцієнти λ_i використовує процедуру знаходження перетину нечітких множин

$$D = A_{C_1}^{\lambda_1} \cap A_{C_2}^{\lambda_2} \cap \ldots \cap A_{C_m}^{\lambda_m} . \tag{13.42}$$

Значення самих вагових коефіцієнтів визначаються на основі стандартної процедури попарного порівняння критеріїв. Для цього спочатку формується матриця B попарних порівнянь, для знаходження елементів b_{ij} якої можна ввести наступну шкалу оцінок, наведену в таблиці 13.1.

Таблиця 13.1 – Шкала оцінок відносної важливості критеріїв

Відносна важливість критеріїв C_i і C_j	Значення елемента b_{ij}
Однакова важливість	1
Кілька важливіше	3
Важливіше	5
Помітно важливіше	7
Істотно важливіше	9
Проміжні значення	2,4,6,8

Оскільки порівняння будь-якого критерію з самим собою означає тільки однакову важливість, то всі b_{ii}. Крім того, в силу симетричності відношення важливості критеріїв домовимося вважати

$$b_{ji} = \frac{1}{b_{ij}}. \tag{13.43}$$

Після цього відповідно до стандартної процедури знаходиться власний вектор w матриці B, який відповідає її максимальному власному числу ν_{max} з рівняння

$$B \cdot w = \nu_{max} w. \tag{13.44}$$

Шукані значення вагових коефіцієнтів λ_i знаходяться шляхом множення відповідних елементів власного вектора w на число m, що забезпечує виконання умови (13.41):

$$\lambda_i = m \cdot w_i. \tag{13.45}$$

Проілюструємо особливості вирішення багатокритеріальних задач нечіткої оцінки альтернатив з практичним використанням наведених методів на наступних прикладах.

Приклад 13.5

Вважаючи вимоги до кандидатів на певну вакантну посаду критеріями рівної важливості, розглянемо звичайну в кадровій політиці задачу підбору найбільш підходящого кандидата. Припустимо, що необхідно підібрати керівника для перспективної філії фірми. З множини претендентів після попереднього знайомства з ними відібрано п'ять кандидатів. Вони утворюють множину

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \tag{13.46}$$

де x_1 – головний інженер фірми;

x_2 – головний менеджер дрібнішого філії фірми;

x_3 – керівник дослідницького відділу фірми;

x_4 – третій заступник генерального директора фірми;

x_5 – молодий, талановитий і перспективний працівник, недавній випускник вузу.

Оцінювати претендентів будемо за наступним безлічі з шести рівнозначних між собою критеріїв:

$$C = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}, \qquad (13.47)$$

де C_1 – професійна компетенція претендента;

C_2 – організаторські та комунікативні здібності;

C_3 – професійний досвід подібної роботи;

C_4 – діловий авторитет серед колег і партнерів;

C_5 – вміння працювати з людьми і розуміння їх психології;

C_6 – вік претендента.

Визначивши ступінь відповідності кожного з відібраних претендентів встановленим критеріям, сформуємо наступну сукупність нечітких множин, що описують відповідність претендентів по кожному критерію:

$$A_{C_1} = \{(x_1;0,9),(x_2;0,9),(x_3;0,6),(x_4;0,8),(x_5;0,5)\}$$

$$A_{C_2} = \{(x_1;0,8),(x_2;0,9),(x_3;0,5),(x_4;0,7),(x_5;0,6)\}$$

$$A_{C_3} = \{(x_1;0,7),(x_2;0,9),(x_3;0,8),(x_4;0,5),(x_5;0,3)\}$$

$$A_{C_4} = \{(x_1;0,9),(x_2;0,8),(x_3;0,5),(x_4;0,6),(x_5;0,5)\}$$

$$A_{C_5} = \{(x_1;0,9),(x_2;0,9),(x_3;0,4),(x_4;0,7),(x_5;0,6)\}$$

$$A_{C_6} = \{(x_1;0,9),(x_2;0,4),(x_3;0,8),(x_4;0,7),(x_5;0,5)\}$$

Застосовуючи правило вибору шуканої альтернативи, знайдемо перетин цих множин, який буде мати наступний вигляд:

$$D = \{(x_1, \min(0,9;0,8;0,7;0,9;0,9;0,9)),(x_2, \min(0,9;0,9;0,9;0,8;0,9;0,4)),$$
$$(x_3, \min(0,6;0,5;0,8;0,5;0,4;0,8)),(x_4, \min(0,8;0,7;0,5;0,6;0,7;0,7)),$$
$$(x_5, \min(0,5;0,6;0,3;0,5;0,6;0,5)),\} = \{(x_1,0,7),(x_2,0,4),(x_3;0,4),(x_4;0,5),(x_5;0,3)\}.$$

На основі результатів порівняння між собою отриманих значень функцій належності $\mu_{C_i}(x_j)$ кожної з альтернатив x_j множини D можна зробити остаточний висновок про те, що найкращою альтернативою для заняття вакантної посади директора філії є x_1, тобто головний інженер фірми.

Контрольні запитання і завдання:

1. Поясніть поняття нечітких множин.
2. Надайте характеристику "трикутної" і "трапецієвидної" функцій приналежності.
3. Надайте характеристику Z-образних функцій приналежності.
4. Надайте характеристику S-подібних функцій приналежності.
5. Надайте характеристику П-подібної функції приналежності.
6. Надайте графічне зображженя та охарактеризуйте функції приналежності нормальної A і субнормальної B нечітких множин.

7. Що є носієм suppA нечіткої множини A?
8. Що називають об'єднанням нечітких множин A і B на універсальній множині X?
9. Як знайти різницю нечітких множин A і B на деякій універсальній множині X?
10. Опуклою комбінацією нечітких множин A_1, A_2, …, A_n на множині X називається?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. $\mu c(x)$ є:
   а) [-1;1];
   б) [0;1];
   в) [-1;0];
   г) [-∞;+∞];
   д) Z.
2. Нечітка множина називається пустою, якщо її функція приналежності:
   а) дорівнює 1 на всій універсальній множині X;
   б) знаходиться в межах [0;1];
   в) знаходиться в межах [-∞;+∞];
   г) дорівнює - 1 на всій універсальній множині X;
   д) дорівнює 0 на всій універсальній множині X.
3. Нечітка множина являється пустою, якщо:
   а) $\overleftarrow{\mu\varnothing(x) = 0, \forall x \in X}$;
   б) $\overleftarrow{\mu\varnothing(x) = -1, \forall x \in X}$;
   в) $\overleftarrow{\mu\varnothing(x) = 0, \forall x \notin X}$;
   г) $\overleftarrow{\mu\varnothing(x) = 1, \forall x \in X}$;
   д) $\overleftarrow{\mu\varnothing(x) = 0, \forall x \notin X}$.
4. Носієм нечіткої множини A є така підмножина універсальної множини X, для елементів якого значення функції приналежності:
   а) $\mu\alpha(x) \geq 0$;
   б) $\mu\alpha(x) \leq 0$;
   в) $\mu\alpha(x) > 1$;
   г) $\mu\alpha(x) > 0$.
5. Нечітка множина A називається нормальною, якщо для його функції приналежності виконується дотримується умова:
   а) $\sup\limits_{x \in X} \mu a(x) = 0$;
   б) $\sup\limits_{x \in X} \mu a(x) = 1$;
   в) $\sup\limits_{x \in X} \mu a(x) = -1$;
   г) $\sup\limits_{x \in X} \mu a(x) < 0$;

д) $\sup\limits_{x \in X} \mu a(x) > 1$.

Прикладні завдання.

Задача 13.1

Побудуйте графіки приналежності функцій нечіткой змінной таких економічних показників;

– показник абсолютної ліквідності;
– показник поточної ліквідності;
– показник фінансової незалежності

Задача 13.2

Обгрунтувати прийняття рішення на основі оцінки кредитоспроможності позичальника за допомогою теорії нечітких множин. Дані бухгалтерської звітності представлені в таблиці 13.2..

Таблиця 13.2 – Дані бухгалтерської звітності

Фінансовий показник	Значення показника, тис. грн.			
	a_1	a_2	a_3	a_4
Кошти (ДС)	229,1	9464	947,0	1442,9
Короткострокові фінансові вкладення (КФВ)	394,1	462,7	466,4	2066,0
Дебіторська заборгованість (ДЗ)	4639,8	8391,4	8514,5	10908,2
Запаси й витрати (ЗВ)	6028,1	21557,6	21370,4	17424,5
Власний капітал (ВК)	12395,8	35247,8	41244,2	53939,4
Короткострокові зобов'язання (ОКс)	4058,1	13834,9	16827,1	25028,3
Підсумок балансу (ПБ)	16453,9	49082,7	58071,3	78967,7
Валовий виторг (ВВ)	59438,9	38567,9	43589,5	28343,6
Прибуток. (П)	16642,9	4442,5	65384,2	3401,2

Відповідно до вхідних даних, необхідно розглянути кредитоспроможність позичальників капіталу в банку на основі наступних показників:

– коефіцієнт абсолютної ліквідності;
– проміжний коефіцієнт покриття;
– загальний коефіцієнт покриття;
– коефіцієнт фінансової незалежності;
– коефіцієнт рентабельності продукції.

Перераховані коефіцієнти є критеріями якості кредитоспроможності підприємств.

ТЕМА 14. НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ

14.1 Визначення нечітких відношень

Для більш детального розгляду цього розділу доцільно ознайомитись з основами теорії відношень на звичайних множинах. що використовується для розгляду даної теми (див. додаток Б).

Нечітким відношенням *R* на множині елементів (об'єктів, альтернатив і т.д.) X називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$, яка характеризується функцією приналежності

$$\mu_R: X \times X \to [0;1]. \tag{14.1}$$

Іншими словами, нечіткість тут визначає характер відношення R між будь-якими об'єктами або альтернативами $x, y \in X$ у тих випадках, коли щодо них не існує чіткого судження про це відношення або ступінь його справедливості його виконання. Наприклад, для різних людей, у тому числі й для експертів, визначення переваги одного із двох або більшого числа близьких по своїх якостях альтернативних варіантів рішення звичайно представляє досить непросту проблему раціонального вибору.

Тому конкретне числове значення функції приналежності $\mu_R(x,y)$відношення R по своїй сутності й виступає певним показником суб'єктивної оцінки справедливості відношення xRy для даної пари (x,y) або оцінки ступеня його виконання з власної точки зору кожного окремого експерта з урахуванням його загальної культури, ерудиції, рівня професійної компетентності, освіти, досвіду й навіть смаку.

Як наочний приклад приведемо порівняння звичайного відношення $R_1 = (\geq)$, яке відображає той факт, що одні елементи якої-небудь множини не є меншими, чим деякі інші його елементи, і нечіткого відношення $R_2 = (\gg)$, що свідчить про те, що деякі елементи розглянутої множини є набагато більшими інших його елементів. Нечіткість його полягає вже в тому, що слово "набагато", по-перше, для різних людей може мати різний сенс і зміст, а по-друге, навіть для однієї й тієї самої людини воно по-різному буде сприйматися в різних обставинах.

Так, якщо порівнювати дітей трирічного віку із шестирічними, три роки вікової різниці, насправді, дозволяють вважати, що діти другої групи є набагато старшими, ніж діти першої групи. Коли ж мова йдеться про семидесятирічних й семидесятитрьохрічних людей, така ж різниця в три роки взагалі буде виглядати дуже малою (тобто цією різницею можна знехтувати).

Для наочного порівняння характеру згаданих звичайного $R_1 = (\geq)$ і нечіткого $R_2 = (\gg)$ відношень виявляється дуже зручним скористатися можливістю геометричного їх подання на множині пар (x, y) в області, обмеженої для конкретності одиничним квадратом. Так, на рис. 14.1 наведена геометрична ілюстрація звичайного відношення xR_1y, що відповідно може бути записано у вигляді нерівності $x \geq y$.

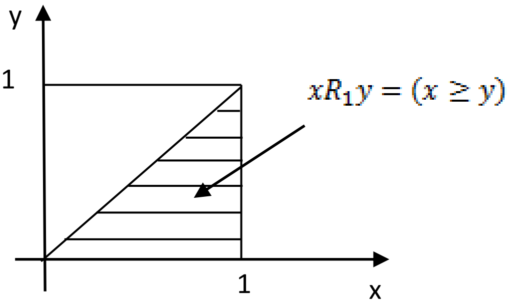


Рисунок 14.1 – Геометрична інтерпретація відношення $xR_1y = (x \geq y)$

Геометрична область, у якій це відношення виконується, розташована праворуч від діагоналі квадрата (з такою ж справедливістю можна стверджувати, що вона розташована нижче цієї діагоналі). Вона містить всі точки, включаючи й саму діагональ, й показана на рисунку за допомогою рівномірного горизонтального штрихування.

На відміну ж від звичайного відношення xR_1y, на рис. 14.2 наведена геометрична інтерпретація нечіткого відношення $xR_2y = (x \gg y)$, тобто відношення “x набагато більше y”.

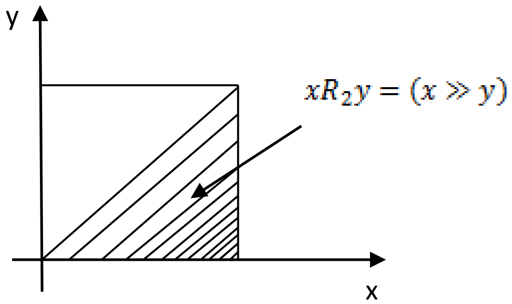


Рисунок 14.2 – Геометрична інтерпретація відношення $xR_2y = (x \gg y)$

Видається цілком зрозумілим, що відповідна область площини $x0b$, для точок якої виконується це відношення, також розташована праворуч від діагоналі одиничного квадрата, однак її характер виявляється набагато складнішим. Дійсно, по-перше, точки на самій діагоналі квадрата вже ніяк не можуть входити до складу цієї області, оскільки вони відповідають відношенню рівності $x = y$, що суперечить відношенню «x набагато більше y». По-друге, чим ближче до діагоналі розташована точка (x, y), тим слабкіше повинна вважатися міра виконання відношення R_2 «x набагато більше y», а чим далі від діагоналі розташована ця точка, тим з більшою мірою воно виконується.

Тому рідке штрихування поблизу діагоналі квадрата й відповідає тим парам (x, y), для яких це відношення виконується з малим значенням функції приналежності $\mu_R(x,y)$, а поступове збільшення інтенсивності штрихування в міру видалення від діагоналі виступає свідченням зростання числового значення функції приналежності до $\mu_{R_2}(x,y) \to 1$ включно в правому нижньому куті квадрата.

У тих випадках, коли множина X, на якій задане нечітке відношення R, є кінцевим, функція приналежності μ_R цього відношення являє собою квадратну матрицю, елементами якої є числа з інтервалу [0,1]. Так, якщо якийсь із елементів матриці $r_{ij} = a$, це означає, що відношення $x_i R y_i$ виконується зі ступенем, рівним a.

Введемо тепер деякі поняття, сенс і зміст яких видається цілком зрозумілим, оскільки вони вже розглядалися для нечітких множин, а нечітке відношення є особливим видом такої множини, заданої на декартовому добутку $X \times X$.

Носієм $supp\,R$ **нечіткого відношення** R на множині X називається підмножина декртового добутку $X \times X$, що має наступний вид:

$$supp = \{(x,y):(x,y) \in X \times X;\ \mu_R(x,y) > 0\}. \qquad (14.2)$$

Підкреслимо, що $supp\,R$, як і у випадку з поняттям носія нечіткої множини, є вже **звичайним,** тобто чітким відношенням. Фактично носій нечіткого відношення може розглядатися як звичайне відношення на множині X, що зв'язує ті пари (x,y), для яких значення функції приналежності відношення R більше нульових, тобто $\mu_R(x,y) > 0$.

Множиною рівня *a* нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку $X \times X$, що має наступний вигляд:

$$R_a = \{(x,y):(x,y) \in X \times X, \mu_R \geq a\}. \qquad (14.3)$$

Іншими словами, множина рівня *a* нечіткого відношення R на множині X є **звичайним відношенням** на X, що пов'язує всі пари (x, y), для яких відношення R виконується зі ступенем, не меншим, ніж величина a .

Якщо множина X є кінцевою, то матрицю носія нечіткого відношення R, і матрицю його множини рівня a можна легко одержати, замінивши в матриці функції приналежності μ_R нечіткого відношення R одиницею відповідно всі елементи, більші нуля при визначенні носія цього відношення, і всі елементи, які не менші, ніж a – при визначенні його множини рівня a .

Нехай, наприклад, на кінцевій множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ задане нечітке відношення R з функцією приналежності:

$$\mu_R(x,y) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді, відповідно до наведеного визначення, його носієм буде чітке відношення, матриця якого приймає наступний вигляд:

$$supp\,R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а множиною рівня $\alpha = 0{,}5$ цього відношення буде відношення, матриця якого приймає відповідно вигляд:

$$R_{0,5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поняття носія нечіткого відношення і його множини рівня використовуються в цілому ряді задач керування й прийняття рішень.

14.2 Операції над нечіткими відношеннями

Нехай на деякій універсальній множині X задані два нечітких відношення A і B, кожне з яких є нечіткою множиною на декартовому добутку $X \times X$, і нехай їхніми елементами є пари (x,y), а функціями приналежності відповідно виступають $\mu_A(x,y)$ і $\mu_B(x,y)$.

Розглянемо основні операції, які визначаються над цими відношеннями. Оскільки, як ми вже відзначали вище, нечіткі відношення є особливим видом нечітких множин, є цілком природним, що операції над ними визначаються за аналогією з відповідними операціями над нечіткими множинами, розглянутими раніше.

Об'єднанням нечітких відношень A і B на множині X називається нечітке відношення $C = A \cup B$, функція приналежності якого має вигляд:

$$\mu_C(x,y) = \max\{\mu_A(x,y), \mu_B(x,y)\}, \qquad (14.4)$$

для будь-якої пари $(x,y) \epsilon X$.

Перетином нечітких відношень A **і** B на множині X називається нечітке відношення $D = A \cap B$ функція приналежності якого має вигляд:

$$\mu_D(x,y) = \min\{\mu_A(x,y), \mu_B(x,y)\}, \qquad (14.5)$$

для будь-якої пари $(x,y) \epsilon X$.

Кажуть, що **нечітке відношення** B **містить у собі нечітке відношення** A (або, що те ж, що нечітке відношення A міститься в нечіткому відношенні B), якщо для відповідних нечітких множин A і B виконується умова $A \subseteq B$ і при цьому для функцій приналежності цих множин нерівність

$$\mu_A(x,y) \leq \mu_B(x,y), \qquad (14.6)$$

є справедливим для будь-яких $(x,y) \epsilon X$.

Наочну геометричну ілюстрацію цієї умови дає рис. 14.3, на якому наведено графіки функцій приналежності обох нечітких відношень. Із цих графіків дійсно можна зробити висновок про те, що $\mu_A(x,y) \leq \mu_B(x,y)$ для всієї множини пар (x,y).

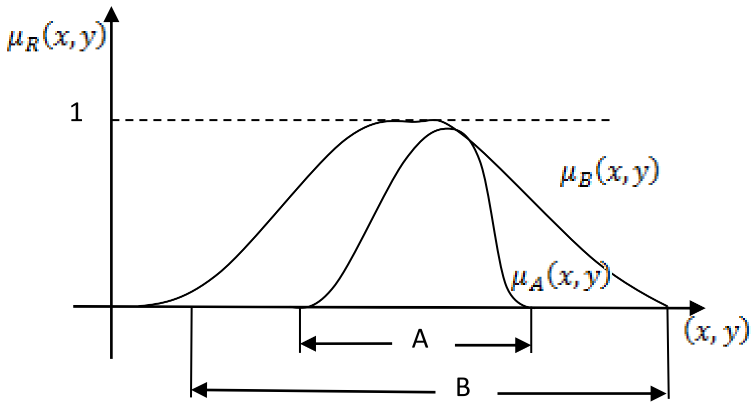


Рисунок 14.3 – Геометрична ілюстрація операції включення нечіткого відношення A в нечітке відношення B

Вважаємо за необхідне особливо підкреслити, що на відміну від звичайних відношень, навіть за умови $A \subseteq B$ нечітке відношення B може не включати (не містити в собі) нечіткого відношення A, якщо порушується умова $\mu_A(x,y) \leq \mu_B(x,y)$, як це, наприклад, наведено на рис. 14.4. У цьому факті чітко проявляється одна з принципових відмінностей між звичайними й нечіткими відношенями, як, втім, і між звичайними й нечіткими множинами взагалі.

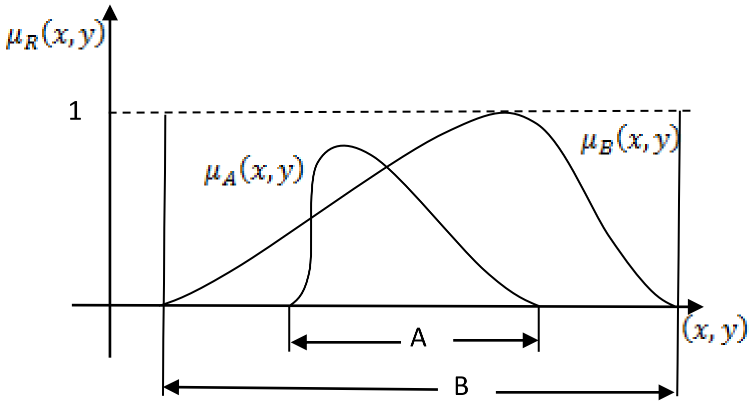


Рисунок 14.4 – Невиконання факту включення нечіткого відношення A в нечітке відношення B внаслідок порушення умови $\mu_A(x,y) \leq \mu_B(x,y)$

Приклад 14.1

Нехай є нечітке відношення $R_1 = (\gg)$ «набагато більше» і звичайне відношення $R_2 = (\geq)$ «не менше». У цьому випадку дійсно можна стверджувати, що $R_1 \subseteq R_2$, оскільки

$$\mu_{R_1}(x,y) \leq \mu_{R_2}(x,y), \qquad (14.7)$$

для будь-якої пари $(x,y) \in X$.

Доповненням нечіткого відношення R **на множині** X називається нечітке відношення R', функція приналежності якого визначається з вираження

$$\mu_{R'}(x,y) = 1 - \mu_{R_1}(x,y), \qquad (14.8)$$

для будь-яких пар $(x, y) \in X$.

Зворотним щодо нечіткого відношення R називається нечітке відношення R^{-1} на множині X, що визначається в такий спосіб:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx : (x, y) \in X;$$

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x) : (x, y) \in X. \qquad (14.9)$$

Сутність зворотного відносно R нечіткого відношення R^{-1} полягає в тому, що воно виражає такий взаємозв'язок між елементом x множини X і його елементом *y,* що визначається відношенням R між елементом y і елементом x.

Приклад14.2

Якщо розглядати нечітке відношення yRx = ("y не гірше x"), то зворотним буде відношення R^{-1}=("x не гірше y"). Для нечіткого відношення $yRx = (y \gg x)$, тобто "y набагато більше, ніж x", зворотним буде нечітке відношення R^{-1}= "y набагато менше, ніж x".

Одночасно з метою продемонструвати принципову відмінність між доповненням R' до нечіткого відношення R і зворотним до нього відношенням R^{-1} наведемо приклад доповнення R' до даного нечіткого відношення $R = (y \gg x)$, що у нашому випадку буде мати вигляд R' = "y не є набагато більшим, ніж x".

Для нечітких відношень мають місце також **операції добутку** або **композиції.** Розглянемо три варіанта подібних композицій, які отримали найбільше поширення. При цьому виходимо з того, що на множині X задані нечіткі відношення А і B з їхніми функціями приналежності відповідно $\mu_A(x,y)$ і $\mu_B(x,y)$

Максимінним добутком (максимінною композицією) нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* є нечітке відношення $A \circ B$ з функцією приналежності, що має такий вигляд:

$$\mu_{A \circ B}(X,Y) = \sup_{z \in X} \min\{\mu_A(x,z), \mu_B(z,y)\}. \qquad (14.10)$$

Мінімаксним добутком (мінімаксною композицією) нечітких відношень *A і B* на множині *X* є нечітке відношення $A \bullet B$ *с* функцією приналежності, що має такий вигляд

$$\mu_{A \bullet B}(X,Y) = \inf_{z \in X} \max\{\mu_A(x,z), \mu_B(z,y)\}. \qquad (14.11)$$

Максмультиплікативним добутком (максмультиплікативною композицією) нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* є нечітке відношення $A * B$ з функцією приналежності, що має такий вигляд

$$\mu_{A * B}(X,Y) = \sup_{z \in X}\{\mu_A(x,z) \cdot \mu_B(z,y)\}. \qquad (14.12)$$

Розглянемо кінцеву множину *X*, тобто таку, яка складається з кінцевого числа *N* елементів. Будемо вважати, що на цій множині задані два нечітких відношення *A* і *B*. Тоді їх функції приналежності $\mu_A(x,z)$ і $\mu_B(x,z)$ будуть мати вигляд квадратні матриці, елементи яких відповідно a_{ij} і b_{ij} відбивають ступінь виконання відповідних нечітких відношень $X_{ij}\,Ay_{ij}$ і $X_{ij}\,By_{ij}$між елементами X_{ij} і y_{ij} . У такому випадку функції приналежності визначених вище композицій даних нечітких відношень повинні обчислюватися по наступних формулах.

— для максимінної композиції:

$$\mu_{A\circ B}(x,y)=\max_{k\in N}\min\{\mu_A(a_{ik},k),\mu_B(k,b_{kj})\},i,j,k\in N; \quad (14.13)$$

$k\in N;$

— для мінімаксної композиції:

$$\mu_{A\bullet B}(x,y)=\min_{k\in N}\max\{\mu_A(a_{ik},k),\mu_B(k,b_{kj})\},i,j,k\in N; \quad (14.14)$$

— для максмультиплікативної композиції:

$$\mu_{A*B}(x,y)=\max_{k\in N}\{a_{ik}\times b_{kj}\},i,j,k\in N. \quad (14.15)$$

Приклад14.3

Нехай функції приналежності нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* мають наступні числові значення:

$$\mu_A(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}6\\ 0{,}5 & 0{,}8\end{bmatrix} \text{ і } \mu_B(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}7\\ 0{,}3 & 1\end{bmatrix}.$$

Розглянемо докладніше алгоритми обчислення матриць функцій приналежності

Для **максимінної композиції** даних нечітких відношень функція приналежності обчислюється таким чином. Спочатку відповідно до формального правила перемножування матриць кожний елемент композиції відшукується шляхом порівняння елементів відповідного рядка матриці функції приналежності $\mu_A(x,y)$ нечіткого відношення *A* і елементів відповідного стовпця матриці функції приналежності $\mu_B(x,y)$ нечіткого відношення *B*.

Наприклад, для елемента a_{11} ця процедура буде виглядати таким чином. Порівнюючи між собою числові значення першого елемента першого рядка – матриці $\mu_A(x,y)$, – 0,2, і першого елемента першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ – 0,5, вибираємо мінімальне з них, тобто величину 0,2. Порівнюючи потім значення другого елемента першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ – 0,6, і значення другого елемента першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ – 0,3, вибираємо мінімальне з них, тобто величину 0,3. Тепер з отриманої сукупності мінімальних значень, тобто із чисел 0,2 і 0,3, остаточно обираємо найбільше, яким є величина 0,3. Ця величина і є шуканим значенням елемента a_{11} . Таким чином, a_{11}=0,3.

Для знаходження елемента a_{12} будемо порівнювати значення чисел, які утворять перший рядок матриці $\mu_A(x,y)$ функції приналежності нечіткого відношення *A* зі значеннями чисел, що утворять другий стовпець матриці $\mu_B(x,y)$ функції приналежності нечіткого відношення *B,* Тоді в результаті порівняння першого елемента першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ (рівного 0,2) і першого елемента другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ (рівного 0,7) оберемо мінімальне значення з них, тобто число 0,2. Потім шляхом порівняння другого елемента першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ (рівного 0,6) і другого елемента другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$(рівного 1) обираємо мінімальне із цих чисел, рівне 0,6. Із цих отриманих двох чисел (0,2 і 0,6) вибираємо найбільше, тобто 0,6, що і буде шуканим значенням елемента a_{12} =0.6.

Далі, для знаходження елемента a_{21} шуканої матриці функції приналежності $\mu_{A^\circ B}(X,Y)$ максимінної композиції нечітких відношень А і В використаємо описану процедуру, порівнюючи між собою значення елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ функції приналежності відношення А зі значеннями елементів першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ функції приналежності відношення В. У такому випадку перша порівнювана пара (перший елемент другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і перший елемент першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$) виявиться, що складається з однакових чисел 0,5, значення якого й залишається для подальшого розгляду. Порівнюючи другий елемент другого рядка матриці $\mu_B(x,y)$ із другим елементом першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, з пари 0,8 і 0,3 вибираємо найменше із цих чисел, тобто 0,3. Потім з відібраних чисел 0,5 і 0,3 вибираємо найбільше, котрим виявляється 0,5. Воно й буде шуканим значенням елемента a_{21} матриці $\mu_{A_0}(x,y)$ функції приналежності максимінної композиції даних нечітких множин.

Нарешті, для визначення елемента a_{22} цієї матриці порівнюємо значення елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ з елементами другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$. Так, з першої пари чисел 0,5 і 0,7 залишимо найменше 0,5, а із другої пари чисел, тобто з 0,8 і 1 – найменше 0,8. З отриманих чисел 0,5 і 0,8 значенням шуканого елемента a_{22} буде найбільше з них, тобто 0,8.

Таким чином, значення матриці $\mu_{A^\circ B}(x,y)$ функції приналежності максимінної композиції $A^\circ B$ розглянутих нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* у цьому випадку остаточно буде мати такий вигляд:

$$\mu_{A^\circ B}(x,y) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Для **мінімаксної композиції** $A \bullet B$ нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* процедура знаходження елементів матриці $\mu_{A \bullet B}(x,y)$ функції приналежності буде подібною, однак за результатами перших порівнянь елементів матриць $\mu_A(x,y)$ і $\mu_B(x,y)$заданих функцій приналежності відношень *A* і *B* для подальшого розгляду залишаються найбільші із чисел порівнюваних пар, що утворять собою елементи відповідних рядків і стовпців, а з отриманої таким чином сукупності вибирається найменше число.

Наприклад, у розглянутому прикладі при порівнянні елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і елементів першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, одержимо, що із двох чисел 0,2 і 0,5 найбільшим буде 0,5, а із двох чисел 0,6 і 0,3 найбільшим буде 0,6. З отриманої таким чином пари 0,5 і 0,6 вибираємо найменше, тобто число 0,5, що і буде відповідним елементом a_{11} шуканої матриці.

В результаті порівняння елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ *і* другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ установлюємо, що із двох чисел 0,2 і 0,7 найбільшим є 0,7, а із двох чисел 0,6 і 1 найбільшою буде одиниця. З отриманої таким чином пари чисел 0,7 і 1 вибираємо найменше, тобто 0,7, що і буде відповідним елементом a_{12} шуканої матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$.

На основі результатів порівняння елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ установлюємо, що із двох однакових чисел 0,5 і 0,5 вибирати нема чого, іншими словами, залишається для подальшого розгляду 0,5. Із двох же інших чисел, тобто 0,8 і 0,3 найбільшим буде 0,8. таким чином, з отриманої пари чисел 0,5 і 0,8 вибираємо найменше, тобто 0,8, що і буде значенням відповідного елемента a_{21} матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$ мінімаксної композиції відношень A і B.

Нарешті, у результаті порівняння елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$ можна встановити, що із чисел 0,5 і 0,7 найбільшим буде 0,7, тому його й залишаємо для подальшого розгляду. Із чисел же 0,8 і 1 найбільшою виявляється одиниця. З отриманої в такий спосіб пари чисел 0,7 і 1 вибираємо найменше, тобто 0,7, що і являє собою значення елемента a_{22} шуканої матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$.

Таким чином, остаточно матриця функції приналежності $\mu_{A\bullet B}(x,y)$ мінімаксної композиції $A\bullet B$ нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* буде мати такий вигляд:

$$\mu_{A\bullet B}(x,y) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}7 \end{bmatrix}.$$

Для **максмультиплікативної композиції** $A*B$ нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* процедуру знаходження елементів матриці $\mu_{A*B}(x,y)$ функції приналежності деякою мірою можна вважати подібною описаним, однак вона має ще більшу аналогію зі звичайною операцією перемножування матриць. Дійсно, при формуванні, наприклад, значення елемента a_{11} спочатку обчислюються добутки відповідних елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, а потім вибирається максимальне з отриманих добутків. У нашому випадку ними відповідно будуть $0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$ і $0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$, причому останнє, як максимальне з них, і буде значенням елемента a_{11} матриці $\mu_{A*B}(x,y)$.

Для елемента a_{12} обчислюємо добуток елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, які виявляються рівними відповідно $0{,}2\times 0{,}7 = 0{,}14$ і $0{,}6 \times 1 = 0{,}6$. Останнє із цих добутків, як найбільше з них, і виступає в якості шуканого значення елемента a_{12}.

Для обчислення елемента a_{21} шукані матриці $\mu_{A*B}(x,y)$ знаходимо величини добутків елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, які становлять відповідно $0,5 \times 0,5 = 0,25$ і $0,8 \times 0,3 = 0,24$. Значення найбільшого з них, тобто число 0,25, і повинне бути присвоєне цьому елементу матриці. Нарешті для знаходження елемента a_{22} обчислюємо величини добутків елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і другого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, які виявляються рівними відповідно $0,5\times 0,7 = 0,35$ і $0,8\times 1 = 0,8$. Найбільше з отриманих добутків, тобто число 0,8, і буде шуканим значенням цього елемента.

Таким чином, остаточне значення матриці $\mu_{A*B}(x,y)$ функції приналежності максмультиплікативної композиції $A * B$ заданих нечітких відношень *A* і *B* на множині *X* буде мати такий вигляд:

$$\mu_{A*B}(x,y) = \begin{bmatrix} 0.18 & 0.6 \\ 0.25 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що поняття композиції нечітких відношень виявляється корисним у процесі рішення деяких класів важливих прикладних задач управління й прийняття рішень, особливо в умовах інформаційної невизначеності.

Приклад 14.4

Розглянемо типову ситуацію, пов'язану з консалтінгом в області вибору професії для наступного навчання та отримання відповідної спеціальності. З цією метою побудуємо нечітку модель, засновану на двох бінарних нечітких відношеннях S і E. Перше з цих нечітких відношень будується на двох базисних множинах X і У, а друге – на двох базисних множинах У і Z. Тут X описує множини спеціальностей, за якими проводиться набір на навчання, У ¬ множина псіхофізіологічних характеристик, а Z ¬ множина кандидатів на навчання. В контексті нечітке відношення S змістовно описує психофізіологічне профілювання спеціальностей, а E ¬ психофізіологічне профілювання кандидатів на навчання.

Для конкретності, нехай

- X={ x_1 - "менеджер", x_2 - "програміст", x_3 – "водій", x_4 – "секретар-референт", x_5 – "перекладач"},
- Y={y_1 – "швидкість і гнучкість мислення", y_2 – "вміння швидко приймати решенія", y_3 – "стійкість і концентрація уваги", y_4 – "зорова пам'ять", y_5 – "швидкість реакції", y_6 – "рухівна пам'ять" , y_7 – "фізична витривалість", y_8 – "координація рухів", y_9 – "емоціонально-вольова стійкість", y_{10} – "відповідальність"};
- Z = {z_1 – "Петров", z_2 – "Іванов", z_3 – "Сідоров", z_4 – "Васильєва", z_5 – "Григоріна"}.

Конкретні значення функцій приналежності нечітких відношень представлені такими таблицями (табл. 14.1 та 14.2).

Таблиця 14.1 – Нечітке відношення S профілювання спеціальностей навчання

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
x_l	0.9	0.9	0.8	0.4	0.5	0.3	0.6	0.2	0.9	0.8
x_2	0.8	0.5	0.9	0.3	0.1	0.2	0.2	0.2	0.5	0.5
x_3	0.3	0.9	0.6	0.5	0.9	0.8	0.9	0.8	0.6	0.3
x_4	0.5	0.4	0.5	0.5	0.2	0.2	0.3	0.3	0.9	0.8
x_5	0.7	0.8	0.8	0.2	0.6	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2

Таблиця 14.2 – Нечітке відношення E профілювання кандидатів на навчання

	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
y_1	0.9	0.8	0.7	0.9	1
y_2	0.6	0.4	0.8	0.5	0.6
y_3	0.5	0.2	0.3	0.8	0.7
y_4	0.5	0.9	0.5	0.8	0.4
y_5	1	0.6	0.5	0.7	0.4
y_6	0.4	0.5	1	0.7	0.8
y_7	0.5	0.8	0.9	0.5	0.4
y_8	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5
y_9	0.8	1	0.2	0.5	0.6
y_{10}	0.3	0.5	0.9	0.6	0.8

Матриці цих нечітких відносин в точності відповідають таблицям нечітких відношень.

Оскільки аналізовані нечіткі відносини задовольняють формальним вимогам, необхідним для виконання їх нечіткої композиції – максимінної композиції даних нечітких відношень Результат операції нечіткої композиції цих відношень може бути представлений у вигляді матриці або таблиці нечіткого відношення Для наглядності наведемо функції приналежності у табличній формі (табл. 14.3).

Таблиця 14.3 – Нечітка максимінна композиція двух вихідних відношень

	Петров	Сідоров	Іванов	Васильєва	Григоріна
Менеджер	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9
Програміст	0.8	0.8	0.7	0.8	0.8
Водій	0.9	0.8	0.9	0.7	0.8
Секретар	0.8	0.9	0.8	0.6	0.8
Перекладач	0.7	0.7	0.8	0.8	0.7

Розглянемо, яким чином виходить одне із значень функції приналежності композиції, наприклад, значення $\mu_{S\circ E} = 0.9$. Спочатку знайдемо мінімальні значення функції приналежності всіх пар елементів першої строкі табл. 14.1 та першого стовпця табл. 14.2. А саме: min {0.9, 0.9} = 0.9, min {0.9, 0.8} = 0.8, min {0.8, 0.5} = 0.5, min {0.4, 0.5} = 0.4, min {0.5, 1} = 0.5, min {0.3, 0.4} = 0.3, min {0.6, 0.5} = 0.5, min {0.2, 0.5} = 0.2, min {0.9, 0.8} = 0.8, min {0.8, 0.3} = 0.3. Після етого знайдемо максимальне з 10 отриманих значень, яке і буде шуканим значенням функції приналежності: max {0.9, 0.8,0.5,0.4,0.5,0.3,0.5,0.2,0.8, 0.3} = 0.9. Інші значення функції приналежності знаходяться аналогічно.

Аналіз табл. 14.3 показує, що наявним кандидатів можна порекомендувати навчання за наступними спеціальностями (на основі максимальних значень функції приналежності композиції розглянутих нечітких відносин): Петров – менеджер, водій; Іванов – менеджер, секретар; Сідоров – водій; Васильєва–менеджер, Григоріна – менеджер. З точки зору подготовкі розглянутих фахівців для навчання за спеціальністю менеджер найбільш підходять кандидати: Петров, Іванов, Васильєва і Григоріна; за спеціальністю програміст – ті ж кандидати; за спеціальністю водій – Сідоров; за спеціальністю секретар – Іванов; за спеціальністю перекладач – Сідоров і Васильєва.

Проілюструємо результат максмультиплікативної композиції нечітких відношень з прикладу. Ці нечіткі відносини задовольняють формальним вимогам, необхідним для виконання їх нечіткої максмультиплікативної композиції згідно (14.14). Результат операції нечіткої композиції може бути представлений у вигляді наступній таблиці (табл. 14.4).

Таблиця 14.4 – Нечітка максмультиплікативна композиція двох вихідних відношень

	Петров	Сідоров	Іванов	Васильєва	Григоріна
Менеджер	0.81	0.90	0.72	0.81	0.90
Програміст	0.72	0.64	0.56	0.72	0.80
Водій	0.90	0.72	0.81	0.63	0.64
Секретар	0.72	0.90	0.72	0.48	0.64
Перекладач	0.63	0.56	0.64	0.64	0.70

Аналіз табл. 14.4 показує, що наявним кандидатам можна порекомендувати навчання за наступними спеціальностями (на основі максимальних значень функції приналежності композиції розглянутих нечітких відношень: Петров – водій; Іванов – менеджер, секретар; Сидоров – водій; Васильєва – менеджер, Григоріна – менеджер. З точки зору підготовки розглянутих фахівців для навчання за спеціальністю менеджер найбільш підходять кандидати: Іванов і Григоріна; за спеціальністю програміст – Григоріна; за спеціальністю водій – Петров; за спеціальністю секретар – Іванов; за спеціальністю перекладач – Сідоров і Васильєва.

Слідуючи загальним рекомендаціям прикладного системного аналізу щодо принципу багатомодельності, можна зробити наступний висновок. Якщо під час використання різних моделей отримані однакові результати. то цей факт може свідчити про наявність стійкого зв'язку або закономірності між окремими елементами моделей. Стосовно до нечітких моделей збіг результатів, отриманих на основі операцій максимінної композиції і максмультиплікативної композиції, дає підставу для більш впевнених висновків щодо вибору тих чи інших спеціальностей для навчання кандидатів.

14.3 Проекції нечітких відношень

Розглянемо спочатку випадок звичайного (чіткого) відношення *R*. Нехай для визначеності існує відношення $R = (\geq)$ між величинами $x, y \in X$ на інтервалі їхньої зміни [0,1]. Графічно воно може бути зображене у вигляді правої половини одиничного квадрата, побудованого в системі координат *xOy* (рис. 14.5).

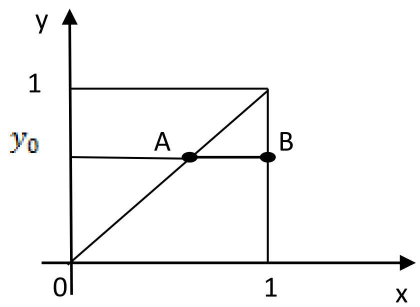


Рисунок 14.5 – До визначення першої проекції відношення *R*

Зафіксуємо певне значення величини $y = y_0$ і розглянемо множину $R(y)=\{x: x \geq y_0\}$, що фактично є перерізом даного відношення *xRy* при обраному фіксованому значенні *y*. На рисунку для обраного $y = y_0$ цей переріз геометрично може бути представлений у вигляді відрізка *AB,* включаючи його граничні точки.

Першою проекцією $R^{(1)}$ **відношення *R*** називається об'єднання множин *R(y)* по всім $y \in X$, тобто

$$R^{(1)} = \bigcup_{y \in X} R(y) \quad . \tag{14.16}$$

У нашому випадку в якості першої проекції виступає об'єднання множин *R(y)* у рамках розглянутого одиничного квадрата, тобто

$$R^{(1)} = \bigcup_{y \in [0,1]} R(y) \quad . \tag{14.17}$$

Видається цілком очевидним, що з геометричної точки зору отримане об'єднання буде збігатися з відрізком [0,1] осі абсцис, що містить у собі всі зазначені множини.

Множина $R^{(1)}$ має наступну важливу властивість. Виявляється, що для кожного елемента $x \in X$ існує таке *y*, для якого виконується дане відношення *xRy*.

Аналогічно, зафіксувавши певне значення $x = x_0$, можна розглянути переріз відношення *xRy* для цього значення *x*. Видається цілком очевидним, що такий переріз являє собою безліч значень *y,* для яких виконується дане відношення *xRy* при кожному фіксованому значенні *x,* тобто множина $R(x) = \{y: x_0Ry\}$. Наочно це можна продемонструвати за допомогою рис. 14.6.

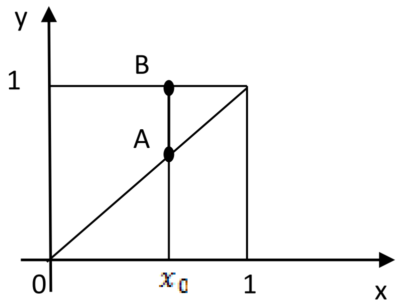


Рисунок 14.6 – До визначення другої проекції відношення *R*

Другою проекцією $R^{(2)}$ **відношення** ***R*** називається об'єднання множин $R(x)$ по всім $x \in X$, тобто

$$R^{(2)} = \bigcup_{x \in X} R(x) \quad . \tag{14.18}$$

У нашому випадку в якості другої проекції виступає об'єднання

$$R^{(2)} = \bigcup_{x \in [0,1]} R(x) \quad . \tag{14.19}$$

Очевидно також, що геометрично таке об'єднання збігається з відрізком [0,1] на осі ординат, що належить цьому об'єднанню й містить у собі всі інші розглянуті множини.

Множині $R^{(2)}$ притаманна наступна важлива властивість. Виявляється, що для кожного елемента $y \in X$ існує таке $x \in X$, для якого виконується дане відношення *xRy*.

У загальному випадку проекції відношення *xRy* мають вигляд, наведений на рис. 14.7. Тут першою проекцією $R^{(1)}$ відношення *R* виступає відрізок [a,b], а другою його проекцією $R^{(2)}$ – відрізок [c,d].

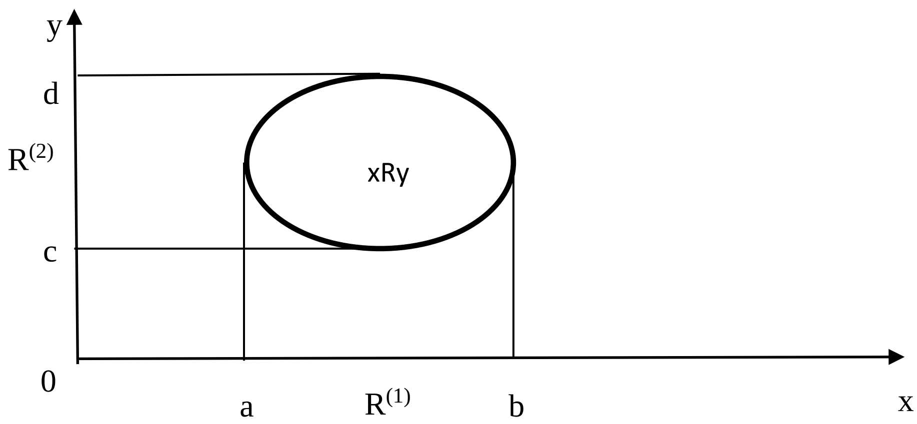


Рисунок 14.7 – Проекції довільного відношення *R*

Видається цілком очевидним, що геометричною інтерпретацією декартового добутку $R^{(1)} \times R^{(2)}$ проекцій $R^{(1)}$ і $R^{(2)}$ є найменший прямокутник, що містить геометричну область відношення *R*.

Перейдімо тепер до розгляду проекцій нечітких відношень. Нехай *xRy* – деяке нечітке відношення на множині *X*, причому його функцією приналежності є $\mu_R(x,y)$. Тоді для довільного $y \in X$ можна ввести поняття нечіткої множини *R(y)*, що є нечіткою множиною елементів $x \in X$, пов'язаних з обраним значенням *y* розглянутим нечітким відношенням *R*. Функція приналежності цієї множини має вигляд $\mu_R(x,y)$ за умови, що *y* є деякою фіксованою величиною.

Наприклад, для нечіткого відношення R=(>>), тобто відношень "*x* є набагато більшим, ніж *y*", функцію приналежності $\mu_R(x,y)$, коли зафіксована величина *y=5,* задана на числовій осі, наведена на рис. 14.8. У цьому випадку множину *R(y)* можна трактувати як нечітку множину чисел, що значно перевершують будь-яке фіксоване значення *y.*

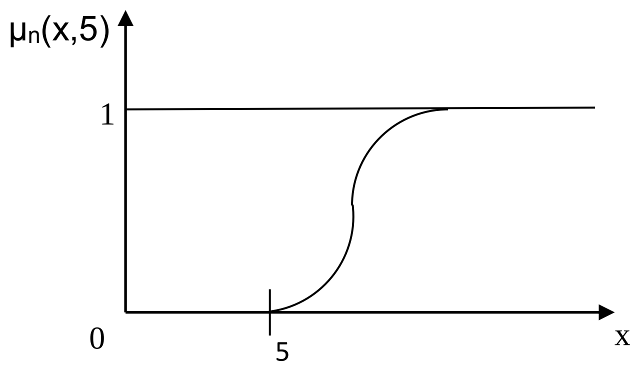


Рисунок 14.8 – Інтерпритація до визначення проекції нечіткого відношення

За аналогією з поняттям проекції звичайного відношення, об'єднання нечітких множин *R(y)* по всім $y \in X$ називають **першою проекцією нечіткого відношення *R*** і позначають символом $R^{(1)}$. Першу проекцію

$$R^{(1)} = \bigcup_{y \in X} R(y), \tag{14.20}$$

визначають за допомогою її функції приналежності, що має такий вигляд:

$$\mu_{R^{(1)}}(x) = \sup_{y \in X} \mu_R(x,y), \forall x \in X. \tag{14.21}$$

Аналогічно вводять й поняття другої проекції нечіткого відношення *R,* що позначається символом $R^{(2)}$. Для цього розглядається нечітка множина *R(x),* що містить усі $y \in X,$ для яких при даному фіксованому значенні *x* справедливо розглянуте нечітке відношення *xRy*. Друга проекція є об'єднанням нечітких множин *R(x),* по всім $x \in X$, тобто

$$R^{(2)} = \bigcup_{x \in X} R(x) \quad (14.22)$$

Її найважливішою характеристикою є функція приналежності, що має наступний вид:

$$\mu_{R^{(2)}}(x) = \sup_{x \in X} \mu_R(x, y), \forall y \in X. \quad (14.23)$$

Якщо розглядати декартовий добуток проекцій $R^{(1)}$ і $R^{(2)}$ нечіткого відношення *R*, тобто $\tilde{R} = R(1) \times R(2)$, то нескладно переконатися, що $R \subset \tilde{R}$. Цей факт безпосередньо випливає з визначення функції приналежності декартового добутку нечітких множин. У такому випадку функція приналежності $\tilde{R}$ має вигляд

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \min\{sup_{y' \in X} \mu_R(x, y')\}, sup_{x' \in X} \mu_R(x', y) \quad (14.24)$$

Приклад14.4

Нехай є кінцева множина *X*, така, що $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, і нечітке відношення *R* на ньому задано матрицею значень функції приналежності $\mu_R(x_i, x_j)$, яку для зручності й більшої наочності наведемо у вигляді таблиці 14.5.

Таблиця 14.5 – Матриця значень функції приналежності $\mu_R(x_i, x_j)$нечіткого відношення *R*

	X_1	X_2	X_3
X_1	0,5	0,3	0,4
x_2	0	0,1	0,8
x_3	0,6	0,2	0,9

Необхідно побудувати першу $R^{(1)}$ і другу $R^{(2)}$ проекції цього відношення й знайти їх декартовий добуток $\tilde{R} = R^{(1)} \times R^{(2)}$. Результати варто представити у вигляді таблиці значень відповідних функцій приналежності μ_{R^1}(x), μ_{R^2}(x) і $\mu_{\tilde{R}}$ (x).

Для побудови першої проекції $R^{(1)}$ необхідно визначити значення її функції приналежності μ_{R^1}(x). Із цією метою, рухаючись послідовно по рядках таблиці 14.1, відшукуємо й відбираємо в кожній з них найбільше з наведених значень функції $\mu_R(x_i, x_i)$. Результати будемо записувати в першому рядку таблиці 2. Вони й будуть шуканими значеннями функції приналежності μ_{R^1}(x) першої проекції $R^{(1)}$ заданого нечіткого відношення R.

Для того, щоб побудувати другу проекцію $R^{(2)}$ даного нечіткого відношення R, також необхідно визначити значення її функції приналежності μ_{R^2}(x). Із цією метою, рухаючись послідовно по стовпцях таблиці 14.1, відшукуємо й відбираємо в кожному з них найбільше значення функції $\mu_R(x_i, x_i)$. Результати для кожного відповідного x_i будемо записувати в другому рядку таблиці 14.2. Вони й будуть являти собою шукані значення функції приналежності μ_{R^2}(x) другої проекції $R^{(2)}$ розглянутого нечіткого відношення R.

Нарешті перейдемо до обчислення значень функції приналежності $\mu_{\tilde{R}}$ (x,y) декартового добутку $\tilde{R} = R^{(1)} \times R^{(2)}$ проекцій $R^{(1)}$ і $R^{(2)}$ даного відношення. Із цією метою вибираємо на основі наведеного визначення цієї функції, відповідно до вираження (1), найменше зі значень $\mu_{R^1}(x_i)$ і $\mu_{R^2}(x_i)$ для кожного x. Таким чином, рухаючись послідовно по стовпцях побудованої таблиці 14.6, вибираємо щораз меншу з величин $\mu_{R^1}(x_i)$ і $\mu_{R^2}(x_i)$. Записуємо її у відповідну клітинку таблиці 14.6.

Таблиця 14.6 – Значення функцій приналежності проекцій $R^{(1)}$ і $R^{(2)}$нечіткого відношення R

	X_1	X_2	X_3
$\mu_{R^1}(x)$	0,5	0,8	0,9
$\mu_{R^2}(x)$	0,6	0,3	0,9

Отримана в результаті сукупність чисел і визначає значення шуканої функції приналежності декартового добутку $\tilde{R}$ проекцій $R^{(1)}$ і $R^{(2)}$ заданого нечіткого відношення R.

Таблиця 14.7 – Значення функції приналежності декартового добутку $\tilde{R}$ проекцій $R^{(1)}$ і $R^{(2)}$ нечіткого відношення R

	X_1	X_2	X_3
$\mu_{\tilde{R}}$	0,5	0,3	0,9

Поняття проекцій нечітких відношень і правила їхнього знаходження виявляються корисними при аналізі й рішенні певного класу завдань управління, а також у практиці організації інтелектуальної підтримки в завданнях прийняття рішень у всіляких сферах людської діяльності.

14.4 Властивості нечітких відношень

При використанні математичного апарата нечітких відношень у процесі постановки й рішення багатьох прикладних проблем виявляється дуже корисним знання властивостей цих відношень. Залежно від наявності тих або інших властивостей нечіткі відношення одержують відповідні назви. У зв'язку із цим вважаємо за необхідне розглянути основні їхні властивості й привести відповідні визначення. Зокрема, нечіткі відношення можуть мати наступні властивості.

1.**Рефлексивність.** Нечітке відношення *R* на множині *X* називається **рефлексивним,** якщо для $\forall$ x $\in$ *X* виконується рівність:

$$\mu_R(x,x) = 1. \tag{14.25}$$

Представляється цілком очевидним, що у випадку, коли X є кінцевою множиною, то матриця рефлексивного нечіткого відношення R складається з одиниць. Характерним прикладом рефлексивного нечіткого відношення R на деякій числовій множині X може бути відношення R=„приблизно рівні".

2.**Антирефлексивність.** Нечітке відношення R на деякій множині X називається **антирефлексивним,** якщо для $\forall x \in X$ виконується умова, що його функція приналежності:

$$\mu_R(x,x) = 0. \qquad (14.26)$$

Прикладом подібного відношення виступає докладно розглянуте вище відношення R=„набагато більше". Адже дійсно, ні для якого x не можна стверджувати, що воно набагато більше самого себе.

Очевидно, що доповнення рефлексивного нечіткого відношення є антирефлексивним нечітким відношенням й навпаки. Це безпосередньо виявляється з визначення вже знайомого поняття доповнення нечіткого відношення R як такого відношення R', функція приналежності якого рівняється

$$\mu_{R'}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y). \qquad (14.27)$$

3.**Симетричність.** Нечітке відношення R на множині X називається **симетричним,** якщо для $\forall x, y \in X$ виконується рівність

$$\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x). \qquad (14.28)$$

Із цього визначення випливає, що матриця симетричного нечіткого відношення, заданого на кінцевій множині X є симетричною відносно головної діагоналі.

Характерним прикладом симетричного відношення може служити відношення R=„ істотно відрізняються по величині". Дійсно, як би ми не пробували розмістити значення двох числових елементів x і y, для яких виконується таке відношення R, різниця по величині між ними буде зберігатися. На рис. 14.9, а показаний випадок, коли $x<y$, тобто елемент x розташований ліворуч від y, а на рис. 14.9 – випадок, коли $x>y$, тобто елемент x розташований праворуч від y.

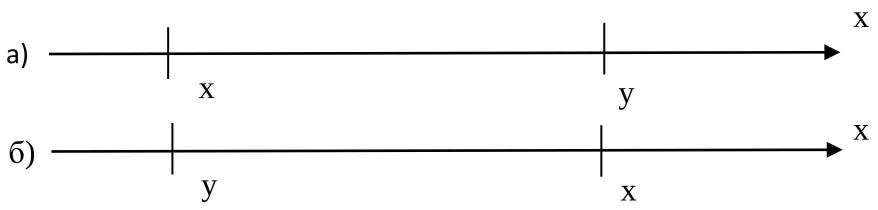


Рисунок. 14.9 – Симетричне відношення

Варіанти розташування елементів x і y, для яких справедливе відношення R=„ істотно відрізняються по величині ". Однак в обох випадках x і y дійсно сильно відрізняються по величині.

4. **Антисиметричність.** Нечітке відношення R на множині X називається **антисиметричним,** якщо для $\forall$ x, y $\in$ X функція його приналежності μ_R(x,y) має наступну властивість:

$$\mu_R(x,y)>0 \Rightarrow \mu_R(y,x)=0. \qquad (14.29)$$

Ця властивість може бути також описана за допомогою наступних двох еквівалентних способів:

1) $\mu_R(x,y)\times\mu_R(y,x)=0$, $\forall$ x, y $\in$ X;

2) $\min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}=0$, $\forall$ x, y $\in$ X.

Прикладом антисиметричного відношення може служити відношення R="один елемент набагато більше іншого".

5. **Транзитивність**. Нечітке відношення R на множині X називається **транзитивним,** якщо для будь-якої пари $\forall$ x, y $\in$ X композиція таких відношень R$\circ$ R є підмножиною даного нечіткого відношення, тобто:

$$R \circ R \subseteq R. \qquad (14.30)$$

Таким чином, властивість транзитивності виявляється істотно різною залежно від того, яким способом визначається композиція (або добуток) нечітких відношень. Позначимо через R_1^2 максимінну композицію відношення R із самим собою, через R_2^2 – їх мінімаксну композицію й через R_3^2 – максмультиплікативну композицію. Тоді для $\forall$ x, y,z $\in$ X виконується наступна нерівність:

$$\max\{\mu_{R1}(x, z), \mu_{R1}(z, y),\} \geq$$
$$\geq \min\{\mu_{R2}(x, z), \mu_{R2}(z, y),\} \geq \max\{\mu_{R3}(x, z), \mu_{R3}(z, y),\} \quad (14.31)$$

Іншими словами, $R_1^2 \subseteq R_2^2 \subseteq R_3^2$.

Таким чином, доцільно говорити про можливість визначення й існування максимінної, мінімаксної і максмультиплікативної транзитивності. Крім того, очевидно також, що коли $R_1^2 \subseteq R$, тобто нечіткому відношенню R властива максимінна транзитивність, то воно володіє одночасно також і властивостями транзитивності двох інших типів, тобто мінімаксної і максмультиплікативної транзитивністю. Надалі під транзитивністю, якщо інше не обумовлено окремо, будемо розуміти саме максимінну транзитивність нечіткого відношення R. Це буде означати, що

$$\mu_R(x,y) \geq sup_{z\in X}\min\{\mu_R(x,z); \mu_R(z,y)\}. \qquad (14.32)$$

Властивість такої транзитивності притаманна, наприклад, нечіткому відношенню R=(>>), тобто відношенню "набагато більше".

6. **Транзитивне замикання.** Транзитивним замиканням ступеня n нечіткого відношення R прийнято називати нечітке відношення, яке визначається, як об'єднання

$$\tilde{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^n. \qquad (14.33)$$

При цьому завжди слід уточнювати, яким способом визначаються операції композиції нечітких відношень, що лежать в основі визначення їхніх ступенів.

Контрольні запитання і завдання:

1. Що називають нечітким відношенням *R* на множині елементів (об’єктів, альтернатив і т.д.) *X*?
2. Що називають носієм $supp\, R$ нечіткого відношення R на множині X?
3. Що називають множиною рівня *a* нечіткого відношення R на множині X?
4. Поясніть поняття «перетин нечітких відносин А і В на множині Х».
5. Поясніть які операції добутку або композиції можуть виконуватися для нечітких відношень.
6. Що називають першою проекцією $R^{(1)}$ відношення R?
7. Що називають другою проекцією $R^{(2)}$ відношення *R*?
8. Які нечіткі властивості мають відношення можуть?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Нечітким відношенням *R* на множині елементів (об'єктів, альтернатив і т.д.) *X* називається:

а) нечітка підмножина декартового добутку ХхХ, яка характеризується функцією приналежності

$\mu_R : X \times X \to [0;1]$;

б) нечітка підмножина скалярного добутку ХхХ, яка характеризується функцією приналежності

$\mu_R : X \times X \to [0;1]$;

в) нечітка підмножина декартового ділення Х/Х, яка характеризується функцією приналежності

$\mu_R : X/X \to [0;1]$;

г) нечітка підмножина декартового додавання Х+Х, яка характеризується функцією приналежності

$\mu_R : X+X \to [-1;1]$;

д) нечітка підмножина декартового додавання Х+Х, яка характеризується функцією приналежності

$\mu_R : X+X \to [-1;1]$.

2. Носієм *supp R* нечіткого відношення *R* на множині *X* називається:

а) підмножина декртового додавання Х+Х *, що* має наступний вид:

$supp = \{(x,y) : (x,y) \in X+X;\ \mu_R(x,y) > 0\}$;

б) підмножина скалярного добутку $X \times X$ *, що* має наступний вид:

$supp = \{(x,y) : (x,y) \in X \times X;\ \mu_R(x,y) > 0\}$;

в) підмножина декртового добутку $X \times X$ *, що* має наступний вид:

$supp = \{(x,y) : (x,y) \in X \times X;\ \mu_R(x,y) > 0\}$;

г) підмножина декртового ділення Х/Х *, що* має наступний вид:

$supp = \{(x,y) : (x,y) \in X/X;\ \mu_R(x,y) > 0\}$;

д) підмножина скалярного добутку $X \times X$ *, що* має наступний вид:

$supp = \{(x,y) : (x,y) \in X \times X;\ \mu_R(x,y) > 1\}$.

3. *supp R* являє собою:

а) звичайне, тобто чітке відношення;

б) нечітке відношення;

в) нормальне нечітке відношення;

г) універсально множина;

д) поглинаюча множина.

4. Множиною рівня *a* нечіткого відношення *R* на множині *X* називається:

а) підмножина декартового додавання X+X, що має наступний вигляд: $R_a = \{(x,y):(x,y) \in X + X,\ \mu_R \geq a\}$;

б) підмножина декартового додавання X+X, що має наступний вигляд: $R_a = \{(x,y):(x,y) \in X + X,\ \mu_R \leq a\}$;

в) підмножина скалярного добутку X×X, що має наступний вигляд: $R_a = \{(x,y):(x,y) \in X \times X,\ \mu_R \geq a\}$;

г) підмножина декартового добутку X×X, що має наступний вигляд: $R_a = \{(x,y):(x,y) \in X \times X,\ \mu_R \geq a\}$;

д) підмножина декартового ділення X/X, що має наступний вигляд: $R_a = \{(x,y):(x,y) \in X/X,\ \mu_R \geq a\}$.

5. Об'єднанням нечітких відносин A і B на множині X називається:

а) нечітке відношення $C=A \cup B$, функція приналежності якого має вигляд:

$\mu_C(x,y) = \min\{\mu_A(x,y),\ \mu_B(x,y)\}$ для будь-якої пари $(x,y) \in X$;

б) нечітке відношення $C=A \cap B$, функція приналежності якого має вигляд:

$\mu_C(x,y) = \min\{\mu_A(x,y),\ \mu_B(x,y)\}$ для будь-якої пари $(x,y) \in X$;

в) нечітке відношення $C=A \subset B$, функція приналежності якого має вигляд:

$\mu_C(x,y) = \min\{\mu_A(x,y),\ \mu_B(x,y)\}$ для будь-якої пари $(x,y) \in X$;

г) нечітке відношення $C=A \supset B$, функція приналежності якого має вигляд:

$\mu_C(x,y) = \min\{\mu_A(x,y),\ \mu_B(x,y)\}$ для будь-якої пари $(x,y) \in X$;

е) нечітке відношення $C=A \cup B$, функція приналежності якого має вигляд:

$\mu_C(x,y) = \max\{\mu_A(x,y),\ \mu_B(x,y)\}$ для будь-якої пари $(x,y) \in X$.

Прикладні завдання

Задача 14.1

Модель "Продукція / Ринок ", яка використовується в стратегічному бізнес-плануванні. Це модель, відома також під назвою матриця «продукція / ринок» або "продукція / ринкова визначеність", є класичною моделлю для розробки корпоративної стратегії.

Дана модель є практичним інструментом для планування продукції і ринків її збуту в залежності від ступеня невизначеності перспектив продажу продукції або можливостей проникнення конкретної продукції на той чи інший ринок. Ця матриця будується виходячи з суб'єктивних оцінок менеджерів з урахуванням тієї обставини, що набагато простіше продати наявними покупцям вже відому продукцію, ніж абсолютно нову або мало відому. При цьому під продукцією розуміються як товари, так і надані послуги.

Виходячи з практичного досвіду також відомо, що продавати існуючий асортимент товарів або послуг категоріям споживачів, близьким до тих, які вже купували їх раніше, простіше, ніж освоювати зовсім нові ринки. Розглянуті обставини можуть служити основою для завдання бінарного нечіткого відношення $R = \{x\ ,y\}$, заданого на базисних множинах $X = \{x_1,x_2,x_3\}$ І $Y = \{y_1,y_2,y_3\}$. При цьому елементи базисних множин мають наступний змістовний сенс:

x_1 - "наявний відомий ринок",

x_2- "новий ринок, пов'язаний з наявними",

x_3 -" абсолютно новий ринок ",

y_1 -"продукція, що випускається",

y_2-"нова продукція, проте пов’язана з існуючою",

y_3-"абсолютно нова продукція".

Побудувати матрицю нечіткого відношенння.

ТЕМА 15. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В АНАЛІЗІ ТА УПРАВЛІННІ ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

15.1 Визначення нечіткої і лінгвістичної змінних.

15.2 Нечіткі висловлення і нечіткі моделі систем.

15.3 Нечітка логіка в Matlab.

15.1 Визначення нечіткої і лінгвістичної змінних

При описі об'єктів і явищ за допомогою нечітких множин використовується поняття нечіткої і лінгвістичної змінних.

Нечітка змінна характеризується трійкою

$$<\alpha, X, A>, \qquad (15.1)$$

де α – найменування змінної,

X – універсальна множина (область визначення a),

A – нечітка множина на X, що описує обмеження (тобто μ A(x)) на значення нечіткої змінної a.

Лінгвістичною змінною називається набір

$$<\beta ,T,X,G,M>, \qquad (15.2)$$

де β – найменування лінгвістичної змінної;

T – множина її значень (терм-множина), що представляє собою імена нечітких змінних, областю визначення, кожної з яких є множина X. Множина T називається базовою терм-множиною лінгвістичної змінної;

G – синтаксична процедура, що дозволяє оперувати елементами терм-множини T, зокрема, генерувати нові терми (значення). Множина $T \cup G(T)$, де G(T) – множина згенерованих термів, називається розширеною терм-множиною лінгвістичної змінної;

M – семантична процедура, що дозволяє перетворити кожне нове значення лінгвістичної змінної, утвореною процедурою G, у нечітку змінну, тобто сформувати відповідну нечітку множину.

Щоб уникнути великої кількості символів:

– символ β використовують як для назви самої змінної, так і для всіх її значень;

– для позначення нечіткої множини і її назви користуються одним символом β, наприклад, терм "молодий", що є значенням лінгвістичної змінної b = "вік", одночасно є і нечіткою множиною M ("молодий").

Присвоєння декількох значень символам припускає, що контекст дозволяє робити можливі невизначеності.

Приклад 15.1

Нехай експерт визначає товщину виробу, за допомогою поняття "мала товщина", "середня товщина" і "велика товщина", при цьому мінімальна товщина дорівнює 10 мм, а максимальна – 80 мм.

Формалізація такого опису може бути проведена за допомогою наступної лінгвістичної змінної < β, T, X, G, M>, де

- β – товщина виробу;

- T – {"мала товщина", "середня товщина", "велика товщина"};
- X – [10, 80];
- G – процедура утворення нових термів за допомогою зв'язувань "і", "або" і модифікаторів типу "дуже", "не", "злегка" і ін. Наприклад, "мала або середня товщина", "дуже мала товщина" і ін.;
- M – процедура завдання на X = [10, 80] нечітких підмножин A_1="мала товщина", A_2 = "середня товщина", A_3="велика товщина", а також нечітких множин для термів з G(T) відповідно до правил трансляції нечітких зв'язувань і модифікаторів "і", "або", "не", "дуже", "злегка" і ін. операції над нечіткими множинами виду: $A \cup C$, $A \cap C$, $\bar{A}$, CON $A = A^2$, DIL $A = A^{0,5}$ і ін.

Разом із розглянутими вище базовими значеннями лінгвістичної змінної "товщина" (T={"мала товщина", "середня товщина", "велика товщина"}) існують можливі значення, що залежать від області визначення X. У даному випадку значення лінгвістичної змінної "товщина виробу" можуть бути визначені як "близько 20 мм", "близько 50 мм", "близько 70 мм", тобто у вигляді нечітких чисел.

Функції приналежності окремих значень нечіткої змінної представлено на рис. 15.1 та 15.2.

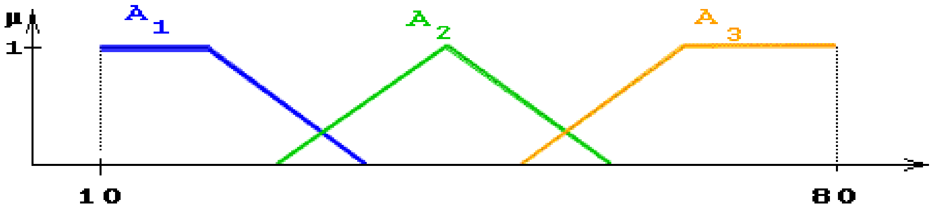


Рисунок 15.1 – Функції приналежності нечітких множин: "мала товщина" = A_1 , "середня товщина"= A_2, " велика товщина"= A_3

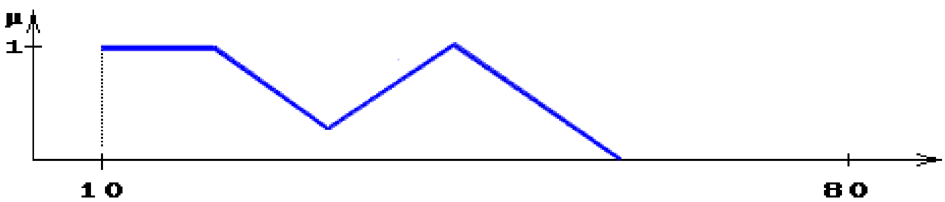


Рисунок 15.2 – Функція приналежності: нечітка множина "мала чи середня товщина" = $A_1 \cup A_2$

15.2 Нечіткі висловлення і нечіткі моделі систем

Нечіткими висловленнями будемо називати висловлення наступного виду:

1. Висловлення типу:

$$<\beta \in \beta' >, \tag{15.3}$$

де β – найменування лінгвістичної змінної,

β' – її значення, якому відповідає нечітка множина на універсальній множині X. Наприклад, висловлення <тиск великий> припускає, що лінгвістичній змінній "тиск" надається значення "великий", для якого на універсальній множині X змінної "тиск" визначена, відповідно даному значенню "великий", нечітка множина.

2. Висловлення

$$<\beta \in m\beta'>, \qquad (15.4)$$

де m – модифікатор, якому відповідають слова "ДУЖЕ", "БІЛЬШ-МЕНШ", "НАБАГАТО БІЛЬШЕ" і ін. Наприклад: <тиск дуже великий>, <швидкість набагато більше середньої> і ін.

3. Складні висловлення, утворені з висловлень видів 1. і 2. і союзів "І", "АБО", "ЯКЩО.., ТОДІ...", "ЯКЩО.., ТОДІ.., ІНАКШЕ".

Висловлення на множині значень фіксованої лінгвістичної змінної.

Якщо значення фіксованої лінгвістичної змінної відповідають нечітким множинам однієї універсальної множини X, можна ототожнювати модифікатори "дуже" чи "не" з операціями "CON" і "доповнення", а союзи "І", "АБО" з операціями "перетинання" і "об'єднання" над нечіткими множинами.

Для ілюстрації поняття лінгвістичної змінної ми, як *приклад*,. розглядали лінгвістичну змінну "товщина виробу" з базовою терм-множиною T = {"мала", "середня", "велика"}. При цьому на X = [10, 80] ми визначили нечіткі множини A_1, A_2, A_3, що відповідають базовим значенням: "мала", "середня", "велика".

У цьому випадку висловлюванню <товщина виробу дуже мала> відповідає нечітка множина CONA = A2; висловленню <товщина виробу не велика або середня> – нечітка множина $A_2 \cup \overline{A_3}$; висловленню <товщина виробу не мала і не велика> $\overline{A_2} \cup \overline{A_1}$.

Загальна структура контролера, що використовує нечітку логіку, показана на рис.15.3. Вона містить у своєму складі наступні складові:

- блок фазіфікації;
- базу знань;
- блок рішень;
- блок дефазіфікації.

Блок фазіфікації перетворює чіткі величини, виміряні на виході об'єкта керування, у нечіткі величини, що описані лінгвістичними змінними в базі знань.

Блок рішень використовує нечіткі умовні (if – then) правила, закладені в базі знань, для перетворення нечітких вхідних даних у необхідні керуючі впливи, що носять також нечіткий характер.

Блок дефазіфікації перетворює нечіткі дані з виходу блоку рішень у чітку величину, що використовується для керування об'єктом.

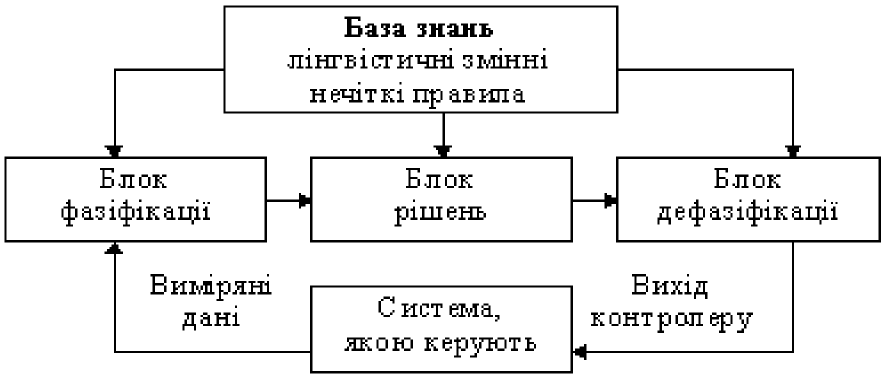


Рисунок 15.3 – Загальна структура нечіткого мікроконтролера

Всі системи з нечіткою логікою функціонують за одним принципом: показання вимірювальних приладів: фазифікуються (перетворюються в нечіткий формат), обробляються, дефазифікуються й у вигляді звичайних сигналів подаються на виконавчі пристрої.

Приклад 15.3

Розглянемо задачу системи менеджменту – оцінка роботи підрозділу організаційної структури торгового підприємства. В основу оцінки покладемо дві основні характеристики:

- оцінка процесу обслуговування (ПРОЦЕС);
- оцінка результатів роботи підрозділу (РЕЗУЛЬТАТ).

Для лінгвістичної змінної РЕЗУЛЬТАТ визначимо наступні терми:

- відмінний,
- хороший,
- середній,
- поганий,
- від'ємний.

Оцінка такого результату в кількісних показниках може виражатися в різних показниках: обсяг товарообороту, обсяг прибутку, рентабельність продажів, тощо. Для нашого прикладу візьмемо в якості оцінюваного показника темп зростання товарообігу. Тоді змінна РЕЗУЛЬТАТ може приймати значення [-100, 100] у відсотках до попереднього періоду. Для кожного терм-значення лінгвістичної змінної РЕЗУЛЬТАТ необхідно визначити функцію приналежності показника темпу зростання товарообігу до відповідного терму. Ступінь приналежності вкажемо відповідними графіками функції приналежності, які зображені на рис. 15.4.

Відповідно до наведених графіків значення функції приналежності до термів лінгвістичної змінної РЕЗУЛЬТАТ темп зростання товарообігу, що дорівнює 12% складає:

- 0,85 до терму «середній»;
- 0,4 до терму «хороший».

Для лінгвістичної змінної ПРОЦЕС визначимо показники, на основі яких можна оцінювати роботу підрозділу торгового підприємства:

- якість обслуговування,

- оперативність,
- гнучкість асортименту.

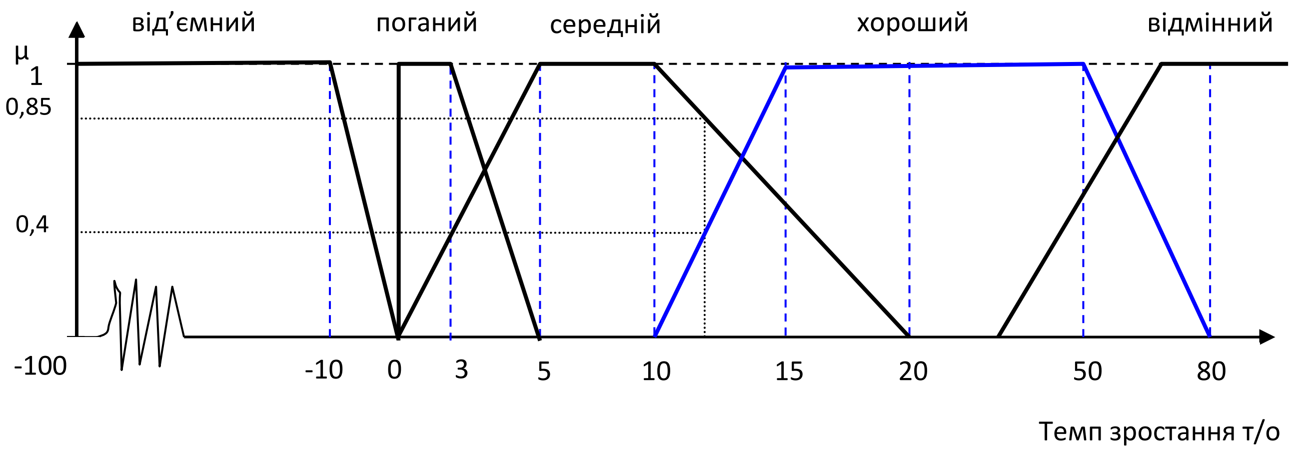


Рисунок 15.4 – Функції приналежності термів змінної РЕЗУЛЬТАТ

Відповідно до наведених графіків значення функції приналежності до термів лінгвістичної змінної РЕЗУЛЬТАТ темп зростання товарообігу, що дорівнює 12% складає:

- 0,85 до терму «середній»;
- 0,4 до терму «хороший».

Для лінгвістичної змінної ПРОЦЕС визначимо показники, на основі яких можна оцінювати роботу підрозділу торгового підприємства:

- якість обслуговування,
- оперативність,
- гнучкість асортименту.

З метою оцінювання візьмемо показник оперативність процесу обслуговування. В такому випадку в якості термів лінгвістичної змінної ПРОЦЕС визначимо наступні:

- висока,
- достатня,
- низька.

Значення показника будемо приймати на основі експертного оцінювання, тобто експерти визначають до якого терму належить значення змінної ПРОЦЕС.

Тепер задамо вихідну змінну, що саме і визначає оцінку роботи підрозділу організаційної структури торгового підприємства. Вона може містити терми:

- відмінно,
- добре,
- задовільно,
- незадовільно.

Зв'язок між входом та виходом запам'ятовується в таблиці нечітких правил.

Таблиця 15.1 – Таблиця нечітких правил

		Значення лінгвістичної змінної РЕЗУЛЬТАТ				
		від’ємний	поганий	середній	хороший	відмінний
Значення лінгвістичної змінної ПРОЦЕС	низка	Незадо-вільно	Незадо-вільно	Задо-вільно	Добре	Добре
	достатня	Незадо-вільно	Задо-вільно	Добре	Добре	Відмінно
	висока	Незадо-вільно	Задо-вільно	Добре	Відмінно	Відмінно

Кожний запис у даній таблиці відповідає своєму нечіткому правилу, наприклад: Якщо результат роботи підрозділу «середній» і процес має оцінку «достатній», тоді оцінка роботи підрозділу «Добре».

Таким чином, оцінка роботи підрозділу з використанням нечіткої логіки буде працювати за наступним принципом: дані про діяльність будуть фазіфіковані, оброблені згідно табличних правил, дефазіфіковані і дані, що отримані, у вигляді керуючих сигналів надходять до менеджменту підприємства.

15.3 Нечітка логіка в Matlab

Fuzzy logic toolbox – вбудована в Matlab сукупність функцій, що містить набір засобів, які дозволяють:

- створювати і редагувати нечіткі системи всередині середовища Matlab;
- вбудовувати нечітку підсистему в SimuLink (поставляється з Matlab) при моделюванні загальної системи;
- побудувати нечітку систему в Matlab у вигляді процедури, що викликається з програми, яка написана на мові С.

Даний набір інструментів забезпечує три категорії інструментальних засобів програмування нечітких систем:

- функції командного рядка (command line functions);
- графічний інтерактивний інтерфейс;
- використання вбудованих блоків SimuLink.

Перша категорія – готові функції, які можна викликати відразу з командного рядка Matlab. Практично усі вони є м-файли, що містять послідовність виразів, що виконують спеціалізований нечіткий алгоритм. Для перегляду вихідного коду функцій необхідно набрати в командному рядку:

type ім'я_функції.

Крім того, Matlab дозволяє їх модифікувати шляхом копіювання і перейменування відповідного файлу та наступного його редагування. Таким чином, нечіткий набір інструментів є розширеним власними функціями.

Друга категорія дозволяє отримати доступ до тих самих функцій через графічний користувальницький інтерфейс, за допомогою якого набагато зручніше конструювати й аналізувати нечіткі системи.

Третя категорія – моделювання в середовищі SimuLink. Тут підсистеми представляються у виді блоків – можна з'єднати будь-яким чином і відразу отримати результати.

У Matlab є багато вбудованих функцій приналежності, зокрема:

- сигмоїдальна;
- двостороння сигмоїдальна;
- гаусова;
- дзвоноподібної форми;
- S-функція приналежності;
- Z-функція приналежності;
- трапецієподібна;
- трикутна й ін.

Усі дії над нечіткими числами задаються мінімальним набором функцій і відбуваються всередині програми. Таким чином, користувачу необов'язково вивчати усі тонкощі теорії нечітких множин, достатньо лише визначити усі вхідні і вихідні змінні і задати таблицю правил, а решту роботи робить Matlab. Дефазіфікація виконується в один з п'ятьох методів, зазначених програмістом. Крім того, можна вивести на екран відповідно до введених правил результуючі поверхні керування в залежності від комбінації входів, схему отриманої нечіткої програми, і це лише мала частина всіх можливостей даного набору інструментів.

Переваги нечітких систем

Коротко перелічимо відмітні переваги fuzzy-систем у порівнянні з іншими:

- можливість оперувати вхідними даними, заданими нечітко: наприклад, що безупинно змінюються в часі значення (динамічні задачі), значення, що неможливо задати однозначно (результати статистичних опитувань, рекламні компанії і т.д.);
- можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінки і порівняння: оперування критеріями "більшість", "можливе", переважно" і т.д.;
- можливість проведення якісних оцінок як вхідних даних, так і виведених результатів: ви оперуєте не тільки власне значеннями даних, але їхнім ступенем вірогідності (не плутати з імовірністю!) і її розподілом;
- можливість проведення швидкого моделювання складних динамічних систем і їхній порівняльний аналіз із заданим ступенем точності: оперуючи принципами поведінки системи, описаними fuzzy-методами, ви по-перше, не витрачаєте багато часу на з'ясування точних значень змінних і складання рівнянь, що їх описують, по-друге, можете оцінити різні варіанти вихідних значень.

Застосування нечітких систем

Що стосується вітчизняного ринку комерційних систем на основі нечіткої логіки, то його формування почалося в середині 1995 року. Найбільш популярні в замовників наступні пакети:

- CubiCalc 2.0 RTC – одна з найбільш могутніх комерційних експертних систем на основі нечіткої логіки, що дозволяє створювати власні прикладні експертні системи;
- CubiQuick – дешева <університетська> версія пакета CubiCalc ;
- RuleMaker – програма автоматичного витягу нечітких правил із вхідних даних;
- FuziCalc – електронна таблиця з нечіткими полями, що дозволяє робити швидкі оцінки при неточно відомих даних без нагромадження похибки;
- OWL – пакет, що містить вихідні тексти усіх відомих видів нейронних мереж, нечіткої асоціативної пам'яті і т.д.

Основними споживачами нечіткої логіки на ринку СНД є банкіри і фінансисти, а також фахівці в області політичного й економічного аналізу. Вони використовують CubiCalc для створення моделей різних економічних, політичних, біржових ситуацій. Що ж стосується легкого в освоєнні пакета FuziCalc, то він зайняв своє місце на комп'ютерах великих банкірів і фахівців з надзвичайних ситуацій – тобто тих, для кого найбільше важлива швидкість проведення розрахунків в умовах неповноти і неточності вхідної інформації. Однак можна з упевненістю сказати, що епоха розквіту прикладного використання нечіткої логіки на вітчизняному ринку ще попереду.

Сьогодні елементи нечіткої логіки можна знайти в десятках промислових виробів – від систем керування електропоїздами і бойовими вертольотами до пилососів і пральних машин. Рекламні кампанії багатьох фірм (переважно японських) підносять успіхи у використанні нечіткої логіки як особливу конкурентну перевагу. Без застосування нечіткої логіки немислимі сучасні ситуаційні центри керівників західних країн, у яких приймаються ключові політичні рішення і моделюються всілякі кризові ситуації. Одним із вражаючих прикладів масштабного застосування нечіткої логіки стало комплексне моделювання системи охорони здоров'я і соціального забезпечення Великобританії (National Health Service – NHS), що вперше дозволило точно оцінити й оптимізувати витрати на соціальні нестатки.

Не обійшли засоби нечіткої логіки і програмні системи, що обслуговують великий бізнес. Першими, зрозуміло, були фінансисти, задачі яких вимагають щоденного прийняття правильних рішень у складних умовах непередбаченого ринку. Перший рік використання системи Fuji Bank приносив банку в середньому $770000 на місяць (і це тільки офіційно оголошений прибуток !).

Слідом за фінансистами, стурбовані успіхами японців і втратою стратегічної ініціативи, когнітивними нечіткими схемами зацікавилися промислові гіганти США. Motorola, General Electric, Otis Elevator, Pacific Gas & Electric, Ford і інші на початку 90-х почали інвестувати в розробку виробів, що використовують нечітку логіку. Маючи солідну фінансову "підтримку", фірми, що спеціалізуються на нечіткій логіці, одержали можливість адаптувати свої розробки для широкого кола застосувань. "Зброя еліти" вийшла на масовий ринок.

Серед лідерів нового ринку виділяється американська компанія Hyper Logic, заснована в 1987 році Фредом Уоткинсом (Fred Watkins). Спочатку компанія спеціалізувалася на нейронних мережах, однак незабаром цілком сконцентрувалася на нечіткій логіці. Недавно вийшла на ринок друга версія пакета CubiCalc фірми HyperLogic, яка є однією з найбільш могутніх експертних систем на основі нечіткої логіки. Пакет містить інтерактивну оболонку для розробки нечітких експертних систем і систем керування, а також run-time модуль, що дозволяє оформляти створені користувачем системи у виді окремих програм.

Крім Hyper Logic серед "патріархів" нечіткої логіки можна також назвати такі фірми як IntelligenceWare, InfraLogic, Aptronix. Усього ж на світовому ринку представлено більш 100 пакетів, які тим чи іншим видом використовують нечітку логіку. У трьох десятках СУБД реалізована функція нечіткого пошуку. Власні програми на основі нечіткої логіки анонсували такі гіганти як IBM, Oracle і інші.

На принципах нечіткої логіки побудований і один з російських програмних продуктів – відомий пакет "Бізнес-прогноз". Призначення цього пакета – оцінка ризиків і потенційної прибутковості різних бізнес-планів, інвестиційних проектів і просто ідей щодо розвитку бізнесу. "Ведучи" користувача по сценарію його задуму, програма задає ряд питань, що допускають як точні кількісні відповіді, так і наближені якісні оцінки – типу "малоймовірно", "ступінь ризику високий" і т.д. Узагальнивши всю отриману інформацію у виді єдиної схеми бізнесу-проекту, програма не тільки виносить остаточний вердикт про ризикованість проекту й очікуваних прибутків, але і вказує критичні точки і слабкі місця в авторському задумі. Від аналогічних іноземних пакетів "Бізнес-прогноз" відрізняється простотою, дешевиною і, зрозуміло, російськомовним інтерфейсом. Утім, цілком очевидно, що програма "Бізнес-прогноз" – лише перша ластівка, за якою неминуче підуть нові розробки вчених СНД.

Контрольні запитання і завдання:

1. Надайте визначення нечіткої змінної.
2. Що називають нечіткими висловленнями?
3. Охарактеризуйте загальну структуру контролера, що використовує нечітку логіку (рис.15.3).
4. Опишить можливості сукупністі функцій Fuzzy logic toolbox, які вбудовані в Matlab.
5. У чому полягають переваги нечітких систем?
6. Які пакети комерційних систем на основі нечіткої логіки є найбільш популярними у вітчизняних замовників?

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Структура контролера, що використовує нечітку логіку складається з :
   а) блок фазіфікації;базу знань;блок рішень; блок дефазіфікації
   б) базу знань;блок рішень
   в) блок фазіфікації;базу знань;блок рішень; блок дефазіфікації

   Оберіть найбільш правильну відповідь

2. Вбудована підсистема Fuzzy logic toolbox Matlab включає сукупність функцій, що дозволяють:
   а) побудову нечітких фінкцій приналежності;
   б) побудову нечітких лінгвістичних даних;
   в) побудову ечітку систему в Matlab у вигляді процедури
3. Лінгвістичною змінною називається набір з:
   а) одного елементу;
   б) двох елементів;
   в) трьох елементів;
   г) чотирьох елементів.
4. Нечіткою змінною називається набір з:
   а) одного елементу;
   б) двох елементів;
   в) трьох елементів;
   г) чотирьох елементів.

ТЕМА 16. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ НЕЧІТКОМУ ВІДНОШЕННІ ПЕРЕВАГИ

16.1 Загальні положення відношення переваги

16.2 Нечіткі відношення переваги

16.3 Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

16.4 Багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги

16.1 Загальні положення відношення переваги

Зазвичай при моделюванні реальних систем скоріше правилом, ніж винятком, є ситуація, коли у особи, що приймає рішення (ОПР), або експертів немає достатньо чіткого і обґрунтованого уявлення про найбільш бажаних альтернативах і можливих альтернативах вибору тієї чи іншої з них.

Саме тому в подібних випадках ОПР в якості ступеня своєї переконаності в перевагах щодо множини альтернатив зазвичай вказує їх порівняльну оцінку. Ця оцінка може бути виражена в балах або за допомогою деякого числа з інтервалу [0,1].

В результаті такого порівняння кожній парі (x, y) альтернатив ставиться у відповідність деяке число, за допомогою якого характеризується ступінь виконання відношення переваги xRy при їх по парному порівнянні за якимсь попередньо обраним критерієм. Такий спосіб опису відношення переваги дозволяє зробити модель системи більш адекватною реальній ситуації.

Для того, щоб забезпечити достатню з точки зору математики формалізованість завдання і більш чітко визначитися з джерелами і характером уподобання, попередньо розглядають ті характерні властивості та якості альтернатив, а також ті можливі результати їх вибору, які саме і дозволяють провести їх по парне порівняння і відповідно виявити відношення переваги.

Розглянемо властивості нечітких відношень переваги, на які спираються існуючі підходи до вирішення задач вибору альтернатив в теорії управління і в теорії прийнятті рішень.

Визначимо чітку операцію порівняння R альтернатив між собою. Нехай R – чітке відношення переваги в деякій множині X допустимих альтернатив. Це означає, що відносно будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ може бути висловлено одну з таких тверджень:

а) $\mathrm{x} \succ= \mathrm{y}$, тобто x не гірше y. В цьому випадку $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{R}$;

б) $\mathrm{y} \succ= \mathrm{x}$, тобто y не гірше X. В цьому випадку $(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in \mathrm{R}$;

в) x та y непорівнянні між собою з розглядуваного критерію. В цьому випадку $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \notin \mathrm{R}$ і $(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \notin \mathrm{R}$.

Наявність інформації в такій формі вже дозволяє звузити клас раціональних виборів, включивши до нього лише ті альтернативи X, які не домінуються жодною іншою альтернативою з множини X, яка розглядається.

Для того, щоб зрозуміти, які альтернативи слід вважати недомінованими, відокремимо в загальній структурі відношення переваги R наступні два нові відношення:

а) відношення строгої переваги R^S;

б) відношення байдужості R^I.

При цьому за визначенням вважатимемо, що альтернатива x домінує альтернативу y, тобто x є строго краще ніж y, якщо одночасно виконується умова $y \succ x$ и не виконується умова $y \not\succeq x$. Сукупність всіх пар (x, y), що задовольняють цій умові, і називатимемо **відношенням строгої переваги** R^S на множині X. Оскільки в цьому випадку виконується умова

$$(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R, \tag{16.1}$$

то відношення строгої переваги R^S може бути записане у вигляді

$$R^S = R \setminus R^{-1}. \tag{16.2}$$

Відповідно **відношення байдужості** R^I визначається таким чином: пара альтернатив x та y перебувають у відношенні байдужості, тобто $(x, y) \in R^1$, якщо не виконується ні перевага $y \not\succeq x$, ні перевага $x \not\succeq y$, або обидві переваги виконуються одночасно. Іншими словами, $(x, y) \in R^I$, коли наявної про цю пару інформації у формі відношення переваги недостатньо для того, щоб ОПР могла зробити обґрунтований вибір між альтернативами x та y.

Відношення байдужості R^I може бути записане у наступній формі:

$$R^I = (X \times X) \setminus (R \cup R^{-1}) \cup (R \cap R^{-1}). \tag{16.3}$$

Якщо пара $(x, y) \in R^S$, говоритимемо, що альтернатива x домінує альтернативу y, тобто $x \not\succeq y$.

Альтернативу $x \in R$ називатимемо **недомінованою** в множині X^R, якщо $(y, x) \notin R^S$, $\forall y \in X$.

Таким чином, інформація у формі відношення переваги R дозволяє звузити клас раціональних виборів в множині X до множини недомінованих альтернатив вигляду

$$X^{НД} = \{x : x \in X, (y, x) \in R \setminus R^{-1}, \forall y \in X\}. \tag{16.4}$$

Вважаємо за необхідне зробити при цьому два наступні принципові зауваження.

По-перше, вибір недомінованих альтернатив в задачах прийняття рішень є раціональним лише в межах наявної інформації. Надходження додаткової інформації може суттєво змінити уявлення про характер відношення переваги між альтернативами.

По-друге, справедливість отриманого висновку про домінованість або недомінованість альтернатив з даної множини X буде застосовна лише для даного відношення переваги R. Для іншого відношення R_1 на тій же множині X недомінованими можуть опинитися абсолютно інші альтернативи.

Дійсно, при виборі, наприклад, з множини студентів даної групи найбільш переважних кандидатів на олімпіаду по математиці або на змагання з боксу недомінованими, скоріш за все, виявляться абсолютно різні люди.

Іншими словами, раціональний вибір недомінованих альтернатив фактично твориться на множині (X, R).

16.2 Нечіткі відношення переваги

Нечіткі відношення переваги відрізняються від звичайних тим, що міра переваги альтернативи x відносно альтернативи y за критерієм, що виражає відношення переваги R на множині альтернатив X, будемо описувати за допомогою функції приналежності $\mu_R : X \times X \to [0,1]$. Цій функції притаманна властивість рефлексивності, тобто $\mu_R(x,x) = 1$ при будь-яких $x \in X$. Це означає цілком природний факт, що будь-яка альтернатива x не може бути гіршою за саму себе.

Таким чином, величина $\mu_R(x,y)$ виражає міру виконання переваги "x не гірше за y". Якщо $\mu_R(x,y)$=0, то це означає або, по-перше, що з деяким позитивним ступенем виконана зворотня перевага $y \succcurlyeq x$, тобто що y не гірше за x, за умови $\mu_R(y,x)$>0, або, по-друге, що альтернативи x і y за критерієм. Що розглядається, є непорівняними між собою ні з яким ступенем.

За аналогією із звичайними відношеннями переваги введемо такі нечіткі відношення переваги:

а) **нечітке відношення байдужості** R^I або μ_R^I, яке визначається, як і в попередньому випадку, формулою

$$R^I = (X \times X) \setminus (R \bigcup R^{-1}) \bigcup (R \bigcap R^{-1}), \tag{16.5}$$

де R – відношення переваги "x не гірше за y";

R^{-1} – зворотне відносно нього відношення переваги "y не гірше за x", тобто R^I показує наскільки альтернативи можна порівнювати;

б**) нечітке відношення квазіеквівалентності** R^E або μ_R^E, яке визначається формулою

$$R^E = R \bigcap R^{-1}, \tag{16.6}$$

де R – відношення переваги "x не гірше за y", яке відповідає тим чи іншим чином обраним ознакам і критеріям їх виконання;

R^{-1} – зворотне відносно нього відношення переваги;

в) **нечітке відношення строгої переваги** R^S або μ_R^S, яке в певному розумінні є узагальненням звичайного відношення строгої переваги і також визначається виразом

$$R^S = R \setminus R^{-1}, \tag{16.7}$$

де R – відношення переваги "x не гірше за y" на розглядуваній множині альтернатив X;

R^{-1} – зворотне відносно нього відношення переваги "y не гірше за x".

Нечіткість введених різновидів відношень переваги будемо характеризувати відповідними функціями приналежності μ_R^I, μ_R^E і μ_R^S. Для їхнього обчислення використовуються такі вирази, які випливають з логіки визначення кожного відповідного нечіткого відношення переваги:

- для нечіткого відношення байдужості

$$\mu_R^I = \max[\{1 - \max\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}\}; \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}]; \tag{16.8}$$

- для нечіткого відношення квазіеквівалентності

$$\mu_R^E = \min\{\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)\}; \tag{16.9}$$

- для нечіткого відношення строгої переваги

$$\mu_R^S = \mu_R(x,y) - \mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(x,y) - \mu_R(y,x), \tag{16.10}$$

якщо $\mu_R(x,y) > \mu_R(y,x)$

$$\text{і } \mu_R^S = 0, \tag{16.11}$$

- у протилежному випадку.

Справді, неважко впевнитись, що кожен з цих виразів відповідає наведеним вище правилам отримання відповідно R^I, R^E и R^S. Саме ці формули і використовуються для обчислення значень функцій приналежності нечіткої множини (X ,R) в процесі підготовки і прийняття управлінського рішення. Природно, якщо це рішення являє собою вибір найкращої у певному розумінні альтернативи на основі конкретного відношення переваги R із заданої нечіткої множини альтернатив X .

16.3 Нечітка підмножина недомінованих альтернатив

Одним з досить поширених класів задач нечіткої логіки є завдання раціонального вибору альтернатив з певної множини, на якій задано деяке нечітке відношення переваги *R* з функцією приналежності $\mu_R : X \times X \to [0,1]$. Такі завдання є досить типовими як в техніці, економіці, соціології, тощо, наприклад, у практиці підготовки, прийняття та ухвалення рішень, так і в найрізноманітніших сферах життя і діяльності. Більше того, завдання подібного роду кожній людині доводиться вирішувати повсякденно, звичайно на інтуїтивному рівні, тобто навіть не усвідомлюючи цього.

Дійсно, при виборі того чи іншого варіанта з множини можливостей нечіткість відношення переваги між ними зумовлена як суб’єктивною їх оцінкою, так і наявністю кількох, часто суперечливих критеріїв. Тому для характеристики міри нечіткості переваги і вводиться функція приналежності μ_R. Оскільки вона повністю визначає відношення переваги *R*, надалі, якщо це не створюватиме додаткових труднощів, для його позначення вживатимемо як рівноправні і символ *R*, і символ μ_R.

Розглянемо один з ефективних підходів до розв’язання задач подібного класу. Вважатимемо, що в разі, коли інформація про об'єкт логічного аналізу описана у формі звичайного відношення переваги, то раціональним розв’язком задачі є вибір з множини X підмножини недомінованих альтернатив.

Застосуємо цей підхід до задачі прийняття рішень при нечітко описаному відношенні переваги *R* на вихідній множині альтернатив:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \tag{16.12}$$

Нехай μ_R – нечітке відношення нестрогої переваги на множині *X*, а μ_R^S – відповідне μ_R нечітке відношення строгої переваги R^S. Як було показано раніше, $R^S = R \backslash R^{-1}$, де R^{-1} – зворотне по відношенню до *R* відношення.

Визначимо підмножину недомінованих альтернатив в множині (X, μ_R). Оскільки вихідне відношення переваги *R* описане нечітко, то цілком природно очікувати, що і відповідна шукана підмножина недомінованих альтернатив також виявиться нечіткою. Сама процедура знаходження підмножини недомінованих альтернатив спирається на наступні міркування.

За визначенням нечіткого відношення строгої переваги, для будь-якої пари альтернатив $x, y \in X$ величина $\mu_R^S(x, y)$ визначає ту міру, якою альтернатива *y* домінується іншою альтернативою *x*. Отже при деякому фіксованому значенні $y_0 \in X$ функцію $\mu_R^S(x, y_0)$, визначену на базовій множині *X*, можна інтерпретувати як функцію переваги нечіткої підмножини R^S всіх альтернатив, які строго домінують альтернативу y_0 (тобто є строго кращим за y_0).

Нехай, наприклад, значення функції приналежності деякої альтернативи x_0 цієї множини дорівнює 0,3. Це означає, що x_0 домінує альтернативу y_0 зі ступенем 0,3. Множина всіх альтернатив *x*, які не домінуються альтернативою y_0, є доповненням в X введеного нечіткого відношення строгої переваги $\mu_R^S(y, x)$.

Відповідно до визначення доповнення ця нова нечітка множина описується функцією приналежності вигляду

$$1 - \mu_R^S(y, x). \tag{16.13}$$

Тому для виділення у початковій базовій множині X шуканої підмножини всіх альтернатив, кожна з яких не домінується жодною іншою альтернативою з *X*, необхідно знайти перетин нечіткої множини виду (16.13) по всіх $y \in X$. Цей перетин і називають **нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив** і позначають символом $X^{НД}(x)$ або $\mu_R^{НД}(x)$.

Відповідно до визначення операції перетину нечітких множин отримаємо

$$\mu_R^{НД}(x) = \min_{y \in X} \left\{1 - \mu_R^S(y, x)\right\}, \ \forall x \in X \tag{16.14}$$

або, цілком природно,

$$\mu_R^{НД}(x) = 1 - \sup_{y \in X} \left\{\mu_R^S(y, x)\right\}, \forall x \in X. \tag{16.15}$$

Нехай X є деякою базовою множиною альтернатив, на якій задано нечітке відношення переваги μ_R. Тоді **нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив** множини $\left(X,\mu_R\right)$ називається підмножина, яка описується функцією приналежності вигляду (16.15).

Конкретні значення $\mu_R^{НД}(x)$ є тією мірою, якою альтернатива x не домінується жодною іншою з альтернатив множини X. Нехай, наприклад, для певної фіксованої альтернативи x_0 це значення $\mu_R^{НД}(x_0)=\alpha\le 1$. У цьому випадку альтернатива x_0 може домінуватись деякими іншими альтернативами з множини *X*, але зі ступенем, що не перевищує величини $1-\alpha$ При цьому

$$\sup_{y\in X}\left\{\mu_R^S(y,x_0)\right\}=1-\alpha\,, \qquad (16.16)$$

і отже

$$\mu_R^S(y,x_0)\le 1-\alpha \quad \forall y\in X\,. \qquad (16.17)$$

Використовуючи визначення нечіткого відношення строгої переваги, можна показати, що

$$\sup_{y\in X}\left\{\mu_R^S(y,x)\right\}=\sup_{y\in X}\left\{\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right\}\ \forall x\in X\,, \qquad (16.18)$$

де *x* – довільно вибрана альтернатива.

Для цього введемо дві допоміжні множини

$$Y_1(x)=\{y\setminus y\in X;\mu_R(y,x)>\mu_R(x,y)\}, \qquad (16.19)$$

$$Y_2(x)=\{y\setminus y\in X;\mu_R(y,x)\le\mu_R(x,y)\}. \qquad (16.20)$$

Очевидно, що $Y_1(x)\cup Y_2(x)=X$ для будь-якого *x:*

$$\sup_{y\in X}\left\{\mu_R^S(y,x)\right\}=\max\left\{\sup_{y\in Y_1(x)}\mu_R^S(y,x);\ \sup_{y\in Y_2(x)}\mu_R^S(y,x)\right\}= \qquad (16.21)$$

$$\max\{\sup_{y\in Y_1(x)}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)];\ \sup_{y\in Y_2(x)}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)];\}= \qquad (16.22)$$

$$=\sup_{y\in X}\left\{\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)\right\}.$$

Отже

$$\mu_R^{НД}(x)=1-\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)] \qquad (16.23)$$

Вираз (16.23) може розглядатися як спосіб обробки початкової нечіткої інформації, заданої у формі нечіткого відношення переваги μ_R, з метою виділення в базовій множині X шуканої підмножини недомінованих альтернатив.

Оскільки величина $\mu_R^{НД}(x)$ фактично є ступенем недомінованості альтернативи *x*, то очевидно, що раціональним в умовах наявної нечіткої інформації природно вважати раціональним вибір альтернатив, яким, по можливості, притаманний великий ступінь приналежності множині $\mu_R^{НД}(x)$, тобто тих альтернатив, які мають значення, по можливості якомога ближчі до величини, рівної

$$\sup_{x\in X}\mu_R^{НД}(x)=1-\inf_{x\in X}\sup_{y\in X}[\mu_R(y,x)-\mu_R(x,y)]. \qquad (16.24)$$

Ті альтернативи, які в точності дають цю величину, тобто елементи множини

$$X^{НД}=\{x\setminus x\in X, \mu_R^{НД}(x)=\sup_{z\in X}\mu_R^{НД}(z)\}, \qquad (16.25)$$

називатимемо **максимальними недомінованими альтернативами множини (X,μ_R).**

Приклад 16.1

Нехай є деяка скінченна множина, що містить альтернативи $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ і нехай на цій множині задано нечітке відношення переваги *R*, яке характеризується матрицею

$$\mu_R(x_i,x_j)=\begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ x_2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ x_3 & 0{,}1 & 0{,}6 & 1 & 0{,}3 \\ x_4 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

і нехай необхідно на множині (X,μ_R) визначити множину максимальних недомінованих альтернатив.

Скористаємося визначенням функції приналежності нечіткого відношення строгої переваги

$$\mu_R^S(x,y)=\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x).$$

Відповідно до нього шляхом послідовного віднімання з кожного елементу матриці $\mu_R(x_i,x_j)$ симетричного йому елемента щодо головної діагоналі матриці, отримаємо матрицю

$$\mu_R^S(x_i,x_j)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що при цьому *ij-й* елемент матриці $\mu_R^S(x_i,x_j)$ дорівнює отриманій різниці, якщо ця різниця виявляється більше нуля, і дорівнює нулю у протилежному разі. Потім, користуючись правилом обчислення, знайдемо шукану множину недомінованих альтернатив, послідовно віднімаючи з одиниці значення найбільшого елемента в кожному стовпці матриці $\mu_R^S(x_i,x_j)$. Отримаємо

$$\mu_R^{НД}(x_i)=\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}5 \end{matrix}.$$

Звідси видно, що найбільший ступінь недомінованості, рівний 0,8, має альтернатива x_3. Тому вибір саме цієї альтернативи як розв'язок початкової задачі і повинен вважатися найбільш раціональним в рамках даного підходу.

16.4 Багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги

В теорії прийняття рішень нерідко зустрічається ситуація, коли необхідно побудувати множину $X^{НД}\{x\}$ недомінованих альтернатив деякої базової множини X з урахуванням існування кількох відношень переваги між альтернативами. В якості одного з основних підходів до вирішення таких завдань зазвичай використовується прийом знаходження згортки цих відношень переваги за критеріями, які мають різну ступінь важливості.

Припустимо, що на множині альтернатив X задана деяка сукупність з m ознак, що характеризують кожну альтернативу. Нехай інформація про результати попарного порівняння альтернатив за кожній $j-$ознаці представлена у формі відповідного відношення переваги R_j. Спочатку будемо вважати всі ці відношення мають однакову важливість. Таким чином, на множині Xє m відношень переваги, і на підставі цієї інформації необхідно вибрати найкращу альтернативу x. Представляється природним, що вибір повинен здійснюватися з множини $\{x, R_1, R_2, ..., R_m\}$.

Будемо розглядати ситуацію, коли відношення переваги R_j характеризуються заданими функціями корисності $f_j : X \to R$. При цьому значення кожної такої функції слід розуміти як числову оцінку альтернативи x за j-ю ознакою. Чим більшою виявляється величина оцінки $f_j(x)$, тим більшою степеню переваги за цією ознакою має альтернатива x. Завдання ж полягає в тому, щоб відшукати альтернативу, яка має найбільші оцінки за всіма ознаками даної їх сукупності. Це б дозволило вважати раціональним природний вибір такої альтернативи $x_0 \in X$, яка володіє наступною властивістю:

$$f_j(y) \geq f_j(x_0), j = \overline{1,m} \Rightarrow f_j(y) = f_j(x_0), j = \overline{1,m}. \tag{16.26}$$

Такі альтернативи прийнято називати ефективними. Отже, рішенням завдання вибору є множина всіх ефективних альтернатив. Кожна з цих функцій $f_j(x)$ описує звичайне відношення переваги R_j на множині X. Кожне з цих відношень може бути представлено в наступному вигляді:

$$R_j = \{(x, y) \mid x, y \in X, f_j(y) \geq f_j(x_0)\}. \tag{16.27}$$

Побудуємо перетин цих відношень

$$Q_1(x, y) = \bigcap_{j=1}^{m} R_j(x, y). \tag{16.28}$$

У цьому випадку множина всіх ефективних альтернатив в множині (X, Q_1) збігається з множиною ефективних альтернатив для всього набору функцій $f_j, j = \overline{1,m}$.

Таким чином, вихідна задача знаходження множини ефективних альтернатив по всіх відношеннях переваги R_j на множині X зводиться до відомої задачі знаходження множини недомінованих альтернатив $X^{\acute{I}\ddot{A}}\{x\}$ на множині (X, Q_1).

Оскільки всі R_j є звичайні (чіткі) відношення переваги, їх функції приналежності $\mu_j(x, y)$ можуть бути представлені у формі

$$\mu_j(x,y) = \begin{cases} 1, \ddot{y}\hat{e}\grave{u}\hat{\imath}\ (x, y) \in R_j; \\ 0, \ddot{y}\hat{e}\grave{u}\hat{\imath}\ (x, y) \notin R_j. \end{cases} \quad (16.29)$$

Тоді функція приналежності μ_{Q_1} перетину Q_1 цих відношень переваги визначається як

$$\mu_{Q_1}(x, y) = \min(\mu_1(x, y), \mu_2(x, y), ..., \mu_m(x, y)), \quad (16.30)$$

тобто аналогічно побудові згортки критеріїв f_j виду

$$F(x) = \min_{j=\overline{1,m}} w_j f_j, \quad (16.31)$$

яка зазвичай застосовується в багатокритеріальних задачах прийняття рішень. Числа w_j в цій згортки представляють собою коефіцієнти відносної важливості розглянутих критеріїв. В даному ж випадку все вони повинні бути рівні одиниці.

Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли розглядаються в задачі багатокритеріального вибору альтернатив відношення переваги R_j мають різну ступінь важливості. Слід зазначити, що в реальній практиці саме так найчастіше і буває. Дійсно, в процесі аналізу альтернатив за певними критеріями нерідко доводиться зустрічатися з виразом "при інших рівних умовах", яким характеризують такі відношення, ступінь значимості яких свідомо нижче вже розглянутих, по яких і відібрано деяке їх підмножина.

Різна ступінь важливості відношень переваги R_j: фактично означає різну важливість ознак, за якими здійснюється порівняння альтернатив. Її наявність вимагає використання в згортку (15.30) різних за значенням вагових коефіцієнті $\overline{1,m}$. Однак ми розглянемо більш широкий клас задач, припускаючи, що самі відношення переваги R_j описані нечітко. Іншими словами, їх функції приналежності $\mu_j(x, y)$ можуть приймати не тільки значення 0 або 1, але і будь-які проміжні значення з інтервалу [0,1].

В такому випадку згортка Q_1 вихідних відношень переваги R_j з урахуванням значень вагових коефіцієнтів $\overline{1,m}$ при умові, що $\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$, причому $\overline{1,m} \geq 0, j = \overline{1,m}$, має наступне значення функції приналежності:

$$\mu_{Q_1}(x,y) = \min(w_1\mu_1(x,y), w_2\mu_2(x,y), ..., w_m\mu_m(x,y)), \qquad (16.32)$$

яке фактично являє собою функцію приналежності нечіткого відношення переваги.

Оскільки Q_1 як деяке узагальнене відношення переваги, взагалі кажучи, не є рефлексивним і не дозволяє врахувати можливі відмінності у відносній важливості входять до нього відношень R_j. Тому часто для вирішення подібних завдань використовується згортка Q_2 іншого виду, яка визначається виразом

$$\mu_{Q2}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} w_j\mu_j(x,y). \qquad (16.33)$$

Неважко помітити, що отримане відповідно до неї узагальнене відношення переваги $\mu_{Q_2}(x,y)$ рефлексивно в силу його адитивності і рефлективності входять до нього вихідних відношень R_j. Якщо за допомогою згортки Q_1 можна отримати множину чітко недомінованих альтернатив $X^{ЧНД}(x)$, то застосування згортки Q_2 вихідних відношень переваги в задачі прийняття рішень дозволяє отримати додаткову інформацію про відносну ступінь недомінованих ефективних альтернатив і тим самим звузити клас реальних виборів альтернатив до множини

$$X^{ЧНД} = \left\{ x \mid x \in X, \mu_{Q_2}^{НД}(x) = \sup_{x \in X_2^{ЧНД}} \mu_{Q_2}^{НД}(x) \right\}. \qquad (16.34)$$

Для вирішення багатокритеріальної задачі раціонального вибору недомінованих альтернатив рекомендується наступна процедура.

1. Побудувати нечітке відношення переваги Q_1 як перетин вихідних відношень переваги $R_j, j = \overline{1,m}$. Функція приналежності цього відношення визначається як

$$\mu_{Q_1}(x,y) = \min(\mu_1(x,y), \mu_2(x,y), ..., \mu_m(x,y)). \qquad (16.35)$$

На основі цієї інформації відповідно до правил, описаними раніше, знаходиться множина недомінованих альтернатив в множині (X, Q_1), яке має вигляд

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x) = 1 - \sup_{y \in X}(\mu_{Q_1}(y,x) - \mu_{Q_1}(x,y)). \qquad (16.36)$$

2. Побудувати узагальнене нечітке відношення переваги Q_2 як згортка (15.33) вихідних відношень переваги $R_j, j = \overline{1,m}$, тобто

$$\mu_{Q_2}(x,y)=\sum_{j=1}^{m} w_j\mu_j(x,y), \qquad (16.37)$$

і на його основі визначити нечітка підмножина недомінованих альтернатив в множині (X,Q_2), яке має вигляд

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x)=1-\sup_{y\in X}(\mu_{Q_2}(y,x)-\mu_{Q_2}(x,y)). \qquad (16.38)$$

Ця функція, як уже зазначалося, впорядковує альтернативи за ступенем їх недомінованості.

3. Знайти перетин отриманих нечітких множин $\mu_{Q_1}^{НД}(x)$ і $\mu_{Q_2}^{НД}(x)$, яке має вигляд $\mu^{НД}(x)$ - $\min(\mu_{Q_1}^{НД}(x),\mu_{Q_2}^{НД}(x))$.

4. Раціональним при цьому слід вважати вибір альтернатив з множини

$$X^{НД}=\left\{x\,|\,x\in X,\mu^{НД}(x)=\sup_{x'\in X}\mu^{НД}(x')\right\}. \qquad (16.39)$$

Видається цілком природним, що найбільш раціональним слід вважати вибір такої альтернативи з множини $X^{НД}$, яка має найбільший ступінь недомінованості.

Приклад 16.2

В процесі функціонування деякої фірми надійшло досить вигідне замовлення на роботу, яка дещо відрізняється від тієї, на якій фірма спеціалізується. Для прийняття рішення про можливий спосіб виконання цього замовлення у керівника фірми є три альтернативні можливості:

1) x_1 – навчити відповідній роботі одного зі своїх співробітників;

2) x_2 – прийняти на роботу співробітника, який вже вміє виконувати таку роботу;

3) x_3 – укласти договір з іншою організацією про виконання цієї роботи на умовах субпідряду.

В процесі підготовки та прийняття рішення щодо вибору конкретної альтернативи (варіанти виконання замовлення, що надійшло) керівник виходить з таких трьох критеріїв:

1) терміни виконання замовлення;

2) матеріальні витрати на його виконання;

3) якість виконання робіт.

Для простоти будемо вважати, що всі три критерії мають однакову важливість. Кожен з введених критеріїв породжує певне ставлення переваги на множині розглянутих альтернативних можливостей виконання замовлення.

Ці відношення переваги будемо вважати такими:

R_1 – альтернатива x_1 однакова по перевазі з альтернативою x_2, а альтернатива x_3 є більш кращою, ніж x_2 по першому критерію;

R_2 – альтернатива x_1 є більш кращою, ніж x_2 і x_3, а альтернатива x_2 більш кращою, ніж x_3 за другим критерієм;

R_3 – альтернативи x_1 і x_2 однакові по перевазі, а альтернатива x_3 є більш кращою, ніж x_1 по третього критерію.

На основі цих характеристик складемо матриці відношень R_1, R_2 і R_3. При цьому їх елементи r_{ij}^k - будемо визначати у відповідності з наступним правилом:

$$r_{ij}^k = \begin{cases} 1, \text{якщо i-а альтернатива краще j-ої по k-му критерію;} \\ 0, \text{якщо альтернативи однакові по перевазі або i-а альтернатива;} \\ \text{гірше j-ої по k-му критерію.} \end{cases}$$

Відповідно до цього отримаємо наступні матриці описаних відношень переваги:

- матриця відношення переваги R_1:

$$\mu_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

- матриця відношення переваги R_2:

$$\mu_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array};$$

- матриця відношення переваги R_3:

$$\mu_1 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Користуючись описаною вище процедурою, будемо вирішувати завдання вибору найкращої альтернативи таким чином.

1. Визначимо нечітке відношення переваги

$Q_1 = R_1 \cap R_2 \cap R_3$.

Відповідно до визначення функції належності перетину

$\mu_{Q1}(x_i, x_j) = \min(\mu_1(x_i, x_j), \mu_2(x_i, x_j), \mu_3(x_i, x_j))$.

Вибираючи мінімальні значення відповідного елемента кожної з матриць μ_1, μ_2 і μ_3 отримаємо

$$\mu_{Q1}(x_i, x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Знаходимо множину недомінованих альтернатив на множині (X,Q_1)

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_i) = 1 - \sup_{x_j \in X}(\mu_{Q_1}(x_j, x_i) - \mu_{Q_1}(x_i, x_j)),$$

по всіх i та j $(i \neq j)$:

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_1) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_2, x_1) - \mu_{Q_1}(x_1, x_2),$$
$$\mu_{Q_1}(x_3, x_1) - \mu_{Q_1}(x_1, x_3)) = 1 - \sup(0 - 1, 0 - 0) = 1;$$
$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_2) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_1, x_2) - \mu_{Q_1}(x_2, x_1),$$
$$\mu_{Q_1}(x_3, x_2) - \mu_{Q_1}(x_2, x_3)) = 1 - \sup(1 - 0, 0 - 0) = 0;$$
$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_3) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_1, x_3) - \mu_{Q_1}(x_3, x_1),$$
$$\mu_{Q_1}(x_2, x_3) - \mu_{Q_1}(x_3, x_2)) = 1 - \sup(0 - 0, 0 - 0) = 1.$$

Таким чином, множина недомінованих альтернатив по узагальненому відношенню переваги Q_1 має наступний вигляд:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \mu_{Q_1}^{íÄ}(x) = \{ & 1 & 0 & 1\}. \end{array}$$

2. Тепер побудуємо відношення переваги Q_2:

$$\mu_{Q_2}(x_i, x_j) = \sum_{j=1}^{m} w_j \mu_j(x_i, x_j) = \frac{1}{3}(\mu_1(x_i, x_j) + \mu_2(x_i, x_j) + \mu_3(x_i, x_j)).$$

Оскільки в даному випадку $w_1 = w_2 = w_3$, то по визначенням все $w_i = \frac{1}{3}$.

Тому отримаємо

$$\mu_{Q_2}(x_1, x_1) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 1 + 1) = 1;$$
$$\mu_{Q_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 1 + 1) = 1;$$
$$\mu_{Q_2}(x_1, x_3) = \frac{1}{3} \cdot (0 + 1 + 0) = \frac{1}{3};$$
$$\mu_{Q_2}(x_2, x_1) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 0 + 1) = \frac{2}{3};$$
$$\mu_{Q_2}(x_2, x_2) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 1 + 1) = 1;$$
$$\mu_{Q_2}(x_2, x_3) = \frac{1}{3} \cdot (0 + 1 + 0) = \frac{1}{3};$$
$$\mu_{Q_2}(x_3, x_1) = \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 + 1) = \frac{1}{3};$$
$$\mu_{Q_2}(x_3, x_2) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 0 + 0) = \frac{1}{3};$$
$$\mu_{Q_2}(x_3, x_3) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 1 + 1) = 1.$$

Таким чином, матриця функції приналежності узагальненого нечіткого відношення Q_2 набуває наступний вигляд:

$$\mu_{Q_1}(x_i, x_j) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

З її допомогою знайдемо підмножина недомінованих альтернатив множини (X, Q_2)

$$\mu_{Q2}^{ÍÄ}(x_i) = 1 - \sup_{x_j \in X}(\mu_{Q2}(x_j, x_i) - \mu_{Q2}(x_i, x_j)),$$

по всіх i та j $(i \neq j)$:

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_1) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_2, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_2),$$

$$\mu_{Q_2}(x_3, x_1) - \mu_{Q_2}(x_1, x_3)) = 1 - \sup(\frac{2}{3} - 1, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 1;$$

$$\mu_{Q_2}^{НД}(x_2) = 1 - \sup(\mu_{Q_2}(x_1, x_2) - \mu_{Q_2}(x_2, x_1),$$

$$\mu_{Q_1}(x_3, x_2) - \mu_{Q_1}(x_2, x_3)) = 1 - \sup(1 - \frac{2}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3};$$

$$\mu_{Q_1}^{НД}(x_3) = 1 - \sup(\mu_{Q_1}(x_1, x_3) - \mu_{Q_1}(x_3, x_1),$$

$$\mu_{Q_1}(x_2, x_3) - \mu_{Q_1}(x_3, x_2)) = 1 - \sup(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 1.$$

Таким чином, множина недомінованих альтернатив по узагальненому відношенню переваги Q_2 має наступний вигляд:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \mu_{Q_1}^{ÍÄ}(x) = & \{1 \quad 0 \quad 1\}. \end{array}$$

3. Побудуємо результуючу множину недомінованих альтернатив як перетин множин $\mu_{Q_1}^{НД}(x)$ і $\mu_{Q_2}^{НД}(x)$:

$$\mu^{НД}(x) = \mu_{Q_1}^{НД}(x) \cap \mu_{Q_2}^{НД}(x) = \{(1 \quad 0 \quad 1)\} \cap \{(1 \quad 0 \quad 1)\} = \{(1 \quad 0 \quad 1)\}.$$

4. Таким чином, для керівника фірми в даній задачі однаково раціональним буде вибір альтернативи x_1, тобто навчити відповідній роботі одного зі своїх співробітників, або альтернативи x_3, тобто укласти договір з якоюсь спеціалізованою організацією про виконання цієї роботи на умовах субпідряду.

Викладений алгоритм вирішення цілком прийнятний і для вирішення завдань багатокритеріальної оптимізації.

Контрольні запитання і завдання:

1. Надайте характеристику властивостям нечітких відношень уподобання.
2. Запишіть та надайти характеристику відношенням строгої переваги R^S на множині X.

3. Надайте визначення нечітким відношенням переваги.
4. Що називають нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив?
5. У чому полягає багатокритеріальний вибір альтернатив при нечіткому відношенні переваги?
6. Опишіть процедуру для вирішення багатокритеріальної задачі раціонального вибору недомінованих альтернатив.

Типові тестові завдання

Оберіть правильний варіант відповіді

1. Нечіткі відношення переваги включають:
   а) нечітке відношення байдужості;
   б) нечітке відношення квазіеквівалентності;
   в) нечітке відношення строгої переваги;
   г) всі означені відношення;
   д) ні одного з наведених відношень.
2. Функція приналежності для нечіткого відношення байдужості
   а) $\mu_R^I = \max[\{1-\max\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}\};\min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}]$;
   б) $\mu_R^E = \min\{\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)\}$;
   в) $\mu_R^S = \mu_R(x,y)-\mu_{R^{-1}}(x,y)=\mu_R(x,y)-\mu_R(y,x)$;
   г) Не має правильної відповіді.
3. Нечіткою підмножиною недомінованих альтернатив називають:
   а) перетин нечіткої множини 1 – $\mu_R^S(y,x)$ по всіх $y \in X$;
   б) підмножина, яка описується функцією приналежності вигляду $\mu_R^{НД}(x) = 1-\sup\limits_{y\in X}\left\{\mu_R^S(y,x)\right\}, \forall x \in X$;
   в) підмножина усіх кращих альтернатив;
   г) вірні відповіді а) та б);
   д) не має правильних відповідей.

Прикладні завдання

Задача 16.1

Представлено на ринку чотири варіанти комерційних посередників a_1, a_2, a_3, a_4. Відомо, що всі вони оцінюються за трьома показниками: швидкість обробки замовлення, зручність та гнучкість системи оплати, якість продукції, що постачається. Оцінка комерційних посередників представлена у вигляді нечітких множин:

μ_1=0,25/4+0,5/3+0,6/2,5+0,8/2;

μ_2=1/5+0,25/3+0,4/3,5+0,6/4;

μ_3=1/5+0,65/4,5+0,8/4,75+1/5.

Скласти відношення переваги альтернатив комерційних посередників, якщо відомі відносні показники пріоритетності критеріїв, що складають: w_1=0,15; w_2=0,35; w_3=0,5 Визначити того комерційного посередника, співробітництво з яким буде найбільш доцільним для підприємства.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Аналіз чутливості (анализ чувствительности, sensitivity analysis) – встановлення з великого числа наявних факторів тих, які значною мірою впливають на вихідні характеристики об'єкта дослідження.

Вектор початкового розподілу ймовірностей (вектор начального распределения вероятностей, Vector of initial probability distribution) – вектор-рядок ймовірностей стану (p_1 (0), p_1 (0), …, p_n (0)) в початковий момент часу t = 0, що безпосередньо передує першому кроку.

Відносна пропускна спроможність системи масового обслуговування (относительная пропускная способность системы массового обслуживания, relative capacity of queuing system) – відношення середньої кількості заявок, що обслуговуються системою за одиницю часу, до середньої кількості заявок, що надходить за цей час.

Випадковою величиною (случайная величина, random variables) називається величина, яка в результаті досвіду (спостереження) може приймати одне з числових значень з деякої відомої множини, але заздалегідь невідомо яке саме.

Випадковим процесом або випадковою функцією (случайный процесс или случайная функция, random process or random function) S (t), де t-час, називається функція, яка кожному моменту часу t з тимчасового інтервалу спостереження ставить у відповідність єдину випадкову величину S (t).

Випадкові процеси (случайный процесс, random process) являють собою спеціальний вид ймовірнісних моделей різних процесів, що протікають в економічних системах.

Двостохастична матриця (двоякостохастическая матрица, double stochastic matrix)– стохастична матриця, яка має властивість, яка визначається так: сума елементів кожного з стовпців дорівнює 1.

Дискретний випадковий процес (дискретный случайный процесс, descreet random process) – процес, в результаті якого система з дискретною множиною станів, в деякі моменти часу випадковим чином стрибкоподібно переходить з одного стану в інший.

Додаткові змінні (дополнительные переменные, additional variables) допомагають глибше вивчити об'єкт, а в окремих випадках спрощують співставлення результатів дослідження.

Економіко-математична модель (экономико-математическая модель, economic and mathematical model) є концентрованим виразом існуючих взаємозв'язків і закономірностей процесу функціонування економічної системи в математичній формі і складається із сукупності пов'язаних між собою математичних залежностей у вигляді формул, рівнянь, нерівностей, логічних умов та факторних величин, всі або частина яких має економічний зміст.

Ергодична система (эргодическая система, ergodic system) – це система, якщо вона з будь-якого свого стану може перейти за кінцеве число кроків в будь-який інший стан ("ергос" (грец.) – робота).

Змінні стану (переменные состояния, state variables) визначають або допомагають визначити стан системи в будь-який момент часу, прикладом таких змінних можуть бути обсяги продажу і прибуток.

Змінні росту (переменные роста, variables of growth)– характеристики, що описують процес, який протікає в системі в заданий момент часу, досліджуваний процес можна кваліфікувати або як перетворення, або як переміщення.

Інтенсивність або середня щільність потоку (интенсивность или средняя плотность потока, intensity or the flow average density) – це середнє число подій потоку, що наступають в одиницю часу.

Керовані змінні (управляемые переменные, managed variables)– входи моделі, значення яких змінюється в часі незалежно від поведінки об'єкта дослідження.

Критерієй оптимальності (критерий оптимальности, optimality criteria) – це деякий показник, який має економічний зміст та служить способом формалізації конкретної мети керування і виражається за допомогою цільової функції через фактори моделі.

Марківський ланцюг (марковская цепь, Markov chain) – випадкова послідовність, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S_i в будь-який стан S_j не залежить від того коли і як система S опинилася в стані S_i.

Марківський процес (Марковский процесс, Markov process) – це випадковий процес, що протікає в системі S, якщо він має властивість відсутності післядії, яка полягає в тому, що для кожного моменту t_0 ймовірність будь-якого стану S(t) системи S у майбутньому ($t > t_0$) залежить тільки від стану в сьогоденні S (t_0) (при $t = t_0$) і не залежить від того як розвивався процес в системі S в минулому (при $t < t_0$).

Математична модель (математическая модель, mathematical model) – формалізований, тобто представлений математичними співвідношеннями, набір правил, що описують фактори суттєвого впливу на функціонування об'єкта дослідження.

Математичне моделювання (математическое моделирование, mathematical modeling)– універсальний та ефективний інструмент пізнання внутрішніх закономірностей, властивих явищам і процесам, воно дає можливість вивчити кількісні взаємозв'язки, взаємозалежності системи, щ моделюється та вдосконалити її подальший розвиток і функціонування з допомогою математичної моделі.

Множина без виходу (множество без выхода, set without entering) – група станів системи , якщо система одного разу потрапивши в нього, вже ніколи не може вийти з цієї множини (поглинаюча множина, або узагальнена пастка**)**.

Множиною без входу (множество без входа, set without entrance) – група станів системи, якщо система, перебуваючи в цій множині, може з будь-якого її стану перейти за кінцеве число кроків в будь-який інший її стан, але, вийшовши якось із цієї множини, система вже ніколи в неї не повернеться (нестійка або нестала множина).

Модель (модель, model) – це такий матеріально або розумово зображуваний об'єкт, який у процесі дослідження замінює об'єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт.

Модель Уілсона (модель Уилсона, Wilson Model) є найпростішою моделлю УЗ і описує ситуацію закупівлі продукції у зовнішнього постачальника, яка характеризується обмеженнями.

Моделювання (моделирование, modeling) – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об'єктів різної природи.

Надсистема (надсистема, grandsystem) – середовище, яке оточує систему і в якому вона функціонує.

Найпростіший потік (наипростейший поток, the simplest flow) – це стаціонарний пуассонівський потік подій.

Неоднорідний марківський ланцюг (неоднородная марковская цепь, inhomogeneous Markov chain) – це марківський ланцюг, якщо перехідні ймовірності залежать від номера кроку k.

Нестаціонарний потік подій (нестационарный поток событий, transient flow of events) – це потік подій, якщо ймовірність настання того чи іншого числа подій за який-небудь проміжок часу залежить не тільки від довжини цього проміжку, але і від моменту його початку.

Нестійка або нестала множина (неустойчивое множество, unstable flimsy set) – множина без входу.

Нечітка множина (нечёткое множество, fuzzy sets) – це сукупність пар вигляду $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$, де X – універсальна множина елементів, а $\mu_A(x)$ – функція належності нечіткої множини A, яка відображає $X \to [0,1]$.

Нечітке відношення (нечёткое отношение, fuzzy relation) – це нечітка підмножина декартового добутку $X \times X$ на множині елементів X, яка характеризується функцією приналежності $\mu_R: X \times X \to [0;1]$.

Нечіткі відношення переваги – (нечёткие отношения преимущества, fuzzy preference relations) (дивись тему 16).

Однорідний марківський ланцюг (однородный марковский процесс, homogeneous Markov chain) – це марківський ланцюг, якщо перехідні ймовірності не залежать від кроків k, $p_{ij}(k) = p_{ij}$.

Однориді події (однородные события, homogeneous events) в потоці називаються такі події, якщо їх розрізняють тільки за моментами їх настання, в іншому випадку події в потоці називаються **неоднорідними (неоднородые, inhomogeneous)**.

Оптимальність (оптимальность, optimality) – вибір із множини можливих варіантів економічного розвитку такого, який дає можливість найефективніше використовувати наявні виробничі, фінансові та інші ресурси.

Оптимізація (оптимизация, optimization) – точне визначення такого поєднання змінних керування, при якому забезпечується екстремальне (максимальне або мінімальне залежно від змісту критерію оптимальності) значення цільової функції.

Ординарний потік подій (ординарный поток событий, ordinary flow of events) – це потік подій, якщо ймовірністю настання за малий проміжок часу більше однієї події можна знехтувати в порівнянні з імовірністю настання не більше однієї події.

Оцінка (оценка, estimate) – визначення, наскільки адекватно об'єкт дослідження буде відповідати деяким критеріям.

Регулярний марківський ланцюг (регулярный марковский поток, regular Markov chain) – марківський ланцюг, якщо існує число m, таке, що будь-який елемент матриці P^m позитивний, за винятком, можливо елементів, що стоять у стовпчиках, номера яких збігаються з номерами нестійких станів системи S (станів без входів).

Регулярний потік подій (регулярный поток событий, regular flow of events) називається такий потік, якщо події в ньому наступають послідовно, через заздалегідь строго визначені проміжки часу.

Рівняння зв'язку (уравнение связи, equation of connection) являються математичною формалізацією системи обмежень.

Розв'язком математичної моделі (решение математической модели, mathematical model solution) називається такий набір (сукупність) значень змінних, які задовольняють її рівняння зв'язку.

Розмічений граф (размеченный граф, marked up graph) – граф станів системи S із зазначенням перехідних ймовірностей.

Параметри та константи (параметры и константы, parameters and constants) – це незалежні від часу економічні показники та нормативні коефіцієнти, які характерні для об'єкта і включаються до моделі через систему обмежень.

Перехідною ймовірністю (переходные вероятности, transitional probability) $p_{ij}(k)$ з i-го стану в j-ий стан для k-го кроку (i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, n; k = 1, 2 …) називають ймовірність безпосереднього переходу системи S в момент часу t_k зі стану S_i в стан S_j.

Підсистема (подситема, subsystem) – підмножина елементів, що реалізують цілі, узгоджені з цілями системи.

Поглинаюча множина, або узагальнена пастка (поглощающее множество или ловушка, an absorbing set, or generic trap)– множина без виходу.

Порівняння (сравнение, comparison) – співставлення обмеженого числа альтернативних варіантів систем або співставлення декількох прийнятних принципів чи методів дій.

Потік без післядії (потік без пам'яті) (поток без последействия (поток без памяти), flow without aftereffect (flow without memory)) – це такий потік, якщо для будь-якої пари проміжків часу, що не перетинаються, число подій за один з них не залежить від числа подій за інший проміжок, тобто відсутність післядії означає, що послідовні події в потоці наступають незалежно один від одного.

Потоком подій (поток событий, flow of events) називається послідовність подій, що наступають одна за іншою в якісь, загалом, випадкові моменти часу.

Предмет теорії масового обслуговування (предмет теории массового обслуживания, the subject of queuing theory) – з’ясування залежності між характером потока заявок, кількістю каналів, їхньою продуктивністю, правилами роботи СМО та ефективністю обслуговування.

Прогноз (п**рогноз, forecast)** – оцінка поведінки об'єкта на часовому інтервалі при деякому допустимому поєднанні зовнішніх умов.

Процес дискретним часом (процесс с дискретным временем, the process with discrete time) – випадковий процес, що протікає в деякій системі S, якщо переходи системи з одного стану в інший відбуваються в заздалегідь відомі моменти часу t_0, t_1, …, t_k, які називають **кроками** або **етапами процесу**.

Процес з безперервним часом (процесс с непрерывным временем, process with continuous time) – випадковий процес, що протікає в деякій системі S, якщо переходи системи з одного стану в інший можливі в будь-які, заздалегідь невідомі, випадкові моменти часу.

Пуассонівский потік (Пуассоновский поток, Poisson flow) подій це такий потік, що має властивість відсутності післядії і ординарності.

Система обмежень (система ограничений, system of constraints) визначає границі існування області дійсних та допустимих розв'язків і характеризує основні зовнішні та внутрішні властивості об'єкта, обмеження визначають область відбуття процесу, границі зміни параметрів та характеристик об'єкта.

Система S (система S, system S) – всяка цілісна множина взаємопов'язаних елементів, яку не можна розбити на незалежні підмножини.

Соціально-економічна система (соціально-экономическая система, Socio-Economic System) – це складна імовірнісна динамічна система, яка містить процеси виробництва, обміну, розподілу та споживання матеріальних й інших благ. Її відносять до класу кібернетичних, тобто керованих систем.

Стаціонарний потік подій (стационарный поток событий, stationary flow of events) – це такий потік, якщо ймовірність настання тієї чи іншої події за який-небудь проміжок часу залежить тільки від довжини проміжку часу і не залежить від моменту його початку, тобто в стаціонарному потоці імовірнісні характеристики не залежать від часу.

Стохастична матриця (стохастическая матрица, stochastic matrix) – матриця, кожен елемент якої невід’ємний і сума елементів кожного рядка дорівнює 1.

Фінальними або стаціонарними ймовірностями (финальные или стационарные вероятности, final or stationary probabilities) називаються ймовірності стану у фінальному стаціонарному режимі.

Цільова функція (целевая функция, the objective function) математично зв'язує між собою фактори моделі, і її значення визначається значеннями цих величин; змістовне тлумачення цільовій функції надає тільки критерій оптимальності.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андрейчиков, А. В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике [Текст] / А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 368 с.

2. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем [Текст] : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережный. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 368 с.

3. Борисов, А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей [Текст] / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига : Знатне, 1990. – 184 с.

4. Бродецкий, Г.Л. Управление запасами[Текст]: учебное пособие / Г.Л. Бродецкий. – М.:Єксмо, 2008. – 352 с.

5. Данилович, В.П. Чисельні методи в задачах і вправах [Текст] : навч. посібник для студ. спец. "Прикладна математика" / В. П. Данилович; ІСДО; Державний ун–т "Львівська політехніка". – К., 1995. – 248 с.

6. Єріна, А. М. Статистичне моделювання та прогнозування [Текст]: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2001. – 170 с.

7. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології [Текст]: Навч. посібник. / В. І. Жлуктенко, С.І.Наконечний, С. С.Савіна – К.: КНЕУ, 2002. — 226 с.

8. 293. Кігель, В. Р. Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці [Текст] : монографія / В. Р. Кігель. – К. : ЦУЛ, 2003. – 202 с.

9. Кондратенко, Ю.П. Оптимізація процесів прийняття рішень в умовах невизначеності [Текст]: Навчальний посібник / Ю.П.Кондратенко. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2006. – 96 с.

10. Лабскер, Л.Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области [Текст] / Л.Г. Лабскер. – М. : Альпина Паблишер, 2002. – 224 с.

11. Лабскер, Л.Г. Теория массового обслуживания в єкономической сфере [Текст]: Учеб. пособие для вузов / Л.Г. Лабскер, Бабешко Л.О. – М. : Банкм и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

12. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fllzzyTECH [Текст]. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 736 с.

13. Линдерс, Майкл Р. Управление снабжением и запасами. Логистика [Текст] / Майкл Р. Линдерс, Харольд Е. Фирон. – 11. изд. – С. Пб. : Полигон, 1999. – 768 с.

14. Пономаренко, О. І. Системні методи в економіці, менеджменті та бізнесі [Текст] : навч. посібник / О. І. Пономаренко, В. О. Пономаренко. – К. : Либідь, 1995. – 240 с.

15. Пономарьов, О. С. Нечеткие множества в задачах автоматизированного управления и принятия решения [Текст] : навчальний посібник / О. С. Пономарьов. – Харків : НТУ "ХПІ", 2005. – 232 с.

16. Радионов, А. Р. Логистика: Нормирование сбытовых запасов и оборотных средств предприятия [Текст] : уч. пособие / А. Р. Радионов, Р. А. Радионов. – М. : Дело, 2002. – 416 с.

17. Ротштейн, О.П. Діагностика на базі нечітких відношень в умовах невизначеності [Текст]/ О.П. Ротштейн, Г.Б Ракітянська. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2006. – 275 с.

18. Рыжиков, Ю. И. Теория очередей и управление запасами [Текст] / Ю. И. Рыжиков. – СПб: Питер, 2001. – 384 с.

19. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий [Текст] Пер с англ. / Т.Л.Саати,– М.: Радио и связь, 1993. – 304 с.

20. Шрайбфедер, Дж. Ефективне управління запасами [Текст] / Дж. Шрайбфедер. – М. : Альпина бизнес букс, 2006. – 389 с.

21. Штовба, С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.

22. Экономико–математические методы и прикладные модели [Текст] : учеб. пособие для вузов / Под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2001. – 391 с.

23. Wai-Ki Ching, Michael K. Ng, Ximin Huang, Tak-Kuen Siu Markov Chains: Models, Algorithms and Applications, Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013, 243p.

ДОДАТОК А
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Теоретико-множинні представлення — опис досліджуваної системи, процесів засобами теорії множин, тобто як множини взаємозалежних і/чи взаємодіючих частин – елементів. Зв'язок між елементами задаються через відношення. Множини, елементи, відношення характеризуються певними властивостями і набором припустимих операцій над ними.

Склад об'єкта дослідження може бути представлений у вигляді дискретної множини.

Множина – основне поняття в теорії множин, що вводиться без визначення. Про множину відомо як мінімум, то, що воно складається з елементів. Приналежність елемента а множині М позначається $a \in M$ («а належить М»), неприналежність - $a \notin M$ чи $a \overline{\in} M$. Іноді важливий порядок переліку елементів множини, тоді говорять про впорядковану множину.

Множина А називається **підмножиною** множини В (позначається $A \subseteq B$), якщо , елемент з А є елементом В (рис. А.1).

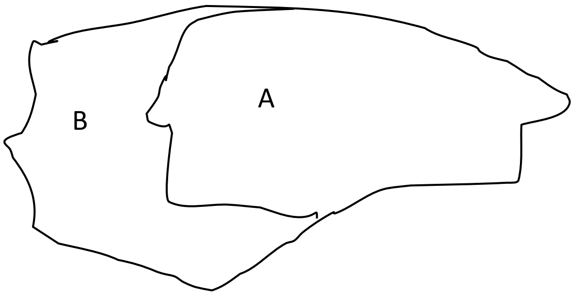


Рисунок А.1 – Зображення множини та підмножини

Якщо $A \subseteq B$ та A = B, тоді А називається строгою (власним) підмножиною (позначається $A \subset B$).

Змістовні приклади множин і їхні можливі позначення:

А - множина співробітників фірми "Елегант";

M_1 - множина всіх операцій (робіт) по зборці комп'ютера;

M_2 — множина видів послуг, наданих фірмою "Силует";

N- множина натуральних чисел 1, 2, 3,...;

N_{100} - множина натуральних чисел, що не перевершують 100;

R - множина всіх дійсних чисел і т.д.

Два визначення рівності множин:

а) Множини А та В рівні (А = В), якщо їхні елементи збігаються.

б) Множини А та В рівні, якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$.

Множина, що складається з кінцевого числа елементів, називається кінцевою, у противному випадку - нескінченною (наприклад, множини N, R —

нескінченні множини). Число елементів у кінцевій множині M називається його **потужністю** і позначається $|M|$.

Множина потужності 0, тобто в якій немає елементів, називається **пустою** (позначається $\varnothing$): | $\varnothing$ | =0. Прийнято вважати, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Булеан β(U) – це множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини U.

Способи завдання множин:

1. Перерахуванням, тобто списком своїх елементів. Списком можна задати лише кінцеві множини. Позначення списку - у фігурних дужках. Наприклад, множина A пристроїв домашнього комп'ютера, що складається з процесорного блоку a, а також периферійних пристроїв B (монітора b, клавіатури c і принтера d), може бути представлено списком:

A = {a, B} чи A = {a, b, c, d}.

(Завдання типу N = 1,2,3,... - не список, але лише припустима умовна позначка.)

2. Процедурою, що породжує. Вона описує спосіб одержання елементів множини з вже отриманих елементів або інших об'єктів. У такому випадку елементами множини є всі об'єкти, що можуть бути побудовані за допомогою такої процедури. Наприклад, множина всіх цілих чисел, що є ступенями двійки M_{2^n}, n∈N, а N-множина натуральних чисел, (припустиме позначення M_{2^n} = 1,2,4,8,16,...) може бути представлено процедурою, що породжує, заданими двома правилами, що називаються рекурсивними, чи індуктивними:

– 1 ∈ M_2^n;

– якщо т ∈ M_2^n, тоді 2т ∈ M_2^n.

3. Описом характеристичних властивостей множини, якими повинні володіти його елементи; позначається:

$M = \{x \ | P(x)\}$ чи $M = \{x : P(x)\}$.

(«Множина M складається з елементів x таких, що x має властивість P»). Наприклад, множина A периферійних пристроїв персонального комп'ютера PC може бути визначено:

A = {x: x - периферійний пристрій персонального комп'ютера PC}.

Якщо властивість елементів множини M може бути описано коротким вираженням, це спрощує його символьне представлення. Наприклад, множина усіх натуральних парних чисел $M_{2п}$ може бути представлено:

$M_{2^n} = \{x : x = 2n, n \in N\}$.

Надійним способом точно описати властивість елементів даної множини є завдання процедури, що розпізнає. Вона повинна встановлювати для будь-якого об'єкта x, чи володіє він даною властивістю P (і, отже, належить множині) чи ні. Наприклад, що розпізнає процедурою для множини A всіх співробітників фірми "Квант", що мають посвідчення фірми, є перевірка його наявності. Тоді множина A може бути представлене більш точно: “A -

множина всіх співробітників фірми «Квант», що мають відповідне посвідчення фірми“.

Ще приклад: для опису характеристичної властивості елементів множини M_{2^n} усіх цілих чисел, що є ступенями двійки ("бути ступенем двійки"), що дозволяє процедурою може служити будь-як метод розкладання цілих чисел на прості множники. Тоді $a \in M_{2^n}$ якщо а = 1 чи якщо а = 2 х 2 х... х 2 = 2^n, а ∈ N.

Приклад.

Задати різними способами множина N усіх натуральних чисел: 1,2, 3,...

Списком множину N задати не можна через її нескінченність.

Процедура, що породжує, містить два правила:

а) 1 ∈ N; б) якщо n ∈ N, то п+1∈ N.

Опис характеристичної властивості елементів множини N:

N= {x: x - ціле позитивне число}.

Приклад.

Задати різними способами множину М усіх парних чисел 2,4, 6,..., що не перевищують 100.

M_{2n}={2,4,6,...,100}.

а)2∈ M_{2n} ; б) якщо n∈ N, те (п+2)∈ M_{2n} ; в) n < 98.

$M_{2п}$= {п: п - ціле позитивне число, що не перевищує 100} чи

$M_{2п}$ ={n : n ∈ N і n/2∈N, n< 100}.

Приклад.

Нехай U= {a, b, c}. Визначити в явному вигляді (перерахуванням своїх елементів) булеан β(U) - множина всіх підмножин, що складаються з елементів множини U. Яка потужність множини β (U)?

β(U)= {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b), {a,c}, {b, c}, {a, b, c}}. Потужність |β(U)| = 8.

Операції над множинами

Об'єднанням множин А та В (позначається $A \cup B$) називається множина, яка складається із всіх тих елементів, які належать хоча б одному з множин А, В.

Операції над множинами доцільно зображувати за допомогою діаграм Вена-Ейлера. Діаграми Вена-Ейлера є зображення замкнутих фігур. Вони робляться так, щоб будь-яке взаємовідношення між множинами можна було інтерпретувати. Операція об'єднання зображена на рис. А.2(а))

Перетинанням множин А та В (позначається $A \cap B$)є множина, яка складається з тих елементів і тільки тих, які належать і множині А і множині В (рис. А.2(б)). Об'єднання та перетинання довільного числа множин визначається так само. Символічний запис об'єднання та перетинання відповідно $A \cup B \cup C \cup D$, $A \cap B \cap C \cap D$.

Доповненням множини А називається множина В, яка складається з усіх елементів універсальної множини, що на належать А. Позначається як $\overline{A} = U \setminus A$ (рис. А.2(в)).

Різниця множин А та В (позначається $A \setminus B$) називається множина всіх тих і тільки тих елементів А, які не належать В (рис. А.2(г)).

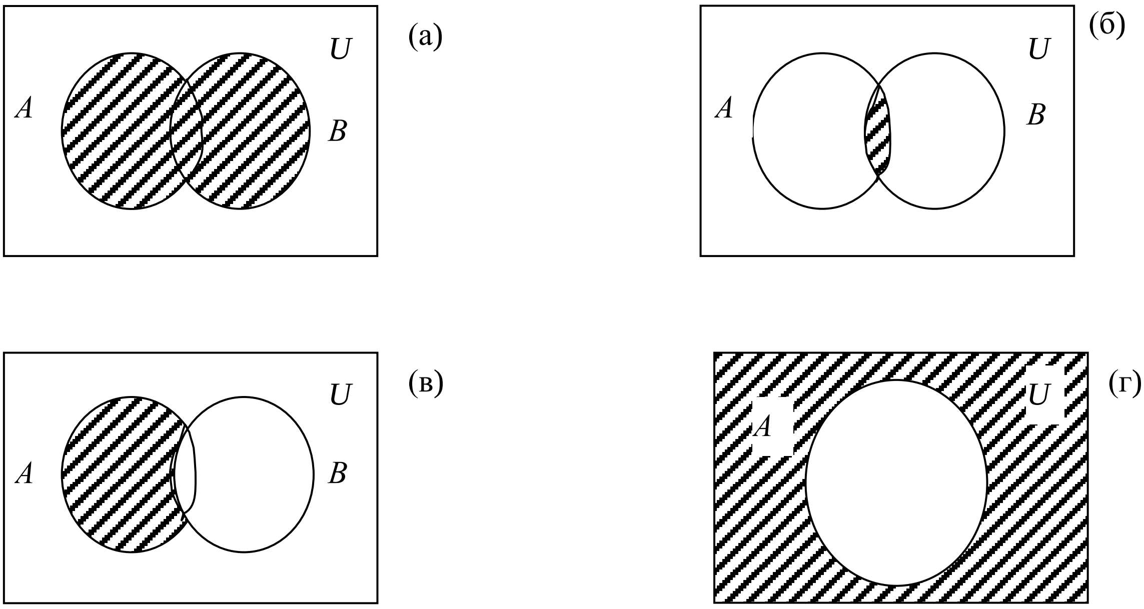


Рисунок А.2 – Операції над множинами

Властивості різниці
$$A - B \neq B - A$$
$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Приклад 1

Хай задані такі множини:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7,8\}$

Тоді $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

$A \cap B = \{4,5\}$,

$\overline{A} = U \setminus A = \{6,7,8,9,0\}$,

$A \setminus B = \{1,2,3\}$

Старшинство операцій $\overline{}, \cap, \cup, -$

Об'єднання та перетинання підпорядковуються наступним властивостям

1. Комутативність $A \cap B = B \cap A,$ $A \cup B = B \cup A$
2. Асоциатівність $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Дистрибутівність $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
4. Елімінації $(A \cap B) \cup A = A,$ $(A \cup B) \cap A = A$

5. Ідемпотентність $A \cap A = A,$
$A \cup A = A$

6. Інволюція $\overline{\overline{A}} = A$

7. Протиріччя $A \cap \overline{A} = \varnothing$

8. Виключеного третього $A \cup \overline{A} = U$

9. Тотожності з константами $A \cap \varnothing = \varnothing, A \cup \varnothing = A,$
$A \cup U = U, A \cap U = A$

10. Закони де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Перераховані закони та тотожності використовують для еквівалентних перетворень формул алгебри множин, як правило з метою спрощення формул або для того, щоб доказати, що дві формули тотожні.

ДОДАТОК Б
ВІДНОШЕННЯ

Відношення – один із способів завдання взаємозв'язків між елементами множин. Найбільш вивченими і найчастіше використовуваними є унарні та бінарні відношення.

Унарні (одномісні) відношення відбивають наявність якогось визначеної ознаки R (властивості і т.п.) в елементів множини M (наприклад, "бути білим" на безлічі куль в урні). Тоді всі такі елементи а з множини, що відрізняються даною ознакою R, утворять деяку підмножину в M, називану унарним відношенням R, тобто $a \in R$ та $R \subseteq M$.

Бінарні (двомісні) відношення використовуються для визначення якихось взаємозв'язків, якими характеризуються пари елементів у множині M (так, на множині людей можуть бути задані, наприклад, бінарні відношення: "жити в одному місті", "бути молодшим", "бути сином", "працювати в одній організації" і т.п.). Тоді усі пари (a,b) елементів з M, між якими має місце дане відношення R, утворять підмножину пар з безлічі всіх можливих пар елементів $M \times M = M^2$, називане бінарним відношенням R, тобто $(a,b) \in R$, при цьому $R \subseteq M \times M$ (рис. Б.1).

У загальному випадку можуть розглядатися n-місні відношення, наприклад відношення між трійками елементів - тримісні (тернарні) відношення і т.д.

Під **n -місним відношенням** розуміють підмножину R прямого добутку множин: $R \subseteq M \times M \times ..... \times M_n$. Говорять, що елементи a_1, a_2, ..., a_n $(a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n)$ знаходяться у відношенні R, якщо $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R$. Якщо n-місцеве відношення R задане на множині M своїх елементів, тобто $M_1=M_2 = ... = M_n$, то $R \subseteq M^n$.

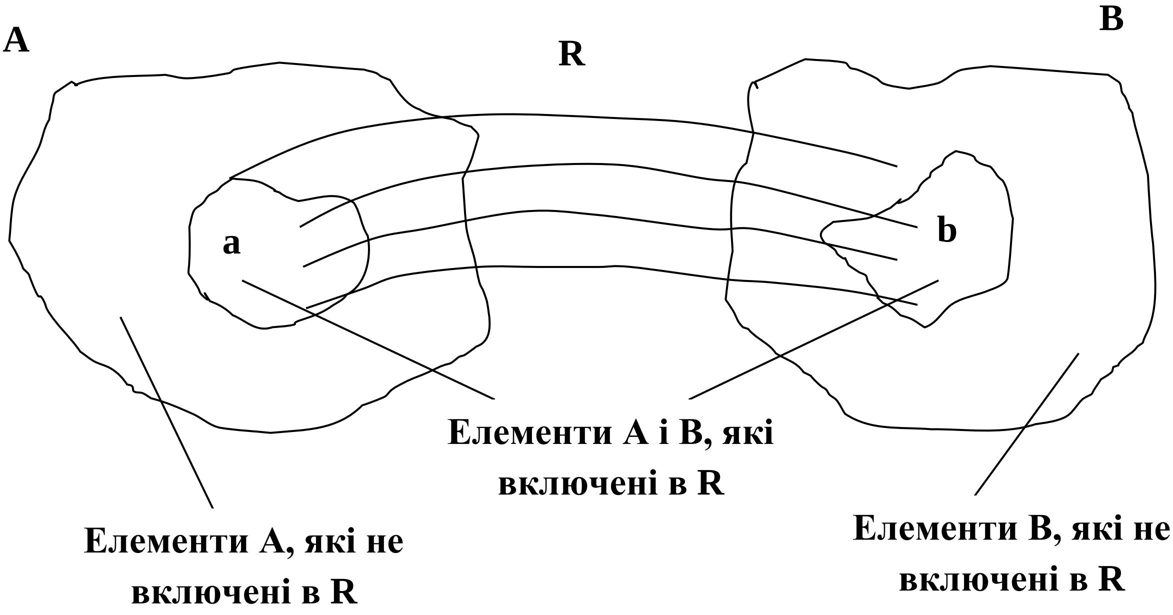


Рисунок Б.1 – Зображення елементів що знаходяться у відношенні

Способи завдання бінарних відношень – будь-які способи завдання множин (тому що відношення визначені вище як підмножини деяких множин - прямих добутків). Відношення, визначені на кінцевих множинах, звичайно, задаються:

1. **Списком** (перерахуванням) пар, для яких це відношення виконується. Наприклад, R = {(a, в), (a, c), (b,d)}.

2. **Матрицею** – бінарному відношенню $R \subseteq M \times M$, де M= {a_1 a_2,..., $a_п$}, відповідає квадратна матриця порядку п, у якій елемент c_{ij}, що стоїть на перетинанні і-тої строки та j-того стовпця дорівнює 1, якщо між a_i a_j має місце відношення R, та 0, якщо воно відсутнє.

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо} \quad a_i R a_j \\ \hline 0 \text{ в} \quad \text{протилежному} \quad \text{випадку} \end{cases}$$

Наприклад,

	B_1	B_2	B_3	B_4
a_1	1		1	
a_2		1	1	1
a_3	1			

3. За допомогою **орієнтованого графу**. Граф це фігура, що складається з точок та стрілок. Вершини графа (точки) відповідають елементами множин, дуга, що направлена від елемента a_i до a_j означає, що a_i R a_j. Наприклад:

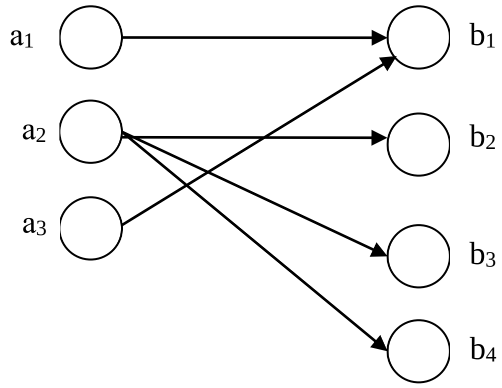


Рисунок Б.2– Граф як спосіб задання відношення

Операції над відношеннями

Усі бінарні відношення є підмножина декартового добутку двох множин. Тому для відношень необхідно визначити операції: об'єднання, перетинання, вирахування, тощо.

Для визначення операцій над множинами використаємо відношення R_1, R_2, R_3

1. Об'єднання:

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 або (a,b) \in R_2\}$$

В цьому випадку "або" розуміються не в виключному сенсі, а як додаток одного до іншого.

2. **Перетинання:**

$$R_1 \cap R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 та (a,b) \in R_2\}$$

Результатом перетинання відношень є така пара елементів для яких вірно і відношення R_1, і відношення R_2.

3. **Різниця:**

$$R_1 \setminus R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 та (a,b) \notin R_2\}$$

4. **Доповнення:**

$$\overline{R_1} = U \setminus R = \{(a,b) : (a,b) \in U \ та (a,b) \notin R_1\}$$

5. **Зворотне відношення R^{-1}**

$bR^{-1}a$ тоді і тільки тоді, якщо aRb

$$R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$$

Приклад: R – бути сином, R^{-1} – бути батьком,

R – бути боржником, R^{-1} – бути кредитором

6. **Композиція:** (згортання або добуток відношень) $R_1 \circ R_2$

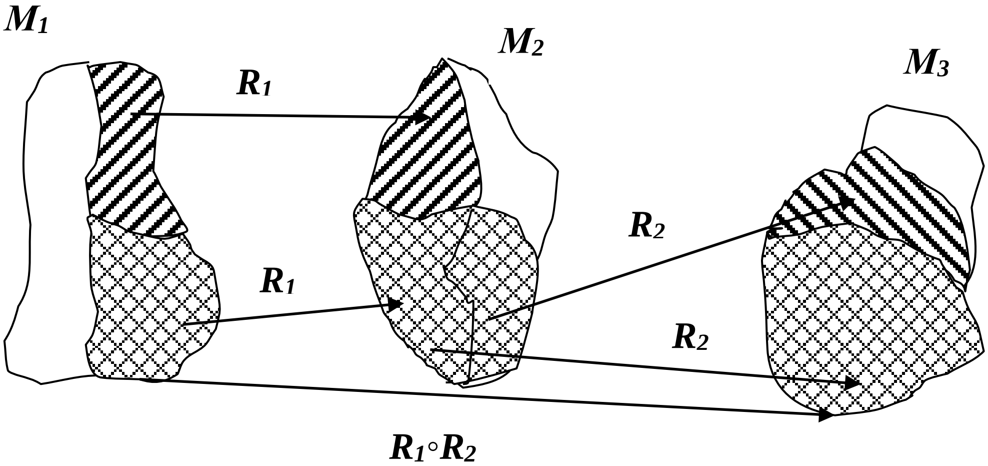


Рисунок Б.3 – Зображення операції композиції

Нехай задані множини M_1, M_2, M_3 та відношення $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ та $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Складне відношення діє з M_1 в M_2 за допомогою R_1 , а потім з M_2 в M_3 за допомогою R_2, таким чином $(a,b) \in R_1 \circ R_2$, якщо існує таке $c \in M_2$, що $(a,c) \in R_1$ та $(c,b) \in R_2$. На рис. 2.8 показані множини M_1, M_2, M_3 у них – зони визначення $D(R_X)$, $D(R_2)$ та зони визначення $Q(R_X)$ та $Q(R_2)$, що заштриховані в різних напрямках для R_l та R2. Сегменти з двійною штриховою на M_1, M_2, M_3 є $D(R_1 o R_2)$, $Q(R_1) \cap D(R_2)$ та $Q(R_1 {}^\circ R_2)$ відповідно. Зокрема, якщо відношення R визначено на множині M, $R \subseteq M^2$, тоді складне відношення

$$R \circ R = \{(a,b) : (a,c) \in R_1, (c,b) \in R_2\}$$

Приклад

Якщо R – «бути сином», тоді R°R – «бути онуком».

Приклад

Нехай задано $R_1 \subseteq N \times N$, $R_2 \subseteq N \times N$, де N – множина натуральних чисел, причому $R_1 = \{(a,b) : b = a^2, a \in N\}$ та $R_2 = \{(b,c) : c = 3 * b, b \in N\}$, тоді $R_1 \circ R_2 = \{(a,c) : c = 3a^2, a \in R\}$

Приклад

Також доцільно використовувати графи для завдання композиції відношень

$R_1 = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$, $R_2 = \{(b,c), b \in B, c \in C\}$, тоді

$R_1 \circ R_2 = \{(a,c), a \in A, c \in C\}$

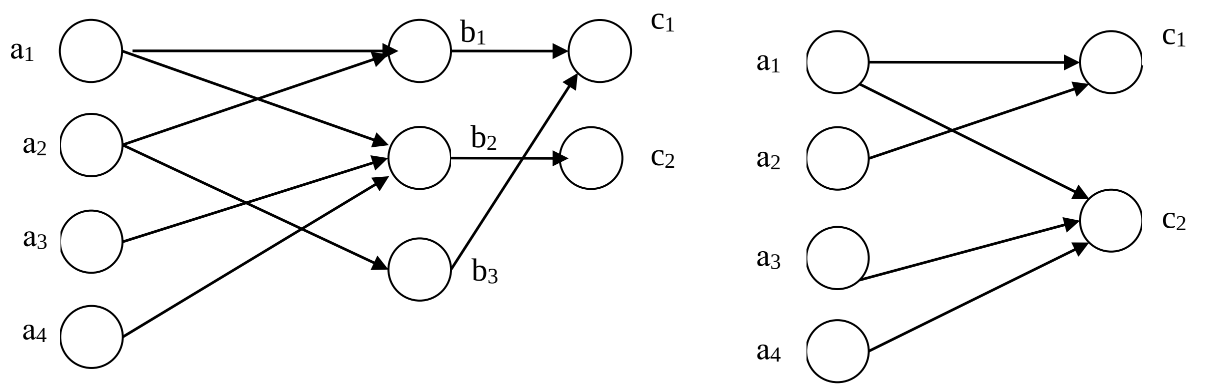


Рисунок Б.4 – Використання графу для завдання композиції відношень

Всі бінарні відношення можна охарактеризувати за допомогою невеликого набору властивостей.

Бінарне відношення α називається **рефлексивним**, якщо виконується $x\alpha x$ для будь-якого $x \in A$. Наприклад, "жити в одному місці", "належати до однієї групи"

Бінарне відношення α називається **антирефлексивним,** якщо для будь-якого $x \in A$ виконується $\overline{x\alpha x}$, тобто не виконується $x\alpha x$. Наприклад, "бути сином", "бути меншим за зростом або за віком"

Відношення називається **симетричним**, якщо для усіх $x, y \in A$, якщо $x\alpha y$ тоді $y\alpha x$ (група). Наприклад, належати до однієї студентської групи.

Відношення називається **антисиметричними** якщо для усіх $x, y \in A$ з того, що $x\alpha y$ і $y\alpha x$ – істинне обов'язково $x = y$. Наприклад, "бути сином", "бути начальником"

Відношення називається **транзитивним,** якщо для усіх $x, y, z \in A$ з того, що $x\alpha y$ і $y\alpha z$ – істина обов'язково $x\alpha z$ також істина. Наприклад, „бути молодшим за віком"

Відношення називають **від'ємно транзитивними** якщо для усіх $x, y, z \in A$ з того що $x\alpha y$ і $y\alpha z$ – істина $\overline{x\alpha z}$. Наприклад,

Відношення α називають еквівалентним, якщо воно рефлексивне, симетричне, та транзитивне. Наприклад, "бути родичем", "бути студентом однієї групи"

Приклад

Визначити властивості відношення, заданих:

а) на множині натуральних чисел N R_3 – "бути рівним": $R_3 = \{(a,b) : a = b\}$

- рефлексивне, не антирефлексивне, оскільки a = a для всіх $a \in N$;
- симетричне, тому що якщо a =b, то b = a;
- антисиметричне, тому що якщо aR_3b, bR_3a, тоді a = b
- транзитивне, тому що якщо a = b і b = c, то a = c.

Властивості відношень переважності “не гірше”, ”рівноцінне”, ”краще”, ”не краще”, “гірше” зведені до таблиці.

Таблиця Б.1– Властивості відношень переважності

	Рефлек-сивність	Антиреф-лексивність	Симетрич-ність	Антисиме-тричність	Транзи-тивність	Від'ємна тра-нзитивність
не гірше	+	-	**?**	**?**	+	+
рівно цінне	+	-	+	-	+	**?**
краще	-	+	-	+	+	+
Не краще	+	-	**?**	**?**	+	+
Гірше	-	+	-	+	+	+

Позначення: “+” – властивість притаманна;
“–“ - властивість не виконується;
“?” –властивість або може мати місце, або ні.

Навчальне видання

КИРІЙ Валентина Василівна
ФАСТОВА Наталя Іванівна

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Відповідальний випусковий Тімофєєв Володимир Олександрович

Редактор

План 20___, поз. ____
Підп. до друку Формат 60×84 1/16. Спосіб друку – ризографія.
Умов.друк.арк. Облік. вид. арк. . Тираж прим.
Зам. № Ціна договірна.

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна, 14