БИОНИКА ИНТЕЛЛЕКТА. 2007. № 2 (67). С. 51–55 ХНУРЭ

УДК 519.859

СТРАТЕГИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ МНОГОСВЯЗНОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М.В. Злотник[1], А.В. Кривуля[2], А.В. Панкратов[3], Т.Е. Романова[4]

[1] ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, zlotnik@ipmach.kharkov.ua
[2] ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, anet_kav@mail.ru
[3] ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, pankratov@ipmach.kharkov.ua
[4] ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, sherom@kharkov.ua

Рассматривается задача покрытия компактной многосвязной многоугольной области конечным семейством прямоугольников, строится математическая модель, основанная на применении Ф-функции, предлагается метод решения.

ЗАДАЧА ПОКРЫТИЯ, МНОГОУГОЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ, ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ, Ф-ФУНКЦИЯ

Введение

При создании систем поддержки принятия решений в классе задач геометрического проектирования [1] возникает необходимость в построении адекватных математических моделей и разработке эффективных методов решения задач покрытия.

Задачи покрытия [2] возникают в различных сферах человеческой деятельности, областях науки и техники и состоят в поиске покрытия заданной области множеством геометрических объектов, в том числе: в телекоммуникациях, в системах орошения, пожарной безопасности, в военных сценариях, системах воздушного и космического наблюдения, медицине и многих других приложениях.

Как известно, конструктивным средством математического и компьютерного моделирования задач покрытия является метод Φ -функций [4, 5]. В работе [3] формализуется критерий покрытия с использованием этого метода. Математическая модель задачи покрытия многоугольной области набором различных прямоугольников на основании понятия Г-функции впервые описывается в статье [6]. Эта модель получила дальнейшее развитие в работе [7], для случая, когда метрические характеристики объектов могут совпадать.

Целью данной статьи является разработка стратегии решения задачи покрытия компактной многосвязной многоугольной области конечным семейством прямоугольников.

Рассмотрим задачу покрытия в следующей постановке.

Пусть задана ограниченная многосвязная многоугольная область $\Omega \subset R^2$ и семейство $\Lambda = \{P_i, i = 1,2,...,n\}$ прямоугольников

$$P_i = \{(x,y) \in R^2, -a_i \le x \le a_i, -b_i \le y \le b_i\},$$

$$i = 1,2,...,n$$

где R^2 – это двумерное арифметическое евклидово пространство.

Расположение Ω и P_i в пространстве R^2 однозначно определяется векторами трансляции $u_0 = (x_0, y_0)$ и $u_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,2,...,n$ соответственно.

Полагаем, что область Ω неподвижна и $u_0 = (0,0)$. В дальнейшем прямоугольник P_i, транслированный на вектор u_i, обозначим $P_i(u_i)$, а семейство транслированных прямоугольников $P_i(u_i)$, $i = 1,2,...,n$, – $\Lambda(u)$, где $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^{2n}$.

Задача. Определить вектор $u^0 \in R^{2n}$, при котором выполняется условие

$$\Omega \bigcap \operatorname{int} H(u^0) = \varnothing, \tag{1}$$

где $H(u^0) = cl(R^2 \setminus P(u^0))$; $P(u^0) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i(u_i^0)$; $cl(\cdot)$, $\operatorname{int}(\cdot)$ – замыкание $(\cdot)$, внутренность множества $(\cdot)$ [8] соответственно. Иными словами семейство $\Lambda(u^0)$ покрывает область Ω тогда и только тогда, когда выполняется условие (1) (рис. 1).

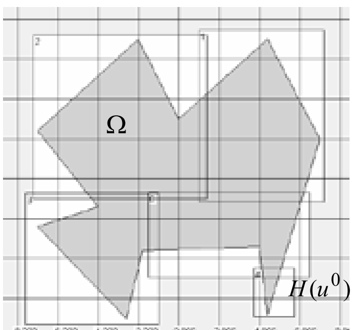

Рис. 1. Выполнение условия (1)

Для каждого фиксированного $u^0 \in R^{2n}$ множество $H(u^0)$ можно представить в виде пересечения

$$H(u^0) = \bigcap_{i=1,2,...,m} H_i(u^0),$$

где $H_i(u^0)$ – замыкание дополнения до i -ой компоненты связности множества $P(u^0)$.

Таким образом, $\Lambda(u^0)$ является покрытием области Ω, если существует вектор u^0, такой что $\Omega \subset P(u^0)$.

Конструктивным средством аналитического описания условия (1) является Γ-функция [6].

По определению Γ-функция для множеств Ω и $\Lambda(u)$ – это функция

$$\Gamma(u) = F(u,0), \qquad (2)$$

где

$$F(u,v) = \begin{cases} F_1(u,v) \text{ если } u \in R_1^{2n} \\ F_2(u,v) \text{ если } u \in R_2^{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_\eta(u,v) \text{ если } u \in R_\eta^{2n} \end{cases}, \qquad (3)$$

где $R^{2n} = \bigcup_{q=1}^{\eta} R_q^{2n}$ – разбиение пространства R^{2n}, $\eta \le K^\sigma$, $\sigma = \frac{1}{2}n(n-1)$. Здесь $K=11$, если $a_i \ne a_j$ и $b_i \ne b_j$; $K=7$, если $a_i = a_j$ и $b_i \ne b_j$ или $a_i \ne a_j$ и $b_i = b_j$; $K=5$, если $a_i = a_j$ и $b_i = b_j$. Заметим, что значение параметра K определяется числом видов взаимных расположений пары прямоугольников P_i и P_j [6, 7] в зависимости от значений их метрических характеристик.

Таким образом, если $\Gamma(u^*) = \max \Gamma(u) \ge 0$, тогда семейство $\Lambda(u^*)$ покрывает область Ω.

Понятие Γ-функции основано на понятии Φ-функции, поскольку

$$F_i(0,v) = \Phi_i(v), i=1,2,\dots,m, \qquad (4)$$

где $\Phi_i(v)$ – Φ-функция для Ω и множества $H_i(u^0)$.

Каждое множество $H_i(u^0)$ представимо в виде конечного объединения базовых объектов C_{ij}, то есть $H_i(u^0) = \bigcup_{j=1,\dots,\lambda_i} C_{ij}(u^0)$. В качестве базовых объектов C_{ij} в данном исследовании рассматриваются полуплоскости, конусы, полубесконечные полосы и прямоугольники.

Полагаем, что Ω — выпуклое множество. Тогда, следуя [5], $\Phi_i(v) = \min\{\Phi_{ij}(v), j=1,2,\dots,\lambda_i\}$, где $\Phi_{ij}(v)$ – Φ-функция для объектов $\Omega(v)$ и C_{ij}, $j=1,2,\dots,\lambda_i$, $v=(x,y)$.

Заметим, что Φ-функция вида $\Phi_i(v)$ для множеств $H_i(u^0)$ и $\Omega(v)$ при любом $u^0 \in R_q^{2n}$, $q=1,2,\dots,\eta$ имеет один и тот же вид [4]. В этой связи в дальнейшем для $H_i(u^0)$ и λ_i введем индекс q, соответствующий подмножеству R_q^{2n}.

Пусть $u^0 \in \operatorname{int} R_q^{2n}$. Тогда Φ-функция для множеств $\Omega(v)$ и $H_{qi}(u^0)$ имеет следующий вид:

$$\Phi_{qi}(v) = \min\{\Phi_{qij}(v), j=1,2,\dots,\lambda_{qi}\}, \qquad (5)$$

где $\Phi_{qij}(v)$ – Φ-функция для двух многоугольных выпуклых множеств $\Omega(v)$ и $C_{ij}(u^0)$ [4,5].

Основываясь на соотношении (5), определим функцию $F_{qi}(u,v)$ следующим образом:

$$F_{qi}(u,v) = \min\{F_{qij}(u,v), j=1,2,\dots,\lambda_{qi}\}, \qquad (6)$$

где $F_{qij}(0,v) = \Phi_{qij}(v)$.

Определим функцию

$$F_q(u,v) = \min\{F_{qi}(u,v), i=1,2,\dots,m\}, \qquad (7)$$

где $F_{qi}(u,v)$ задана соотношением (6).

Заметим, что

$$F_{qi}(u,v) = \Phi_{qi}(v), \qquad (8)$$

где $\Phi_{qi}(v)$ – Φ-функция для множеств Ω и $H_{qi}(u^0)$, $i=1,2,\dots,m$.

Таким образом, если $\max F_q(u,v) < 0$, то семейство $\Lambda(u)$ не может быть покрытием области Ω для любого $u \in R_q^{2n}$.

Если существует (u^*, v^*) такой, что

$$F_q(u^*, v^*) = F_q(u,v) \ge 0,$$

то условие (1) выполняется.

Учитывая (2)-(8), математическая модель поставленной задачи может быть представлена в следующем виде [6]:

$$\max_{u \in R^{2n}} \Gamma(u). \qquad (9)$$

При этом процесс решения задачи (9) может быть завершен, как только $\Gamma(u^j) \ge 0$, где u^j определяется на j-ой итерации.

Поскольку множество Ω – выпуклое, то задача (9) может быть представлена следующим образом:

$$\chi^* = \max\{\chi_q^*, q=1,2,\dots,\eta_1\}, \qquad (10)$$

$$\chi_q^* = \Gamma_q(u^*) = \max_{u \in R_q^{2n}} \Gamma_q(u), \quad q=1,2,\dots,\eta_1 < \eta, \qquad (11)$$

где η_1 – это число функций вида (6).

Процесс решения заканчивается, как только выполняется неравенство $\chi_q^* \ge 0$.

Таким образом, модель (10)-(11) позволяет построить дерево решения, концевым вершинам которого соответствуют функции $\Gamma_q(u)$, $q=1,2,\dots,\eta_1$.

В случае, если Ω – невыпуклое множество, тогда осуществляется выпуклая многоугольная декомпозиция области Ω [9] вида $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\tau} \Omega_k$ (рис. 2), например, используя алгоритм, приведенный в работе [9].

Тогда задача (9) примет вид:

$$\chi^* = \min_{k=1,\dots,\tau} \chi_k^*, \qquad (12)$$

где χ_k^* определяется в результате решения задачи (10)-(11) для $k=1,\dots,\tau$.

Далее предлагается следующая стратегия решения задачи (12).

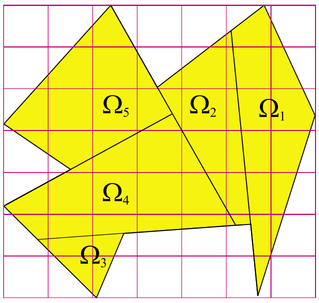

Рис. 2. Выпуклая декомпозиция области $\Omega = \bigcup_{k=1}^{5} \Omega_k$

Прежде всего оценивается суммарная площадь S_1 покрывающих прямоугольников и площадь S_2 области покрытия Ω . Если $S_2 - S_1 > 0$, то покрытие не существует, в противном случае осуществляются следующие этапы:

1) построение начального размещения прямоугольников относительно области покрытия Ω_k , $k \in \{1,\ldots,\tau\}$;

2) решение последовательности задач линейного программирования (11);

3) решение задачи (10);

4) решение задачи (12) в случае, если область покрытия – невыпуклое многоугольное множество.

При решении практических задач оптимизации важным этапом является выбор начальной точки. Если начальная точка принадлежит области допустимых решений, то покрытие построено. В противном случае осуществляется поиск допустимого решения методом спуска из построенной начальной точки. Как правило, чем ближе начальная точка лежит к области допустимых решений, тем успешнее второй этап решения задачи.

Таким образом, возникает необходимость в разработке эффективного метода поиска «достаточно хороших» начальных точек.

Метод 1

Ниже предлагается подход к построению начального размещения в задаче покрытия многоугольной области прямоугольниками методом последовательно-одиночного размещения, являющегося модификацией метода оптимизации по группам переменных Гаусса — Зейделя. Этот подход использует аппроксимацию области покрытия набором прямоугольников — многоугольным множеством, все углы которого либо прямые, либо равны 270 градусов.

Используется два представления области покрытия.

Первое представление $P1$ области – в виде точного покрытия области набором прямоугольников (рис. 3). С целью снижения затрат вычислительных ресурсов желательно использовать покрытие минимальным числом прямоугольников максимальной площади. Такое представление области используется для генерации «точек-кандидатов» при размещении каждого очередного прямоугольника. Для формирования набора точек используются как вершины прямоугольников $P1$, так и вершины прямоугольных оболочек всех пар прямоугольников $P1$.

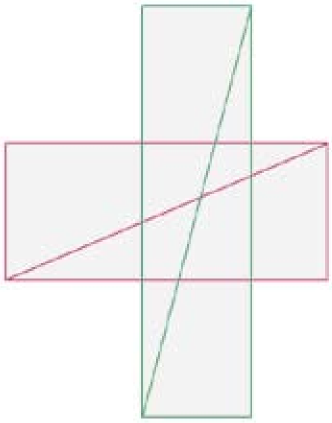

Рис. 3. $P1$-представление области покрытия

Второе представление $P2$ области покрытия строится в виде разбиения на прямоугольные подобласти (рис. 4). Разбиение может быть произвольным, но с целью снижения вычислительных затрат желательно использовать разбиение области на минимальное число прямоугольников. Такое представление области используется для определения площади пересечения области и размещаемого прямоугольника.

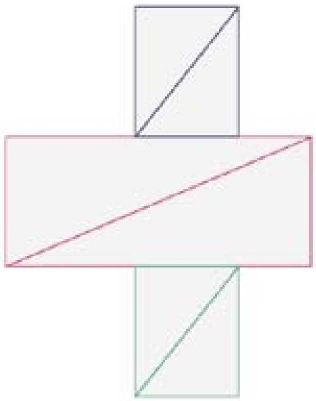

Рис. 4. $P2$-представление области покрытия

При поиске местоположения каждого из размещаемых прямоугольников P_i решается многокритериальная задача. В числе критериев (по степени убывания приоритета) – максимум покрываемой площади свободной части области, максимум площади области перекрытия с ранее размещёнными прямоугольниками и минимум числа прямоугольников, порождённых в P1 размещённым прямоугольником P_i (рис. 5).

После определения местоположения каждого из размещаемых прямоугольников P_i представления области $P1$ и $P2$ перестраиваются (рис. 6).

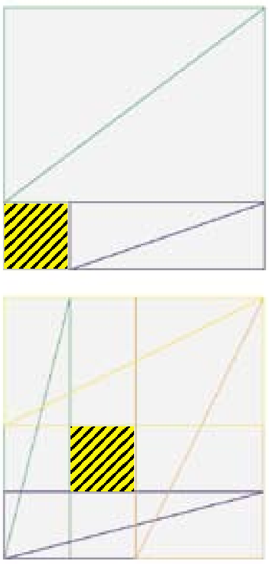

Рис. 5. Два положения прямоугольника в области P отличаются числом порождённых прямоугольных подобластей $P1$

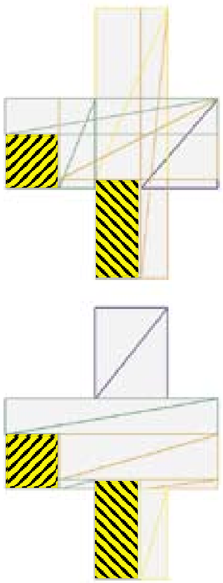

Рис. 6. Пример $P1$- и $P2$-представления области после размещения двух прямоугольников

На втором этапе построения начальной точки производится оптимизация, основанная на использовании того же метода оптимизации по группам переменных Гаусса — Зейделя. На этом этапе осуществляется последовательное выделение небольших групп объектов (от 1 до 4) из уже построенного размещения и их повторное размещение по описанным выше правилам.

Следует отметить, что для данного подхода существенное влияние на качество полученного решения оказывает последовательность, в соответствии с которой производится размещение объектов. Таким образом, генерируя разные последовательности, можно получать различные начальные точки.

С целью реализации второго этапа стратегии решения поставленной задачи формируется вспомогательная задача линейного программирования (11), которая решается с помощью модификации симплекс-метода [10].

Алгоритм решения задачи (11) является методом «допустимой точки». В качестве начальной точки выбирается решение, полученное на предыдущем этапе.

Если покрытие не найдено, то выбирается новая стартовая точка.

Третий этап заключается в выборе максимального значения на дискретном множестве $\{\chi_1^*, \chi_2^*, ..., \chi_\eta^*\}$.

Четвертый этап состоит в поиске минимального значения χ_k^* для всех $k = 1, ..., \tau$.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий работу предложенных методов.

Пример

Пусть задана прямоугольная область покрытия $\Omega = \{(x, y) \in R^2,\ -7 \le x \le 7,\ -5 \le y \le 5\}$ и $R_i,\ i = 0, ..., 8$ метрическими характеристиками (табл. 1).

Таблица 1

Метрические характеристики объектов R_i

	a	*b*
R_0	2,5	3,5
R_1	1,5	1,5
R_2	2,5	4
R_3	1	2
R_4	2,5	1,5
R_5	4	1,5
R_6	2	3
R_7	2	1
R_8	1,5	2

На рис. 7 приведено начальное размещение прямоугольников $R_i,\ i = 0, ..., 8$ с вектором параметров размещения u_0^1 относительно Ω, полученное методом 1.

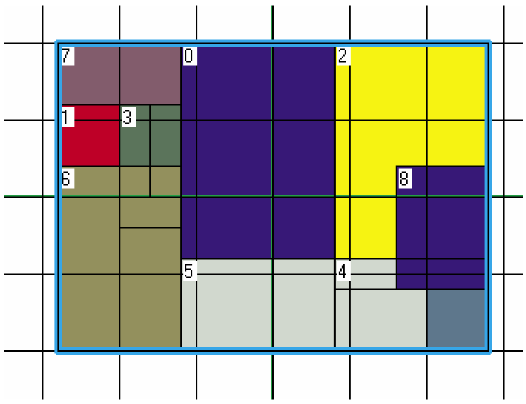

Рис. 7. Начальное размещение семейства $\Lambda(u_0^1)$ является покрытием прямоугольной области Ω

В общем случае может быть найдена начальная точка, которая не позволяет найти покрытие, используя предложенную в данной работе стратегию. В этом случае предлагается следующий подход.

Метод 2

Прежде всего аппроксимируется область покрытия Ω прямоугольником Ω^* наименьших размеров.

Далее осуществляется разбиение Ω^* на $\beta > n$ прямоугольных подобластей R_ρ, $\rho = 1,2,...,\beta$, $\beta = \beta_x \times \beta_y$ в зависимости от числа покрывающих прямоугольников (рис. 8).

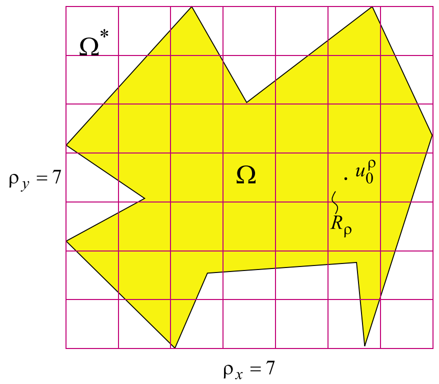

Рис. 8. Разбиение области Ω^*

Последовательно размещаются покрывающие прямоугольники в точках O_ρ, которые являются центрами симметрии прямоугольников R_ρ, то есть параметры размещения покрывающих прямоугольников R_i равны $u_i = u_0^\rho = (x_0^\rho, y_0^\rho)$, $\rho = 1,2,...,\beta$, $i = 1,...,n$.

Замечание. Каждая новая последовательность покрывающих прямоугольников выбирается случайным образом.

Рис. 9 иллюстрирует начальное размещение прямоугольников R_i, $i = 0,...,8$ с вектором параметров размещения u_0^2 относительно Ω, полученное методом 2, при этом условие (1) не выполняется.

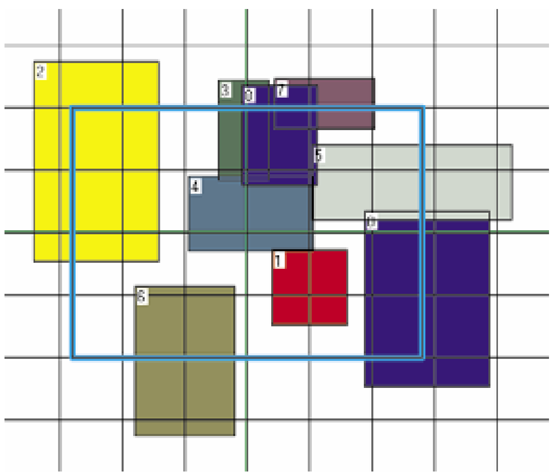

Рис. 9. Начальное размещение семейства $\Lambda(u_0^2)$

Результат работы стратегии 1)-3) с начальной точкой u_0^2 приведен на рис. 10.

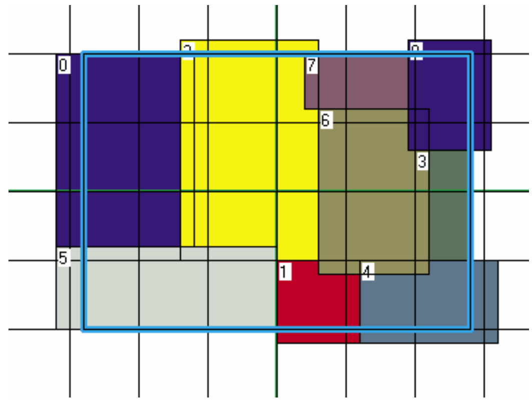

Рис. 10. Покрытие прямоугольной области Ω прямоугольниками R_i, $i = 0,...,8$

Выводы

Таким образом, предложенная стратегия позволяет найти вектор $u^0 \in R^{2n}$ параметров размещения покрывающих объектов в случае, когда покрытие существует.

Перспективным является использование предложенного подхода для разработки эффективных методов решения задачи покрытия многоугольной области многоугольными объектами.

Список литературы: 1. *Daniels K., Inkulu R.* An Incremental Algorithm for Translational Polygon Covering// University of Massachusetts at Lowell Computer Scince Technical Report Number 2001-001. 2. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В.* Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. – К.: Наук. думка, 1986. – 226 с. 3. *Злотник М. В., Кривуля А. В.* Критерий покрытия в задаче покрытия прямоугольной области прямоугольными объектами // Зб. тез доповідей II Міжнар. наук. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених «Комп'ютерний моніторинг та інформаційні технології». – Донецьк. – 2006. – С. 248-249. 4. *Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T.,* Φ -function for complex 2D objects// 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. Volume 2, Number 1, 2004 P. 69–84. 5. *Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.* Φ -function for 2D primary objects// Studia Informatica, Paris, University. 2002. Vol. 2, № 1. – P. 1–32. 6. *Stoyan Y.* Covering a polygonal region by a collection of various size rectangles // Проблемы машиностроения. –2007. Т. 10, № 2. – С. 67-82. 7. *Кривуля А. В.* Математическая модель задачи покрытия многоугольной области семейством прямоугольников / Системы обработки информации// 2007. – Вып. 8 (66). – С. 143-145. 8. *Kuratowski K.* Topology// Vol. I: New York and London, – Academic press, 1966. – P. 594. 9. *Злотник М. В.* Математична модель і метод розв'язання оптимізаційної задачі розміщення неорієнтованих багатокутників і кругів. – Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02/ Ин-т проблем машиностроения. – Харьков. – 2007. – 18 с. 10. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 510 с.

Поступила в редколлегию 10.10.2007