

УДК 517.988 : 519.632



М.В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки,  
м. Харків, Україна, maxim.sidorov@nure.ua

## ЗАСТОСУВАННЯ КОНСТРУКТИВНИХ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ R-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПОБУДОВИ КОНУСНОГО ВІДРІЗКА ПРИ ЧИСЕЛЬНІЙ РЕАЛІЗАЦІЇ ДВОБІЧНИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Розглянуто нелінійне еліптичне рівняння з однорідною умовою Діріхле. Методом функцій Гріна від диференціальної задачі виконано перехід до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна. Для чисельного знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння, розглядуваного як операторне рівняння у просторі неперервних функцій напівупорядкованому конусом невід'ємних функцій, за допомогою методів нелінійного аналізу, зокрема, теорії гетеротонних операторів, запропоновано двобічний ітераційний метод, у якому для побудови початкового конусного відрізка використано метод R-функцій. Ефективність розробленого чисельного метода проілюстровано серією обчислювальних експериментів.

**НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА, ДОДАТНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ,  
КОНУСНИЙ ВІДРІЗОК, МЕТОД R-ФУНКЦІЙ**

**Сидоров М.В. Применение конструктивных методов теории R-функций для построения конусного отрезка при численной реализации двусторонних итерационных методов.** Рассмотрено нелинейное эллиптическое уравнение с однородным условием Дирихле. Методом функций Грина от дифференциальной задачи выполнен переход к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению Гаммерштейна. Для численного нахождения положительного решения интегрального уравнения, рассматриваемого как операторное уравнение в пространстве непрерывных функций полуупорядоченном конусом неотрицательных функций, с помощью методов нелинейного анализа, в частности, теории гетеротонных операторов, предложен двусторонний итерационный метод, в котором для построения начального конусного отрезка использован метод R-функций. Эффективность разработанного численного метода проиллюстрировано серией вычислительных экспериментов.

**НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ, МЕТОД ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, КОНУСНЫЙ ОТРЕЗОК, МЕТОД R-ФУНКЦИЙ**

**Sidorov M.V. Application of constructive methods of the theory of R-functions for construction of a cone segment in the numerical realization of two-sided iterative methods.** A nonlinear elliptic equation with a homogeneous Dirichlet condition is considered. A transition from the differential problem to the equivalent nonlinear integral Hammerstein equation is made by the method of Green's functions. To find the positive solution of the integral equation, considered as an operator equation in the space of continuous functions that is semi-ordered by a cone of nonnegative functions, using the methods of nonlinear analysis, in particular, the theory of heterotone operators, we proposed a two-sided iteration method in which to construct the initial cone segment we used the R-function method. The effectiveness of the developed numerical method is illustrated by a series of computational experiments.

**NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM, POSITIVE SOLUTION, TWO-SIDED METHODS,  
CONE SEGMENT, R-FUNCTIONS METHOD**

### Вступ

Проблема математичного моделювання багатьох стаціонарних процесів, що розглядаються у хімічній кінетиці, біології, теорії горіння тощо [1] призводить до необхідності знаходження додатних розв'язків нелінійних еліптичних крайових задач.

Такі задачі були досліджені у багатьох роботах [2 – 5], але автори цих робіт зосереджували увагу в основному на з'ясуванні умов існування та єдиності додатного розв'язку задачі. Для знаходження чисельного розв'язку використовуються методи скінченних різниць, скінченних елементів [1, 6, 7] або ітераційні методи з двобічним характером збіжності [6, 8–11]. При застосуванні двобічних ітераційних методів будується дві ітераційні послідовності (верхніх та нижніх розв'язків), які з обох боків збігаються до точного розв'язку задачі, що дозволяє на кожному

кроці ітераційного процесу мати апостеріорну оцінку похибки, а отже, і зручний критерій закінчення ітерацій. Тому, на нашу думку, саме остання група методів є найбільш привабливою з точки зору обчислювальної математики. Побудова двобічних методів заснована на використанні теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах [2–4].

Отже, побудова та вдосконалення двобічних ітераційних методів розв'язання нелінійних еліптичних крайових задач є актуальною науковою проблемою.

Метою роботи є застосування конструктивного апарату теорії R-функцій до побудови сильно інваріантного конусного відрізка, кінці якого є початковими наближеннями при побудові двобічних ітераційних послідовностей до додатного розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

– розглянути постановку нелінійної еліптичної крайової задачі та замінити її операторним рівнянням з гетеротонним оператором;

– з використанням теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах та конструктивних засобів теорії  $R$ -функцій розробити ітераційний метод розв'язання розглядуваної задачі;

– провести обчислювальні експерименти для різних областей і проаналізувати результати.

Дана робота продовжує дослідження, розпочаті у [8–11].

### 1. Постановка задачі

Розглядатимемо проблему знаходження додатного розв'язку нелінійної крайової задачі вигляду

$$-\Delta u = f(x, u) \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  – обмежена область з кусково-гладкою межею  $\partial\Omega$ ,  $f(x, u)$  – невід'ємна та неперервна за сукупністю змінних  $x$ ,  $u$  функція, якщо  $x \in \Omega$ ,  $u \geq 0$ .

У практичних застосуваннях права частина рівняння (1) дорівнює  $\lambda u^p$ ,  $\lambda(1+u)^p$ ,  $\lambda + u^p$ ,  $\lambda e^u$ ,  $\frac{\lambda}{(1-u)^2}$  тощо [1, 7]. Точні розв'язки задачі (1), (2) відомі лише для невеликої кількості поодиноких випадків правої частини  $f(x, u)$  та області  $\Omega$ .

### 2. Побудова двобічних наближень

Нехай  $C(\bar{\Omega})$  – банахів простір неперервних у  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  функцій з нормою  $\|u\| = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$ .

Виділимо у  $C(\bar{\Omega})$  конус  $K_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$  невід'ємних функцій. Зазначимо, що конус  $K_+$  у  $C(\bar{\Omega})$  є нормальним (і навіть гострим) [2, 3].

За допомогою конуса  $K_+$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$  введемо напівупорядкованість за правилом: для  $u, v \in C(\bar{\Omega})$   $u \leq v$ , якщо  $v - u \in K_+$ , тобто

$$u \leq v, \text{ якщо } u(x) \leq v(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}.$$

Від задачі (1), (2) перейдемо до інтегрального рівняння Гаммерштейна

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad (3)$$

де  $G(x, \xi)$  – функція Гріна першої крайової задачі для оператора  $-\Delta$  у області  $\Omega$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ .

**Означення 1.** Розв'язком (узагальненим) задачі (1), (2) називатимемо функцію  $u^* \in C(\bar{\Omega})$ , яка є розв'язком рівняння (3).

Введемо у розгляд нелінійний інтегральний оператор  $T$ , який діє у  $C(\bar{\Omega})$  за правилом, яке визначається правою частиною рівняння (3):

$$T(u) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi. \quad (4)$$

Оскільки  $f(x, u) \geq 0$ , якщо  $x \in \Omega$ , та  $G(x, \xi) \geq 0$ ,  $x, \xi \in \Omega$ ,  $x \neq \xi$ , то оператор  $T$  є додатним, тобто залишає інваріантним конус  $K_+ : T(K_+) \subset K_+$ .

Нехай функція  $f(x, u)$  дозволяє діагональне подання  $f(x, u) = \hat{f}(x, u, u)$ , де неперервна за сукупністю змінних  $x$ ,  $v$ ,  $w$  функція  $\hat{f}(x, v, w)$  монотонно зростає за  $v$  і монотонно спадає за  $w$  для всіх  $x \in \Omega$ . Тоді оператор  $T$  вигляду (4) буде гетеротонним з супровідним оператором

$$\hat{T}(v, w) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, v(\xi), w(\xi)) d\xi. \quad (5)$$

Зауважимо, що для випадку, коли функція  $f(x, u)$  монотонно зростає за  $u$  для всіх  $x \in \Omega$ , можна обрати  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, v)$ , а для монотонно спадної за  $u$  функції  $f(x, u)$  можна покласти  $\hat{f}(x, v, w) = f(x, w)$ .

Оператори  $T$  і  $\hat{T}$  є цілком неперервними [2, 3].

У конусі  $K_+$  виділимо сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  умовами

$$\hat{T}(v_0, w_0) \geq v_0, \quad \hat{T}(w_0, v_0) \leq w_0,$$

тобто

$$\int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, v_0(\xi), w_0(\xi)) d\xi \geq v_0(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, w_0(\xi), v_0(\xi)) d\xi \leq w_0(x) \text{ для всіх } x \in \bar{\Omega}.$$

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)} = \hat{T}(v^{(k)}, w^{(k)}), \quad w^{(k+1)} = \hat{T}(w^{(k)}, v^{(k)}),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \quad v^{(0)} = v_0, \quad w^{(0)} = w_0,$$

тобто

$$v^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, v^{(k)}(\xi), w^{(k)}(\xi)) d\xi, \quad (6)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, w^{(k)}(\xi), v^{(k)}(\xi)) d\xi, \quad (7)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(x) = v_0(x), \quad w^{(0)}(x) = w_0(x). \quad (8)$$

З огляду на сильну інваріантність побудованого конусного відрізка та гетеротонність оператора  $T$ , для якого оператор  $\hat{T}$  є супровідним, можна зробити висновок про те, що послідовність  $\{v^{(k)}(x)\}$  не спадає за конусом  $K_+$ , а послідовність  $\{w^{(k)}(x)\}$  не зростає за конусом  $K_+$ . Крім того, з нормальності конуса  $K_+$  і цілком неперервності оператора  $\hat{T}$  впливає існування границь  $v^*(x)$  і  $w^*(x)$  цих послідовностей. Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq$$

$$\leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0.$$

Функції  $v^*$  і  $w^*$  є розв'язком системи рівнянь

$$v^* = \hat{T}(v^*, w^*), \quad w^* = \hat{T}(w^*, v^*),$$

тобто системи

$$v^*(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, v^*(\xi), w^*(\xi)) d\xi,$$

$$w^*(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, w^*(\xi), v^*(\xi)) d\xi.$$

Якщо ж отримали, що  $v^* = w^* = u^*$ , то  $u^*$  – єдина на конусному відрізку  $\langle v_0, w_0 \rangle$  нерухома точка оператора  $T$ , а отже,  $u^*$  – єдиний на  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язок крайової задачі (1), (2).

Достатньою умовою виконання рівності  $v^* = w^*$  є умова [12] існування такого  $\alpha \in (0; 1)$ , що для всіх  $v, w \in \langle v_0, w_0 \rangle$

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq \alpha \|v - w\|.$$

Нехай функція  $\hat{f}(x, v(x), w(x))$  для всіх додатних чисел  $v, w$  і для всіх  $x \in \Omega$  задовольняє нерівність

$$\left| \hat{f}(x, v, w) - \hat{f}(x, w, v) \right| \leq L |v - w|, \quad (9)$$

де  $L > 0$ .

Тоді матиме місце оцінка

$$\|\hat{T}(v, w) - \hat{T}(w, v)\| \leq LM \|v - w\|, \quad (10)$$

де  $M = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, \xi) d\xi$ .

Далі на основі оцінки (10) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \|w^{(k)} - v^{(k)}\| &= \|\hat{T}(w^{(k-1)}, v^{(k-1)}) - \hat{T}(v^{(k-1)}, w^{(k-1)})\| \leq \\ &\leq LM \|w^{(k-1)} - v^{(k-1)}\| \leq \dots \leq (LM)^k \|w^{(0)} - v^{(0)}\|. \end{aligned}$$

Отже, справджується така теорема.

**Теорема 1.** Нехай гетеротонний оператор  $T$  вигляду (4), для якого оператор  $\hat{T}$  вигляду (5) є супровідним, має сильно інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$  і виконується нерівність (9), причому  $LM < 1$ . Тоді ітераційний процес (6) – (8) збігається до єдиного у  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язку  $u^*$  крайової задачі (1), (2), причому мають місце нерівності

$$\begin{aligned} v_0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq u^* \leq \\ \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w_0 \end{aligned}$$

і

$$\|w^{(k)} - v^{(k)}\| \leq (LM)^k \|w_0 - v_0\|. \quad (11)$$

Іншою умовою, яка забезпечить єдиність додатного розв'язку крайової задачі (1), (2), є  $u_0$ -псевдоувігнутість оператора  $T$  вигляду (4) [3].

Перевагою побудованих двобічних ітераційних процесів є те, що на кожній  $k$ -й ітерації ми маємо зручну апостеріорну оцінку похибки для наближеного розв'язку  $u^{(k)}(x) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(x) + v^{(k)}(x))$ :

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\|.$$

Тоді, якщо задана точність  $\varepsilon > 0$ , то ітераційний процес слід проводити до виконання нерівності

$\max_{x \in \Omega} (w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)) < 2\varepsilon$  і з точністю  $\varepsilon$  можна вважати, що  $u^*(x) \approx u^{(k)}(x)$ .

Також з нерівності (11) можна отримати оцінку для кількості ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності. Дійсно, з нерівностей

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\| \leq \frac{(LM)^k}{2} \|w_0 - v_0\| < \varepsilon$$

знаходимо, що для досягнення точності  $\varepsilon$  треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{\|w_0 - v_0\|}{2\varepsilon}}{\ln \frac{1}{LM}} \right\rceil + 1$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Але, незважаючи на переваги побудованого двобічного ітераційного метода, практична його реалізація залежить від можливості побудови сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$ . Крім того, цей відрізок треба брати якомога меншої довжини  $\|w_0 - v_0\|$ , щоб забезпечити мінімальність кількості ітерацій  $k_0(\varepsilon)$ .

У [3] запропоновано такий спосіб побудови сильно інваріантного конусного відрізка. Відомо [3], що можна вказати множину  $\Xi$  ненульової міри таку, що

$$\int_{\Omega_1} G(x, \xi) d\xi \geq \varepsilon_0 > 0, \quad x \in \Xi.$$

Якщо існують числа  $v, w$  такі, що  $0 \leq v \leq w$  і

$$\hat{f}(x, v, w) \geq \alpha v, \quad \hat{f}(x, w, v) \leq \beta w, \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

де  $\alpha \geq \varepsilon_0^{-1}$ ,  $\beta \leq \|G\|$  ( $\|G\|$  – норма лінійного оператора  $G(u) = \int_{\Omega} G(x, \xi) u(\xi) d\xi$  у просторі  $C(\bar{\Omega})$ ), то сильно інваріантний конусний відрізок визначається функціями

$$v_0(x) = v\chi(x), \quad w_0(x) = w,$$

де  $\chi(x)$  – характеристична функція множини  $\Xi$ .

Обмеженість цього підходу викликана вимогами (12), накладеними на функцію  $\hat{f}(x, v, w)$ .

Також сильно інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ ,  $\beta > 0$  [9–11]. Тоді нерівності, які визнають  $v_0, w_0$  приймають вигляд

$$\int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, 0, \beta) d\xi \geq 0 \quad \text{для всіх } x \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G(x, \xi) \hat{f}(\xi, \beta, 0) d\xi \leq \beta \quad \text{для всіх } x \in \bar{\Omega}.$$

Перша з цих нерівностей завжди виконана, якщо  $\hat{f}(x, 0, \beta) \geq 0$  для всіх  $x \in \Omega$ ,  $\beta > 0$ , а значення  $\beta$  можна знайти з другої нерівності. Недоліком цього підходу є те, що за умови  $\hat{f}(x, 0, \beta) = 0$  для всіх  $x \in \Omega$  і  $\beta > 0$ , для нижніх наближень отримуємо стаціонарну послідовність  $v^{(k)}(x) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Цей недолік вперше було подолано у роботі [11], коли нижню межу конусного відрізка було запропоновано шукати у вигляді  $v_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ , де функція  $\omega(\mathbf{x})$  додатна в  $\Omega$  і дорівнює нулю на  $\partial\Omega$ . Така функція  $\omega(\mathbf{x})$  може бути побудована методом  $R$ -функцій.

З іншого боку конструктивний апарат теорії  $R$ -функцій, який дозволяє дати точний аналітичний опис геометрії області  $\Omega$ , у якій розглядається задача (1), (2), можна застосувати для побудови обох кінців сильно інваріантного конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$ .

Нехай межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega$  складається зі скінченної кількості кусків ліній  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , де кожна  $\sigma_i(\mathbf{x})$  – елементарна функція. Тоді за допомогою методу  $R$ -функцій [13] можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію  $\omega(\mathbf{x})$  таку, що:

- а)  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  у  $\Omega$ ;
- б)  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega$ ;
- в)  $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

З крайової умови (2) випливає, що розв'язок крайової задачі (1), (2) належить жмутку функцій  $\omega\Phi$ , де  $\Phi$  – деяка обмежена функція. Тоді сильно інваріантний конусний відрізок можна шукати у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$ , де  $\alpha, \beta$ ,  $0 \leq \alpha < \beta$ , задовольняють системі нерівностей

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \alpha\omega(\xi), \beta\omega(\xi)) d\xi \geq \alpha\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \hat{f}(\xi, \beta\omega(\xi), \alpha\omega(\xi)) d\xi \leq \beta\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Отже, якщо остання система нерівностей розв'язна, то існує сильно інваріантний конусний відрізок вигляду  $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$  і за умов теореми 1 ітераційний процес (6), (7) двобічно збігається з початкового наближення  $v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$ ,  $w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$  до єдиного у  $C(\bar{\Omega})$  узагальненого розв'язку задачі (1), (2), причому для наближеного розв'язку  $u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$  має місце оцінка

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{\beta - \alpha}{2} (LM)^k \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x}). \quad (13)$$

### 3. Результати обчислювального експерименту

Для обчислювального експерименту обемо праву частину рівняння (1) у вигляді  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda\sqrt{1+u}$ ,  $\lambda > 0$ , і розглянемо задачу

$$-\Delta u = \lambda\sqrt{1+u} \text{ у } \Omega, \quad (14)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (15)$$

у двох областях ( $m = 2$ )

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_2 > 0\}.$$

Оскільки функція  $f(\mathbf{x}, u) = \lambda\sqrt{1+u}$  монотонно зростає за  $u$ , то  $\hat{f}(\mathbf{x}, v, w) = \lambda\sqrt{1+v}$ . Нерівність (9)

виконується з  $L = \frac{\lambda}{2}$ , оскільки

$$|\lambda\sqrt{1+v} - \lambda\sqrt{1+w}| \leq \frac{\lambda}{2}|v-w|.$$

У просторі  $C(\bar{\Omega})$  задача (14), (15) еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+u(\xi)} d\xi. \quad (16)$$

Супровідний для гетеротонного (ізотонного як частинний випадок) оператора

$$T(u) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+u(\xi)} d\xi \quad (17)$$

має вигляд

$$\hat{T}(v, w) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+v(\xi)} d\xi.$$

Нерівності, що визначають конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \alpha\omega(\mathbf{x}), \beta\omega(\mathbf{x}) \rangle$ , сильно інваріантний для оператора (17), мають вигляд ( $0 \leq \alpha < \beta$ )

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+\alpha\omega(\xi)} d\xi \geq \alpha\omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (18)$$

$$\lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+\beta\omega(\xi)} d\xi \leq \beta\omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (19)$$

Двобічний ітераційний процес послідовних наближень до розв'язку рівняння (16) (а отже, і задачі (14), (15)) сформуємо за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+v^{(k)}(\xi)} d\xi, \quad (20)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) \sqrt{1+w^{(k)}(\xi)} d\xi, \quad (21)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x}), \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x}).$$

Для одиничного кола  $\Omega_1$  маємо

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{x\xi^1}}{r_{x\xi}},$$

де  $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ , точки  $\xi$  і  $\xi^1$  симетричні відносно кола одиничного радіуса,  $r_{x\xi}$ ,  $r_{x\xi^1}$  – відстані між точками  $\mathbf{x}$ ,  $\xi$  і  $\mathbf{x}$ ,  $\xi^1$  відповідно.

Знаходимо

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}, \quad M = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) d\xi = \frac{1}{4}.$$

Тоді, якщо система (18), (19) розв'язна, ітераційний процес (20), (21) двобічно збігається до єдиного у  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язку задачі (14), (15) за умови

$$LM = \frac{\lambda}{8} < 1,$$

тобто при  $\lambda < 8$ , і має місце оцінка (13).

Обчислювальний експеримент було проведено для значення  $\lambda = 1$ . Розв'язком системи (18), (19) є, наприклад, числа  $\alpha = 0,5319$ ,  $\beta = 0,5489$ . Тоді оцінка (13) набуває вигляду

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{0,5489 - 0,5319}{2} \cdot \frac{1}{8^k} \cdot \frac{1}{2} \approx \frac{0,425 \cdot 10^{-2}}{8^k}.$$

Звідси для кількості ітерацій, необхідних для досягнення точності  $\epsilon$ , отримуємо значення

$$k_0(\epsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{0,425 \cdot 10^{-2}}{\epsilon}}{\ln 8} \right\rceil + 1.$$

В таблиці 1 наведено значення  $k_0(\epsilon)$  для деяких значень  $\epsilon > 0$ .

Таблиця 1

Значення  $k_0(\epsilon)$  для деяких  $\epsilon$

$\epsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$k_0(\epsilon)$	0	0	1	2	3	5

Оберемо  $\epsilon = 10^{-5}$ . В таблиці 2 наведено значення  $\epsilon^{(k)} = \max_{x \in \Omega} \frac{1}{2} |w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)|$  оцінки похибки наближеного розв'язку  $u^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , а в таблиці 3 – значення наближень  $w^{(k)}(x)$ ,  $u^{(k)}(x)$  та  $v^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , в точці  $(0; 0)$ .

Таблиця 2

Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

$k$	0	1	2	3
$\epsilon^{(k)}$	$0,425 \cdot 10^{-2}$	$0,361 \cdot 10^{-3}$	$0,288 \cdot 10^{-4}$	$0,227 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 3

Значення послідовних наближень в точці  $(0; 0)$

$k$	0	1	2	3
$w^{(k)}(0, 0)$	0,27445	0,27444	0,27430	0,27428
$u^{(k)}(0, 0)$	0,27020	0,27408	0,27427	0,27428
$v^{(k)}(0, 0)$	0,26595	0,27372	0,27424	0,27428

На рис. 1 і 2 наведені поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(3)}(x) = \frac{1}{2}(v^{(3)}(x) + w^{(3)}(x))$  відповідно, при цьому  $\|u^{(3)}\| = 0,27428$ .

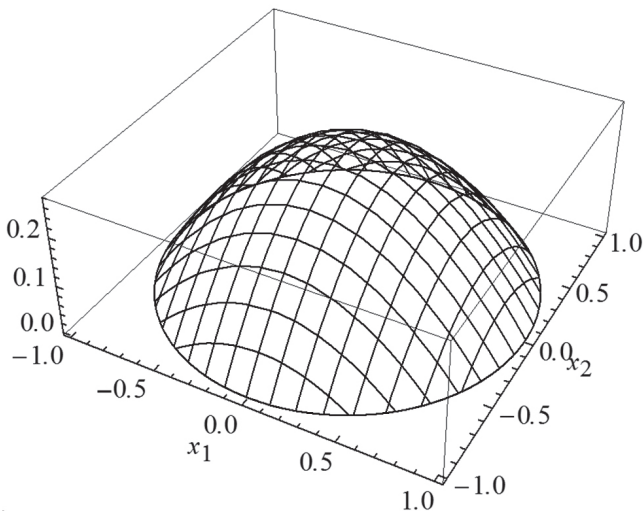


Рис. 1. Поверхня наближеного розв'язку  $u^{(3)}(x)$

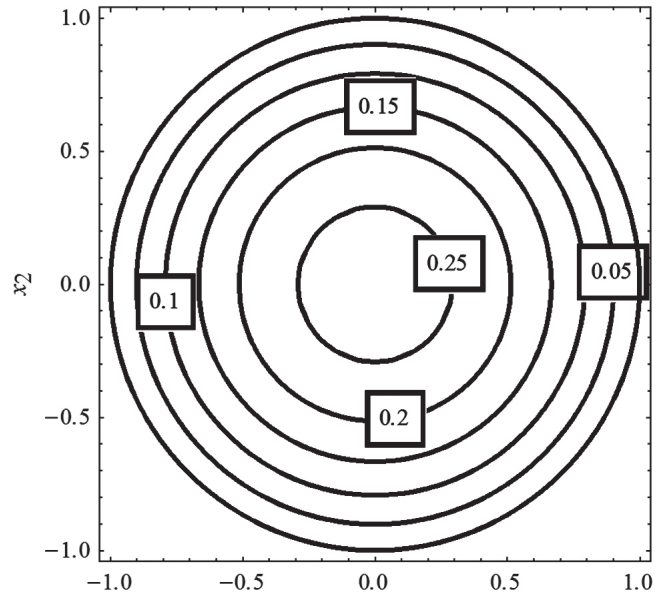


Рис. 2. Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(3)}(x)$

Для півкола  $\Omega_2$  маємо

$$\omega(x) = \left[ \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) \right] \wedge_0 x_2,$$

$$G(x, \xi) = \tilde{G}(x, \xi) - \tilde{G}(x, \xi^1),$$

де  $\wedge_0$  – знак  $R$ -кон'юнкції,

$$g_1 \wedge_0 g_2 \equiv g_1 + g_2 - \sqrt{g_1^2 + g_2^2},$$

$\tilde{G}(x, \xi)$  – функція Гріна першої крайової задачі для одиничного кола, точка  $\xi^1$  симетрична точці  $\xi$  відносно діаметра півкола.

Знаходимо

$$\max_{x \in \Omega} \omega(x) = \frac{1}{4},$$

$$M = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, \xi) d\xi = 0,097618\dots$$

Тоді, якщо система (18), (19) розв'язна, ітеративний процес (20), (21) двобічно збігається до єдиного у  $\langle v_0, w_0 \rangle$  розв'язку задачі (14), (15) за умови

$$LM = \frac{0,097618\dots \cdot \lambda}{2} < 1,$$

тобто при  $\lambda < 20,488\dots$ , і має місце оцінка (13).

Обчислювальний експеримент було проведено для значення  $\lambda = 1$ . Розв'язком системи (18), (19) є, наприклад, числа  $\alpha = 0,0406$ ,  $\beta = 0,4382$ . Тоді оцінка (13) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \|u^* - u^{(k)}\| &\leq \frac{0,4382 - 0,0406}{2} \cdot \left( \frac{0,097618\dots}{2} \right)^k \cdot \frac{1}{4} \approx \\ &\approx \frac{0,497 \cdot 10^{-1}}{(20,488)^k}. \end{aligned}$$

Звідси для кількості ітерацій, необхідних для досягнення точності  $\epsilon$ , отримуємо значення

$$k_0(\epsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{0,497 \cdot 10^{-1}}{\epsilon}}{\ln 20,488} \right\rceil + 1.$$

В таблиці 4 наведено значення  $k_0(\epsilon)$  для деяких значень  $\epsilon > 0$ .

Таблиця 4

Значення  $k_0(\epsilon)$  для деяких  $\epsilon$

$\epsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
$k_0(\epsilon)$	0	1	2	3	3	4

Оберемо  $\epsilon = 10^{-5}$ . В таблиці 5 наведено значення

$$\epsilon^{(k)} = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{2} |w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})|$$

оцінки похибки наближеного розв'язку  $u^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , а в таблиці 6 – значення наближень  $w^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  та  $v^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , в точці  $(0; 0,5)$ .

Таблиця 5

Значення оцінки похибки наближеного розв'язку

$k$	0	1	2	3
$\epsilon^{(k)}$	$0,497 \cdot 10^{-1}$	$0,185 \cdot 10^{-2}$	$0,628 \cdot 10^{-4}$	$0,208 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 6

Значення послідовних наближень в точці  $(0; 0,5)$

$k$	0	1	2	3
$w^{(k)}(0, 0,5)$	0,10955	0,10156	0,10116	0,10115
$u^{(k)}(0, 0,5)$	0,05985	0,09971	0,10110	0,10115
$v^{(k)}(0, 0,5)$	0,01015	0,09785	0,10104	0,10114

На рис. 3 і 4 наведені поверхня та лінії рівня наближеного розв'язку

$$u^{(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (v^{(3)}(\mathbf{x}) + w^{(3)}(\mathbf{x}))$$

відповідно, при цьому  $\|u^{(3)}\| = 0,10115$ .

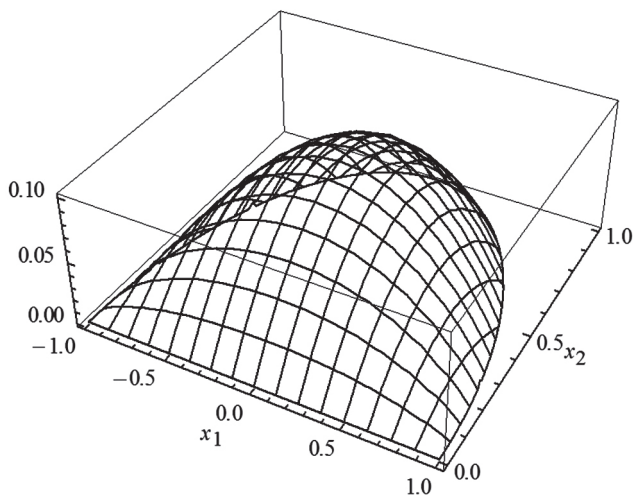


Рис. 3. Поверхня наближеного розв'язку  $u^{(3)}(\mathbf{x})$

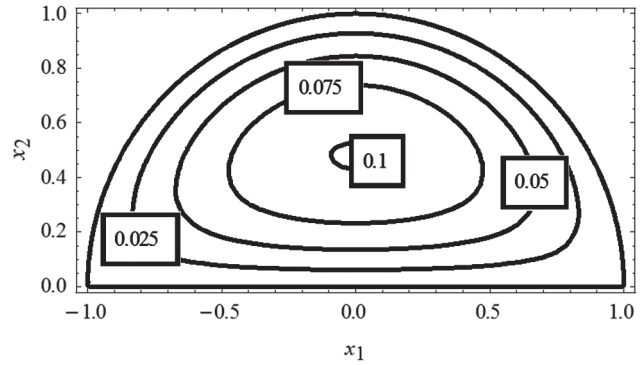


Рис. 4. Лінії рівня наближеного розв'язку  $u^{(3)}(\mathbf{x})$

### Висновки

В роботі отримали подальший розвиток дво-бічні ітераційні методи чисельного знаходження розв'язку нелінійної еліптичної крайової задачі в частині використання методу  $R$ -функцій для побудови обох кінців початкового сильно інваріантного конусного відрізка. Аналіз даних в таблицях 1 та 4 показує, що вдалий вибір конусного відрізка  $\langle v_0, w_0 \rangle$  призводить до швидкої збіжності послідовних наближень. Результати роботи можуть бути використані у математичному моделюванні процесів у нелінійних середовищах.

**Список літератури:** 1. Pao C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. – New York: Plenum Press, 1992. 2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с. 3. Опоицев В.И. Нелинейные операторы в пространствах с конусом / В.И. Опоицев, Т.А. Хуродзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с. 4. Amann H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces / H. Amann // J. Funct. Anal. – 1972. – № 11. – Pp. 346-384. 5. Dalbono F. M. Nodal solutions for supercritical Laplace equations / F. Dalbono, M. Franca // Commun. Math. Phys. – 2016. – Vol. 347. – Pp. 875-901. 6. Afrouzi G. A Numerical Method for Finding Positive Solution of Dirichlet Problem with a Weight Function / G. A. Afrouzi, S. Mahdavi, Z. Naghizadeh // Journal of Information and Computing Science. – 2006. – Vol. 1. – № 3. – Pp. 168-172. 7. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // Int. J. Bifurcation Chaos. – 2000. – Vol. 10. – № 7. – Pp. 1565-1612. 8. Колосов А.И. Конструктивное исследование краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / А.И. Колосов, С.В. Колосова, М.В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 2. – С. 50–57. 9. Колосова С.В. О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений / С.В. Колосова, В.С. Луханин, М.В. Сидоров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 1. – С. 35–42. 10. Колосова С.В. Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью / С.В. Колосова, М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2013. – № 3 (62). – С. 28–31. 11. Колосова С.В. О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане-Эмдена / С.В. Колосова, В.С. Луханин, М.В. Сидоров

ров // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2015. — № 3. — С. 107–120. **12.** Guo D. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications / D. Guo, V. Lakshmikantham // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 1987. — Vol. 11. — № 5. — P. 623–632. **13.** Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения / В.Л. Рвачев. — К.: Наук. думка, 1982. — 552 с.

**Resume**

**M.V. Sidorov**

**APPLICATION OF CONSTRUCTIVE METHODS OF THE THEORY OF R-FUNCTIONS FOR CONSTRUCTION OF A CONE SEGMENT IN THE NUMERICAL REALIZATION OF TWO-SIDED ITERATIVE METHODS**

**Background:** The Dirichlet problem for nonlinear equations of elliptic type is often a mathematical model of various stationary processes in nonlinear media. The construction of new numerical methods for solving such problems, as well as the improvement of existing ones, is an actual scientific problem.

**Materials and methods:** To obtain the results, we used the Green's functions method, the R-functions method of V.L. Rvachev, and also methods of the theory of non-linear operators in semi-ordered spaces.

**Results:** To find the positive solution of the homogeneous Dirichlet problem for a nonlinear elliptic equation on the basis of a transition to an equivalent nonlinear integral equation, an iterative method with a two-sided character of convergence is constructed by the Green's function method. To construct the initial cone segment, it is proposed to use the R-function method. The proposed method is illustrated by a computational experiment.

**Conclusion:** The iterative method of solving nonlinear boundary value problems proposed in the paper can be used in mathematical modeling of processes in nonlinear media, also it can be extended to boundary value problems for systems of nonlinear elliptic equations and elliptic equations of higher orders.

*Надійшла до редколегії 19.09.2017*