УДК517.9

О НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

ХУДОШИН И.Г.

Рассматривается начальная задача для нестационарного полулинейного дифференциально-алгебраического уравнения, не разрешенного относительно вектора производных. Предполагается, что нестационарный характеристический пучок линейной части уравнения имеет постоянный индекс 2. Доказывается нелокальная теорема существования и единственности решения начальной задачи. Результаты применяются для моделирования переходных процессов в нелинейной электрической цепи.

1. Введение

При математическом моделировании нелинейных электрических цепей возникает система дифференциально-алгебраических уравнений [1, 4, 5, 7, 15, 18]. Наиболее изученным является случай нелинейных цепей со стационарными параметрами, а глобальные теоремы существования и единственности решений в переходных режимах обычно предполагают, что индекс характеристического пучка линейной части уравнений равен 1.

Целью данной работы является получение нелокальных теорем существования и единственности для нелинейных цепей с нестационарными элементами и ослабление ограничения единичности индекса характеристического пучка.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \qquad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$ — квадратные комплексные, вообще говоря, вырожденные матрицы размера $n \times n$, $f(t,x) : [t_0, T] \times C^n \to C^n$ – известная вектор-функция. Предполагается, что матричный пучок

$$\lambda A(t) + B(t) \qquad (2)$$

регулярен при $t_0 \le t \le T$ и для его резольвенты выполняется следующая оценка:

$$\left\| (\lambda A(t) + B(t))^{-1} \right\| \le C_1 \,|\, \lambda \,|, \,|\, \lambda \,| \ge C_2, \; t_0 \le t \le T, \qquad (3)$$

здесь C_1, C_2 — положительные константы. В настоящей работе исследуется разрешимость уравнения (1).

3. Предварительные сведения

Известно [1], что если пучок (2) регулярен и выполняется ограничение (3), то можно построить две пары спектральных проекторов типа Рисса:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=C_2} (\lambda A(t) + B(t))^{-1} d\lambda A(t), \\ P_2(t) &= E - P_1(t), \\ Q_1(t) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=C_2} A(t)(\lambda A(t) + B(t))^{-1} d\lambda, \\ Q_2(t) &= E - Q_1(t), \end{aligned} \qquad (4)$$

задающих разложение исходного пространства C^n в прямые суммы подпространств, инвариантных относительно пучка (2):

$$C^n = X_1(t) \dotplus X_2(t) = Y_1(t) \dotplus Y_2(t),$$
$$X_i(t) = P_i(t)C^n,\ Y_i(t) = Q_i(t)C^n,$$
$$A(t)X_i(t) \subseteq Y_i(t),\ B(t)X_i(t) \subseteq Y_i(t), \quad (5)$$
$$i = 1,2,\ t_0 \le t \le T.$$

Здесь E – единичная матрица размера $n \times n$. Сужения операторов $A_1(t) = A(t) : X_1(t) \to Y_1(t)$ и $B_2(t) = B(t) : X_2(t) \to Y_2(t)$ обратимы, оператор $A_2(t)B_2^{-1}(t)$ нильпотентный с индексом нильпотентности не выше 2, а подпространство $X_2(t)$ состоит из собственных и присоединенных векторов пучка (2), отвечающих бесконечно удаленной точке.

Используем нормализующую матрицу G из [1, с. 48] и обратную к ней:

$$G(t) = A(t)P_1(t) + B(t)P_2(t) = Q_1(t)A(t) + Q_2(t)B(t), \quad (6)$$

$$G^{-1}(t) = A_1^{-1}Q_1(t) + B_2^{-1}Q_2(t), \quad (7)$$

обладающую следующими свойствами:

$$G^{-1}(t)A(t)P_1(t) = P_1(t),\ G^{-1}(t)B(t)P_2(t) = P_2(t),$$
$$A(t)G^{-1}(t)Q_1(t) = Q_1(t),\ B(t)G^{-1}(t)Q_2(t) = Q_2(t). \quad (8)$$

Проекторы (4) и матрицы (6), (7) обладают той же степенью гладкости по t, что и пучок (2). Если матрицы $A(t)$, $B(t)$ вещественны, то проекторы (4) и матрицы (6), (7) также вещественны и все перечисленные свойства сохраняются.

Подпространство $X_2(t)$ состоит только из собственных векторов пучка (2) и присоединенных векторов высоты 1, отвечающих точке $\lambda = \infty$. В этом случае подпространство $X_2(t)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств

$$X_2(t) = X_{20}(t) \dotplus X_{21}(t), \quad (9)$$

где $X_{20}(t)$ состоит только из собственных, а $X_{21}(t)$ – только из присоединенных векторов пучка (2),т.е.

$$\forall x(t) \in X_{20}(t) : A(t)x(t) \equiv 0,$$
$$\forall x(t) \in X_{21}(t)\ \exists y(t) \in X_{20} : A(t)x(t) \equiv B(t)y(t), \quad (10)$$
$$\forall x(t) \in X_{21}(t) : B(t)x(t) \notin \mathrm{Im}A(t).$$

Разложение (9) порождает проекторы $P_{20}(t)$, $P_{21}(t)$, такие что

$$P_{20}(t) + P_{21}(t) = P_2(t),\ P_{20}(t)P_{21}(t) = 0,$$
$$P_{20}C^n = X_{20}(t),\ P_{21}(t)C^n = X_{21}(t). \quad (11)$$

Для указанных проекторов выполняются тождества

$$P_{20}(t)G^{-1}(t)B(t) = G^{-1}(t)B(t)P_{20}(t) = P_{20}(t),$$
$$P_{21}(t)G^{-1}(t)B(t) = G^{-1}(t)B(t)P_{21}(t) = P_{21}(t),$$
$$P_{21}(t)G^{-1}(t)A(t) \equiv 0,\ G^{-1}(t)A(t)P_{20}(t) \equiv 0, \quad (12)$$
$$P_{20}(t)G^{-1}(t)A(t) = G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t).$$

Первые два тождества следуют из (8) и (11), третье тождество вытекает из (10), а четвёртое следует из (8), (11) и третьего тождества. Проекторы (11) обладают той же степенью гладкости по t, что и пучок (2).

Будем говорить, что матричный пучок (2) и вектор-функция $f(t,x) : [t_0, T] \times C^n \to C^n$ *частично спектрально согласованы*, если существует матрица $N(t) \in C^{n \times n}$, такая что для любых $t_0 \le t \le T$, $x \in C^n$ выполняется тождество (сравн. [17])

$$P_{21}(t)G^{-1}(t)f(t,x) = P_{21}G^{-1}(t)f(t, N(t)P_{21}(t)x). \quad (13)$$

Замечание. *Любая функция* $f(t)$, *не зависящая от* x, *частично спектрально согласована с пучком (2). В случае, когда выполняется оценка* $\left\|(\lambda\lambda A(t+ B(t))^{-1}\right\| \le C,\ t_0 \le t \le T$, *то условие частичной спектральной согласованности также формально выполнено, так как* $P_{21}(t) \equiv 0$. *Если функция* $f(t,x)$ *достаточно гладкая, то вместо условия (13) достаточно проверить выполнение равенства*

$$P_{21}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)(P_1(t) + P_{20}(t)) \equiv 0.$$

4. Теорема существования и единственности решения

Предполагается, что матричный пучок (2), отвечающий уравнению (1), регулярен и для него выполняется оценка (3).

Для уравнения (1) рассматривается начальная задача

$$P_1(t_0)x(t_0) = P_1(t_0)x_0, \quad (14)$$

где x_0 — известный вектор из C^n.

Решением начальной задачи (1), (14) на отрезке $[t_0, T]$ будем называть вектор-функцию $x(t)$ со значениями в C^n, непрерывно-дифференцируемую при $t_0 \le t \le T$, удовлетворяющую уравнению (1) при всех $t \in [t_0, T]$ и начальному условию (14).

Теорема. *Пусть* $A(t)$, $B(t)$ — *комплексные матрицы размера* $n \times n$, *дважды непрерывно дифференцируемые по* t *на отрезке* $[t_0, T]$, *для которых выполняется оценка (3), а* $f(t,x)$ — *вектор-функция со значениями в* C^n, *трижды непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных в области* $[t_0, T] \times C^n$, *для которой выполняется условие частичной спектральной согласованности (13), где матрица* $N(t)$ *дважды непрерывно дифференцируема на отрезке* $[t_0, T]$. *Пусть также для любых* $t_0 \le t \le T$ *и* $x \in C^n$ *выполнены условия*

$1^0 \quad \left\| P_{21}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)N(t)\right\| \le L_{21} < 1,$

$2^0 \quad \left\| P_{20}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right\| + \left\|\frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t))\right\| \le L_{20} < 1,$

$3^0 \quad P_1(t)G^{-1}(t)f(t,x)$ *липшицева по* x *с некоторой константой* L_1 *равномерно по* t.

Тогда существует единственное глобальное на $[t_0, T]$ решение начальной задачи (1), (14).

Доказательство. Умножим уравнение (1) на матрицу $G^{-1}(t)$, подействуем на полученное уравнение проекторами $P_1(t)$, $P_{20}(t)$ и $P_{21}(t)$ и воспользуемся тождествами (8) и (12). Получим следущую систему уравнений:

$$P_1(t)\frac{d}{dt}x(t) + G^{-1}(t)B(t)P_1(t)x(t) = = P_1(t)G^{-1}(t)f(t,x(t)), \tag{15}$$

$$G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t)\frac{d}{dt}x(t) + P_{20}(t)x(t) = = P_{20}(t)G^{-1}(t)f(t,x(t)), \tag{16}$$

$$P_{21}(t)x(t) = P_{21}(t)G^{-1}(t)f(t,x(t)). \tag{17}$$

Обозначим $x_1(t) = P_1(t)x(t)$, $x_{20}(t) = P_{20}(t)$, $w(t) = P_{21}(t)x(t)$, воспользуемся условием частичной спектральной согласованности (13) и правилом дифференцирования произведения. Получим систему уравнений, эквивалентную исходному уравнению (1):

$$\frac{d}{dt}x_1(t) - \frac{d}{dt}P_1(t)(x_1(t) + x_{20}(t) + w(t)) + + G^{-1}(t)B(t)x_1(t) = = P_1(t)G^{-1}(t)f(t, x_1(t) + x_{20}(t) + w(t)), \tag{18}$$

$$x_{20}(t) + \frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)w(t)) - - \frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t))(x_1(t) + x_{20}(t) + w(t)) = = P_{20}(t)G^{-1}(t)f(t, x_1(t) + x_{20}(t) + w(t)), \tag{19}$$

$$w(t) = P_{21}(t)G^{-1}(t)f(t, N(t)w(t)). \tag{20}$$

Из условия 1^0 теоремы следует, что отображение $P_{21}(t)G^{-1}(t)f(t, N(t)\bullet)$ является сжимающим в $X_{21}(t)$ равномерно по t и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку $w(t)$, удовлетворяющую уравнению (20).

Кроме того, $\left\| E_{X_{21}(t)} - P_{21}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)N(t)\right\| > 0$ при $t \in [t_0, T]$, $x \in C^n$, значит, в пространстве $X_{21}(t)$ определен обратный оператор $(E_{X_{21}(t)} - P_{21}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)N(t))^{-1}$. Этот оператор, а также оператор $\frac{\partial}{\partial t}(P_{21}(t)G^{-1}(t)f(t, N(t)x)$ дважды непрерывно дифференцируем по t на отрезке $[t_0, T]$ для любого $x \in X_{21}(t)$. Следовательно, по теореме о производных высших порядков неявной функции (теорема 31 [2, с. 314]), найденная вектор-функция $w(t)$ также дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_0, T]$.

Проинтегрируем уравнение (18) от t_0 до t, сложим с уравнением (19) и обозначим $v(t) = x_1(t) + x_{20}(t)$ (заметим, что $x_1(t) = P_1(t)v(t)$). Получим уравнение

$$v(t) = P_1(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}[P_1(\tau)G^{-1}(\tau)f(\tau, v(\tau) + w(\tau)) + + \frac{d}{d\tau}P_1(\tau)(v(\tau) + w(\tau)) - - G^{-1}(\tau)B(\tau)P_1(\tau)v(\tau)]d\tau + + P_{20}(t)G^{-1}(t)f(t, v(t) + w(t)) + + \frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t))(v(t) + w(t)) - - \frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)w(t)). \tag{21}$$

Подставив полученную ранее вектор-функцию $w(t)$ в (21), получим уравнение относительно $v(t)$. Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\delta < (1 - L_{20})/(L_1 + \sup_{t\in[t_0,T]}\left\|\frac{d}{dt}P_1(t)\right\| + + \sup_{t\in[t_0,T]}\left\|G^{-1}(t)B(t)P_1(t)\right\|). \tag{22}$$

Тогда при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ правая часть уравнения (21) будет равномерно по t сжимающим отображением относительно $v(t)$. Следовательно, существует единственное решение $v(t)$ уравнения (21), непрерывное на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$. За конечное число шагов можно продлить найденное решение на весь отрезок $[t_0, T]$. Легко убедиться, что найденное решение $v(t)$ удовлетворяет условию $P_1(t_0)v(t_0) = P_1(t_0)x_0$.

Так как выполняется условие 2^0 теоремы, то при $t \in [t_0, T]$, $x \in C^n$ выполняется неравенство

$$\left\| E_{X_1(t)+X_{20}(t)} - P_{20}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - \frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t))\right\| > 0,$$

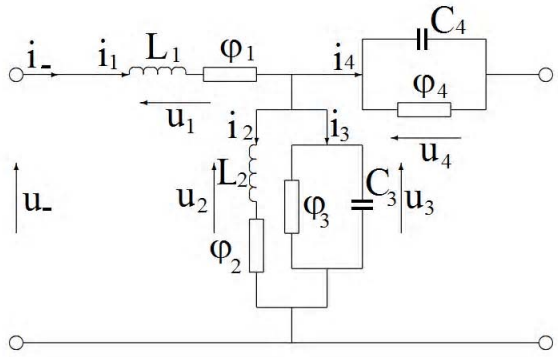
и мы снова можем воспользоваться теоремой о производных высших порядков неявной функции. Принимая во внимание, что подынтегральная часть правой части уравнения (21) непрерывна, а остальные

слагаемые непрерывно дифференцируемы по t, делаем вывод о том, что найденное решение $v(t)$ непрерывно дифференцируемо по t на отрезке $[t_0, T]$. Искомое решение начальной задачи (1), (14) получаем как сумму $x(t) = v(t) + w(t)$.

Теорема доказана.

5. Приложение в радиотехнике

На рисунке изображен передающий электрический четырехполюсник с нелинейными и нестационарными элементами.



Предполагается, что индуктивности L_1, L_2 и ёмкости C_1, C_2 меняются во времени. Колебания элементов четырехполюсника описываются следующими уравнениями относительно токов i_k и напряжений u_k:

$$u_1(t) = \frac{d}{dt}(L_1(t)i_1(t)) + \varphi_1(t, i_1(t)), \qquad (23)$$

$$u_2(t) = \frac{d}{dt}(L_2(t)i_2(t)) + \varphi_2(t, i_2(t)), \qquad (24)$$

$$i_3(t) = \frac{d}{dt}(C_3(t)u_3(t)) + \varphi_3(t, u_3(t)), \qquad (25)$$

$$i_4(t) = \frac{d}{dt}(C_4(t)u_4(t)) + \varphi_4(t, u_4(t)). \qquad (26)$$

Здесь функции φ_1, φ_2 — омические потери в индуктивностях, а функции φ_3, φ_4 характеризуют нелинейную утечку тока в ёмкостях. Для данной схемы записываются следующие уравнения Кирхгофа:

$$u_1 + u_3 = u_-,\ u_2 - u_3 = 0,\ i_2 + i_3 + i_4 = i_-,\ i_1 = i_-. \qquad (27)$$

Подставив значения переменных u_1, u_2, i_3, i_4 из уравнений элементов (23), (24), (25), (26) в уравнения Кирхгофа (27), получим следующую систему уравнений, описывающую распределение токов и напряжений в четырехполюснике:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(L_1(t)i_1(t)) + u_3(t) = u_-(t) - \varphi_1(t, i_1(t)),\\
&\frac{d}{dt}(L_2(t)i_2(t)) - u_3(t) = -\varphi_2(t, i_2(t)),\\
&\frac{d}{dt}(C_3(t)u_3(t)) + \frac{d}{dt}(C_4(t)u_4(t)) + i_2(t) =\\
&= i_-(t) - \varphi_3(t, u_3(t)) - \varphi_4(t, u_4(t)),
\end{aligned} \qquad (28)$$

$$i_1(t) = i_-(t).$$

Входной ток $i_-(t)$ и входное напряжение $u_-(t)$ считаются известными функциями. Применим к первому, второму и третьему уравнениям системы (28) правило дифференцирования произведения и запишем систему в векторной форме (1), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) & 0 & 0 & 0\\ 0 & L_2(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_3(t) & C_4(t)\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \dot{L}_1(t) & 0 & 1 & 0\\ 0 & \dot{L}_2(t) & -1 & 0\\ 0 & 1 & \dot{C}_3(t) & \dot{C}_4(t)\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (29)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} i_1(t)\\ i_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t) \end{pmatrix}, \qquad (30)$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} u_-(t) - \varphi_1(t, i_1)\\ -\varphi_2(t, i_2)\\ i_-(t) - \varphi_3(t, u_3) - \varphi_4(t, u_4)\\ i_-(t) \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Матрица $A(t)$ является вырожденной и несимметричной, поэтому непосредственное применение глобальной теоремы существования решений явных дифференциальных уравнений вида $\frac{dy}{dt} = F(t, y)$ здесь невозможно.

Спектральные проекторы (4), (11) строим по методике, приведенной в работе [16] для стационарного пучка. В данном случае проекторы задаются матрицами:

$$P_{20}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\dot C_4(t)L_1(t)}{C_4(t)} & 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{L_1(t)C_3(t)\dot C_4(t)}{C_4^2(t)} & 0 & -\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{21}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{L_1(t)}{L_2(t)} & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{\dot C_4(t)L_1(t)}{C_4(t)} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\dot C_3(t)L_1(t)}{C_4(t)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{L_1(t)}{L_2(t)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ L_1(t)\dfrac{d}{dt}\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & 0 & -\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_1(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{L_1(t)}{L_2(t)} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -L_1(t)\dfrac{d}{dt}\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & 0 & \dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $G(t)$, $G^{-1}(t)$ имеют следующий вид:

$$G(t)=\begin{pmatrix} \dot L_1(t) & 0 & 1 & 0\\ L_1(t)-\dfrac{L_1(t)\dot L_2(t)}{L_2(t)} & L_2(t) & -1 & 0\\ L_1(t)(\dot C_4(t)-C_4(t))\dfrac{d}{dt}\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)}-\dfrac{L_1(t)}{L_2(t)} & 0 & C_3(t)+C_4(t)\dfrac{d}{dt}\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & C_4(t)\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{1}{L_2(t)} & \dfrac{1}{L_2(t)} & 0 & -\dfrac{L_1(t)}{L_2(t)}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{L_1(t)}{L_2(t)}\\ 1 & 0 & 0 & -\dot L_1(t)\\ -\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{C_3(t)}{C_4(t)} & 0 & \dfrac{1}{C_4(t)} & \dfrac{L_1(t)}{L_2(t)C_4(t)}+\dfrac{\dot L_1(t)\dot C_3(t)}{C_4}+\left(1-\dfrac{\dot C_4(t)}{C_4(t)}\right)\dfrac{d}{dt}\dfrac{L_1(t)C_3(t)}{C_4(t)} \end{pmatrix}.$$

Проверим условия теоремы для заданных матриц $A(t)$, $B(t)$ и правой части $f(t,x)$. Если при достаточно больших λ неравенство

$$(\lambda L_2(t)+\dot L_2(t))(\lambda C_4+\dot C_4(t))\neq 0$$

выполняется при любых $t\in[t_0,T]$, то оценка резольвенты (3) также выполняется. Необходимо, чтобы функции $L_2(t), C_4(t)$ были отличны от нуля при любых t.

Условие частичной спектральной согласованности (13) матричного пучка (2) и правой части уравнения (1) выполнено, причем $N(t)\equiv 0$:

$$P_{21}(t)G^{-1}(t)f(t,x)=\begin{pmatrix} i_-(t)\\ -\dfrac{L_1(t)}{L_2(t)}i_-(t)\\ -\dfrac{L_1(t)\dot C_4(t)}{C_4(t)}i_-(t)\\ \dfrac{L_1(t)\dot C_3(t)}{C_4(t)}i_-(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, условие 1^0 теоремы выполнено. Для проверки условия 2^0 теоремы необходимо, чтобы нормы следующих матриц были ограничены малыми константами:

$$P_{20}(t)G^{-1}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial i_1}(t,i_1) & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{C_3(t)}{C_4(t)}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial i_1}(t,i_1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}(G^{-1}(t)A(t)P_{21}(t))=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \dot L_1(t) & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{d}{dt}\dfrac{L_1(t)C_3(t)}{C_4(t)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если матричный пучок (2) и правая часть уравнения (1) достаточно гладкие, то для выполнения условия 3^0 теоремы достаточно потребовать равномерной по t липшицевости по x от функций φ_i, $i = 1..4$.

Ниже приведен пример параметров рассматриваемой схемы, для которых условия теоремы выполняются. Пусть

$$L_1(t) = L_2(t) = 10^{-9} + 10^{-10}\sin(t)\ \text{Гн},$$
$$C_3(t) = C_4(t) = 10^{-9} + 10^{-10}\sin(t)\ \Phi,$$
$$\varphi_1(t,i) = \varphi_2(t,i) = \cos(0.01i)\ \text{Ом},$$
$$\varphi_3(t,u) = \varphi_4(t,u) = \cos(0.01u)\ \text{Ом},$$

входные ток $i_(t)$ и напряжение $u_(t)$ — любые достаточно гладкие функции.

Начальное условие (14) в данном случае будет иметь следующий вид:

$$i_1(t_0) + i_2(t_0) = i_{10} + i_{20},\ u_3(t_0) + u_4(t_0) = u_{30} + u_{40}.$$

6. Выводы

Научная новизна данного исследования заключается в разработке метода математического моделирования переходных режимов нелинейных электрических цепей с нестационарными параметрами. Для достаточно общего вида полученных систем нелинейных уравнений указаны условия существования и единственности решения в заданном интервале времени. Результаты применяются к расчету переходных режимов передающего четырехполюсника с нелинейными и нестационарными элементами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в работе, можно использовать при анализе и синтезе различных радиотехнических систем, что интересно как само по себе, так и применительно к теории управления.

Литература: 1. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями // Системные технологии. 2006. 273 с. **2.** *Шварц Л.* Анализ. Т.1. М.:Мир, 1972. 824 с. **3.** *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с. **4.** *Campbell S.L.* Singular Systems of Differential Equations. Pitman. 1980. 176 p. **5.** *Marz R.* On linear differential-algebraic equations and linearizations //Applied Numerical Mathematics. 1994. P.279–292. **6.** *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями: Навч. посіб. К.: Вища шк., 2000. 294 с. **7.** *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $A\frac{dx}{dt} + Bx(t) = f(t)$ // Дифференциальные уравнения. 1975. №11. С.1996–2010. **8.** *Favini A., Plazzi P.* Some results concerning the abstract nonlinear equation $D_tMu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$ // Circuits, Systems, Signal Proceccing. 1986. P. 261–274. **9.** *Rutkas A.*The solvability of a nonlinear differenitial equation in a Banach space // Spectral and evolutional problems. Proceedings of Sixth Crimean Fall Mathematical School-Symposium (Simferopol).1996. P.317–320. **10.** *Favini A., Rutkas A.*Existence and uniqueness of solution of some abstract degenerate nonlinear equation// Differential Integral Equations.1999. No.12. P.373–394. **11.** *Rutkas A.G., Vlasenko L.A.,* Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations // Nonlinear Oscilations. 2001. No12. P.252–263. **12.** *Радбель Н.И.* О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$ // Дифференциальные уравнения. 1979. №6. **13**. *Канторович А.В., Акилов Г.П.,* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз,1959. **14.***Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1979. 534 с. **15.** *Руткас А.Г., Худошин И.Г.* Глобальная разрешимость одного вырожденного полулинейного дифференциально-операторного уравнения//Нелінійні коливання. 2004. Т.7. №3. С.414–429. **16.** *Худошин И.Г.* Начальная задача для некоторых квазилинейных дифференциально- алгебраических уравнений // Вісник Харківського університету. Математика, прикладна математика і механіка. 1999. № 458. С.159–164. **17.** *Худошин И.Г.*, Численное решение задачи Коши для одной полулинейной системы дифференциально-алгебраических уравнений // Вісник Харківського університету. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". 2008. № 833. Вип. 10. С. 258–271. **18.** *Худошин И.Г.*, Решение одной системы дифференциально-алгебраических уравнений и применение к математическому моделированию нелинейных цепей // Радиоэлектроника и информатика. 2008. № 3. С.15–22.

Поступила в редколлегию 22.07.2011

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Руткас А.Г.

Худошин Илья Григорьевич, ст. преподаватель кафедры ММ и ПО ХНУ им. В.Н.Каразина. Адрес: Украина, 61045, Харьков, пер. Шекспира, 7, кв. 69, тел. (050)4043498.